Universität Augsburg
Lehrstuhl für Algebra und Zahlentheorie
Prof. Marc Nieper-Wißkirchen
Ingo Blechschmidt

Wintersemester 2013/2014

Übungsblatt 12 zur Algebra II

Abgabe bis 21. Januar 2014, 17:00 Uhr

Aufgabe 1. (1+2+2) *Beispielrechnungen in positiver Charakteristik*

a) Finde von jedem Element aus $\mathbb{F}_7$ all seine siebten Wurzeln.

b) Sei $E := \mathbb{F}_3[X]/(X^3 + X^2 + 2)$. Schreibe $\alpha := [X] \in E$ als einen in α^3 rationalen Ausdruck über $\mathbb{F}_3$.

c) Sei K ein Körper der Charakteristik p. Sei x ein Element einer Körpererweiterung mit $K(x) = K(x^p)$. Finde ein separables Polynom über K, das x als Nullstelle hat.

Aufgabe 2. (2+2) *Vererbung von Separabilität*

Sei $L \supseteq E \supseteq K$ ein Turm von Körpererweiterungen. Zeige oder widerlege:

a) Ist ein Element aus L über K separabel, so auch über E.

b) Ist ein Element aus L über E separabel, so auch über K.

Aufgabe 3. (2+2) *Körper von nach unten beschränkter Charakteristik*

Sei K ein Körper von Charakteristik größer als eine natürliche Zahl N.

a) Zeige: Jedes irreduzibles Polynom vom Grad $\leq N$ über K ist schon separabel.

b) Sei L eine Erweiterung von K vom Grad N. Zeige: Ist K faktoriell, so auch L.

Aufgabe 4. (3+1) *Gerichteter Limes von Körpern*

Sei $(K_i)_{i \in I}$ ein gerichtetes System von Ringen. Seien alle K_i sogar Körper.

a) Zeige, dass der gerichtete Limes $L := \varinjlim_{i \in I} K_i$ ein Körper ist.

b) Zeige, dass L in kanonischer Art und Weise als Körpererweiterung eines jeden K_i aufgefasst werden kann.

Aufgabe 5. (2+1) *Separabilität irreduzibler Polynome*

Sei K ein faktorieller Körper.

a) Zeige: Genau dann ist jedes irreduzible Polynom über K auch separabel über K, wenn K vollkommen ist.

b) Welche Richtung lässt sich noch zeigen, wenn wir nicht voraussetzen wollen, dass K faktoriell ist?