Universität Augsburg
Lehrstuhl für Algebra und Zahlentheorie
Prof. Marc Nieper-Wißkirchen
Ingo Blechschmidt

Wintersemester 2013/2014

# Übungsblatt 13 zur Algebra II

Abgabe bis 28. Januar 2014, 17:00 Uhr

**Aufgabe 1.** (2+2+2) *Vervollkommnung von Ringen*

Sei $R$ ein kommutativer Ring positiver Charakteristik $p$. Der *inverse Limes* $E := \varprojlim_{i \in \mathbb{N}} R^{p^i}$ ist die Menge aller Folgen $(x_0, x_1, x_2, \ldots)$ mit $x_i \in R$ und $x_{i+1}^p = x_i$ für alle $i \in \mathbb{N}$. Durch gliedweise Addition und Multiplikation wird $E$ zu einem kommutativen Ring, genannt *Vervollkommnung von R*.

a) Zeige explizit, dass jedes Element aus $E$ eine $p$-te Wurzel besitzt.

b) Sei $R$ sogar ein Körper. Zeige, dass $E$ vermöge der kanonischen Abbildung $(x_0, x_1, \ldots) \mapsto x_0$ zu einem vollkommenen Unterkörper von $R$ wird.

c) Sei weiterhin $R$ ein Körper. Zeige, dass $E$ kanonisch isomorph zum Unterring all derjenigen Elemente von $R$ ist, die für jedes $n$ eine $p^n$-te Wurzel besitzen.

**Aufgabe 2.** (2+2) *Primkörper und Vollkommenheit in positiver Charakteristik*

Sei $K$ ein Körper positiver Charakteristik $p$.

a) Zeige, dass der Primkörper von $K$ der kleinste Unterkörper von $K$ ist.

b) Zeige, dass $K$ genau dann vollkommen ist, wenn der Frobenius ein Isomorphismus von $K$ auf sich selbst ist.

**Aufgabe 3.** (2+2) *Unterkörper endlicher Körper*

a) Gibt es in einem Körper mit 27 Elementen einen Unterkörper mit neun Elementen?

b) Sei $K$ ein Körper mit 25 Elementen. Zeige, dass in $K$ eine Quadratwurzel von 2 existiert. Gib einen Erzeuger der multiplikativen Gruppe von $K$ in der Form $a + b\sqrt{2}$ mit $a, b \in \mathbb{F}_5$ an.

**Aufgabe 4.** (2+4) *Automorphismen endlicher Körper*

Sei $q = p^n$ eine Primzahlpotenz.

a) Was ist $(X^{q^d} - X) : (X^q - X)$?

b) Sei $L$ ein Körper mit $q^d$ Elementen und $K$ sein Unterkörper mit $q$ Elementen. Zeige, dass $\mathrm{Aut}_K(L)$ von $\mathrm{Frob}^n$ erzeugt wird und $d$ Elemente besitzt.