

Übungsblatt 4 zur Algebra II

Abgabe bis 19. November 2013, 17:00 Uhr

Aufgabe 1. (2) Normaler Abschluss

Sei H eine Untergruppe einer Gruppe G . Sei $(N_i)_{i \in I}$ die Familie all derjenigen Normalteiler in G , welche H umfassen. Zeige, dass $\bigcap_{i \in I} N_i$ der kleinste Normalteiler in G ist, welcher H umfasst. (Dieser Normalteiler heißt auch *normaler Abschluss* von H in G .)

Aufgabe 2. (1+1) Urbilder unter Gruppenhomomorphismen

Sei $f : G \rightarrow H$ ein Gruppenhomomorphismus.

- a) Sei $K \subseteq H$ eine Untergruppe. Zeige, dass $f^{-1}(K)$ eine Untergruppe von G ist.
- b) Sei $N \subseteq H$ ein Normalteiler. Zeige, dass $f^{-1}(N)$ ein Normalteiler in G ist.

Aufgabe 3. (2+2+2) Beispiele für halbdirekte Produkte

- a) Zeige, dass jedes direkte Produkt zweier Gruppen auch als halbdirektes Produkt angesehen werden kann.
- b) Zeige, dass die orthogonale Gruppe $O_n(\mathbb{R})$ isomorph zu einem halbdirekten Produkt von $SO_n(\mathbb{R})$ mit C_2 ist.
- c) Zeige, dass folgende Abbildung ein injektiver Gruppenhomomorphismus ist.

$$\mathbb{R}^3 \rtimes SO_3(\mathbb{R}) \longrightarrow GL_4(\mathbb{R}), \quad (b, A) \longmapsto \left(\begin{array}{ccc|c} A & & & b \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

Aufgabe 4. (4+2) Ein Kriterium für Auflösbarkeit

- a) Sei G eine endliche Gruppe und N ein endlicher Normalteiler in G . Zeige, dass G genau dann auflösbar ist, wenn G/N und N es sind.
- b) Zeige, dass jede endliche p -Gruppe auflösbar ist.

Aufgabe 5. (2+2) Auflösbare Normalteiler

- a) Seien N und N' auflösbare Normalteiler in einer Gruppe G . Zeige, dass $N \cdot N' := \{nn' \mid n \in N, n' \in N'\}$ eine Untergruppe und sogar ein auflösbarer Normalteiler in G ist.
- b) Sei G eine endliche Gruppe. Zeige, dass ein größter endlicher auflösbarer Normalteiler in G existiert.
- c) Für Teilnehmer des Pizzaseminars: Gib kategorische Interpretationen der Konstruktionen aus a) und b) in der durch die Halbordnung der auflösbaren Normalteiler induzierten Kategorie.