Universität Augsburg
Lehrstuhl für Algebra und Zahlentheorie
Prof. Marc Nieper-Wißkirchen
Ingo Blechschmidt

Wintersemester 2013/2014

Übungsblatt 3 zur Algebra II

Abgabe bis 5. November 2013, 17:00 Uhr

Aufgabe 1. (2+2) *Länge von Bahnen*

Sei G eine endliche Gruppe. Wirke G auf einer endlichen Menge X.

a) Zeige oder widerlege: Die Länge einer beliebigen Bahn der Operation ist ein Teiler der Gruppenordnung.

S b) Sei speziell $|G| = 91$ und $|X| = 71$. Zeige, dass die Operation mindestens einen Fixpunkt besitzt.

Aufgabe 2. (3+1) *Freie Wirkungen*

a) Zeige, dass eine Wirkung einer Gruppe G auf einer Menge X genau dann *frei* ist (das bedeutet, dass alle Standgruppen G_x triviale Gruppen sind), wenn folgende Abbildung injektiv ist:

$$G \times X \longrightarrow X \times X, \quad (g, x) \mapsto (gx, x)$$

b) Welche Länge haben Bahnen freier Wirkungen stets?

Aufgabe 3. (2+2) *Wirkung vermöge Konjugation*

a) Bestimme den Zentralisator von $(1, 2) \in \mathrm{S}_4$.

b) Seien H und H' zueinander konjugierte Untergruppen einer Gruppe G. Finde einen Gruppenisomorphismus $H \to H'$.

Aufgabe 4. (1+3) *Klassifikation von Wirkungen*

a) Wirke G auf Mengen $Y_1, \ldots, Y_n$. Wie kann man unter Einbeziehung der gegebenen Operationen die disjunkt-gemachte Vereinigung $Y_1 \amalg \cdots \amalg Y_n$ mit der Struktur einer G-Wirkung versehen?

b) Wirke eine endliche Gruppe G auf einer endlichen Menge X. Zeige, dass endliche Untergruppen $H_1, \ldots, H_n \subseteq G$ zusammen mit einem Isomorphismus von G-Wirkungen

$$G/H_1 \amalg \cdots \amalg G/H_n \longrightarrow X$$

existieren. Dabei wirkt G auf den Summanden G/H_i jeweils durch Linkstranslation.

Aufgabe 5. (4) *Schnitt von Normalteilern*

Sei $(N_i)_{i \in I}$ eine Familie normaler Untergruppen einer Gruppe G. Zeige, dass $N := \cap_{i \in I} N_i$ wieder ein Normalteiler in G ist.