Universität Augsburg
Lehrstuhl für Algebra und Zahlentheorie
Prof. Marc Nieper-Wißkirchen
Ingo Blechschmidt

Wintersemester 2013/2014

Übungsblatt 2 zur Algebra II

Abgabe bis 28. Oktober 2013, 17:00 Uhr

Aufgabe 1. (2+2) *Untergruppen und Nebenklassen*

a) Gib alle Links- und Rechtsnebenklassen in der symmetrischen Gruppe S_3 modulo $H := \{\mathrm{id}, (2,3)\}$ an.

b) Seien H_1 und H_2 Untergruppen einer Gruppe G. Gelte $G = H_1 \cup H_2$. Existiere ein Element $g \in G$ mit $g \notin H_1$. Zeige, dass dann schon $G = H_2$.

Aufgabe 2. (3+1) *Ordnung von Gruppenelementen*

a) Sei $\phi : G \to H$ ein Gruppenhomomorphismus. Sei $x \in G$ ein Element endlicher Ordnung. Zeige, dass die Ordnung von $\phi(x) \in H$ ebenfalls endlich ist, und zwar ein Teiler der Ordnung von x.

b) Seien x und y Elemente einer Gruppe G. Sei die Ordnung von xy endlich. Zeige, dass auch die Ordnung von yx endlich ist.

Aufgabe 3. (2+2+2+2) *Zyklische Gruppen*

a) Sei G eine Gruppe von Primzahlordnung. Zeige, dass G genau zwei endliche Untergruppen besitzt.

b) Sei G eine zyklische Gruppe. Zeige, dass G abelsch ist.

S c) Zeige, dass die additive Gruppe der rationalen Zahlen nicht zyklisch ist.

S d) Sei G eine endliche Gruppe. Sei $\mathrm{Aut}(G)$ zyklisch. Zeige, dass G abelsch ist.

Aufgabe 4. (2+2) *Beispiele für Wirkungen*

a) Sei $\phi : G \to H$ ein Gruppenhomomorphismus. Zeige, dass durch

$$G \times H \longrightarrow H, \quad (g, h) \longmapsto g \bullet h := \phi(g)\, h$$

eine Wirkung von G auf H definiert wird. Zeige weiter, dass dies die einzige Wirkung von G auf H ist, bezüglich der ϕ zu einer G-äquivarianten Abbildung wird, wenn man G auf den Urbildbereich durch Linkstranslation wirken lässt.

S b) Zeige, dass die Gruppe $G := \mathrm{GL}_n(\mathbb{Q}) \times \mathrm{GL}_m(\mathbb{Q})$ vermöge

$$G \times \mathbb{Q}^{n \times m} \longrightarrow \mathbb{Q}^{n \times m}, \quad ((S,T), A) \longmapsto SAT^{-1}$$

auf der Menge der $(n \times m)$-Matrizen wirkt.