

## Übungsblatt 5 zur Algebra II

Abgabe bis 19. November 2013, 17:00 Uhr

### Aufgabe 1. (2+2) *Beispiele für Sylowsche Untergruppen*

- a) Bestimme alle Sylowschen Untergruppen der alternierenden Gruppe  $A_4$ .
- b) Sei  $G$  eine endliche abelsche Gruppe. Sei  $H \subseteq G$  die Teilmenge all derjenigen Elemente von  $G$ , deren Ordnung eine  $p$ -Potenz ist. Zeige, dass  $H$  eine Untergruppe von  $G$  und sogar die einzige Sylowsche  $p$ -Untergruppe ist.

### Aufgabe 2. (1+3) *Grundlagen zu Sylowschen Untergruppen*

- a) Seien  $G$  eine endliche Gruppe und  $H \subseteq K \subseteq G$  endliche Untergruppen. Sei ferner  $H$  eine Sylowsche  $p$ -Untergruppe zu  $G$ . Zeige, dass  $H$  dann auch eine Sylowsche  $p$ -Untergruppe zu  $K$  ist.
- b) Sei  $G$  eine endliche Gruppe und  $H \subseteq G$  eine  $p$ -Untergruppe. Zeige, dass  $H$  genau dann eine Sylowsche  $p$ -Untergruppe zu  $G$  ist, wenn  $H$  maximal unter allen  $p$ -Untergruppen von  $G$  ist.

### Aufgabe 3. (3+3) *Existenz nichttrivialer Normalteiler*

- S a) Zeige, dass jede Gruppe der Ordnung 30 einen Sylowschen Normalteiler besitzt.
- S b) Zeige, dass jede Gruppe der Ordnung 56 einen Sylowschen Normalteiler besitzt.

### Aufgabe 4. (3+3) *Weitere Anwendungen der Sylowschen Sätze*

- S a) Zeige, dass jede endliche Gruppe der Ordnung 36 nicht einfach ist.
- S b) Seien  $p$  und  $q$  Primzahlen mit  $p < q$  und  $p \nmid q - 1$ . Zeige, dass jede Gruppe der Ordnung  $pq$  zyklisch ist.