Universität Augsburg
Lehrstuhl für Algebra und Zahlentheorie
Prof. Marc Nieper-Wißkirchen
Ingo Blechschmidt

Wintersemester 2013/2014

Übungsblatt 11 zur Algebra II

Abgabe bis 14. Januar 2014, 17:00 Uhr

Aufgabe 1. (4) *Körpererweiterungen ungeraden Grads*

Sei K ein Körper. Sei $K(x)$ über K eine Körpererweiterung ungeraden Grads. Zeige, dass $K(x) = K(x^2)$.

Aufgabe 2. (2+2) *Beispiele mit endlichen Körpern*

S a) Finde ein normiertes irreduzibles Polynom zweiten Grades über $\mathbb{F}_2$ und gib einen Körper mit vier Elementen an.

S b) Zerlege das Polynom $X^5 + X^4 + X^3 + X^2 + 1$ über $\mathbb{F}_3$ in irreduzible Faktoren.

Aufgabe 3. (1+3) *Beispiele mit dem Körper der rationalen Funktionen*

a) Sei K ein Körper. Sei E ein Zwischenkörper von $K(X)$ über K. Sei u ein Element von E, das nicht in K liegt. Zeige, dass X algebraisch über E ist.

b) Sei K ein faktorieller Körper und seien $g(X), h(X) \in K[X]$ teilerfremde Polynome. Sei ferner $h(X) \neq 0$ und $n := \max\{\deg g(X), \deg h(X)\} \geq 1$. Zeige, dass der Grad von $K(X)$ über $K(y)$ gerade n ist, wobei $y := \frac{g(X)}{h(X)} \in K(X)$.

Aufgabe 4. (4) *Lineare Disjunktheit*

Sei L über K eine Körpererweiterung. Eine Zwischenerweiterung E heißt genau dann *linear disjunkt* von einer weiteren Zwischenerweiterung F, falls jede endliche Familie von Elementen aus E, welche über K linear unabhängig ist, auch über F linear unabhängig ist.

Zeige: Ist E linear disjunkt von F, so ist auch F linear disjunkt von E.

Du darfst verwenden, dass jeder Untervektorraum von E, der über K endlich erzeugt ist, auch eine endliche Basis besitzt.

Aufgabe 5. (4) *Die Kronecker-Konstruktion*

Sei $f(X)$ ein Polynom über einem endlichen Körper K. Zeige, dass eine Körpererweiterung L von K existiert, über der $f(X)$ in Linearfaktoren zerfällt.