Universität Augsburg
Lehrstuhl für Algebra und Zahlentheorie
Prof. Marc Nieper-Wißkirchen
Ingo Blechschmidt

Wintersemester 2013/2014

Übungsblatt 14 zur Algebra II

Abgabe bis 4. Februar 2014, 17:00 Uhr

Aufgabe 1. (2+2+2) *Allgemeines zu reiner Inseparabilität*

Sei L ein Körpererweiterung von K.

a) Zeige, dass die Menge der über K rein inseparablen Elemente in L eine Zwischenerweiterung von L über K ist.

b) Sei L sowohl separabel als auch rein inseparabel über K. Zeige, dass $L = K$.

c) Sei ein über K separables Element $x \in L$ und ein über K rein inseparables Element $y \in L$ gegeben. Zeige: $K(x, y) = K(x + y)$.

Aufgabe 2. (3+3) *Norm und Diskriminante*

Sei L eine endliche Körpererweiterung von K.

a) Seien die x_i die galoissch Konjugierten eines Elements $x \in L$ in einem algebraisch abgeschlossenen Oberkörper $\Omega \subseteq K$. Zeige:

$$N_{L/K}(x) = \left(\prod_{i=1}^{[L:K]_\mathrm{s}} x_i \right)^{[L:K]_\mathrm{i}}.$$

b) Sei E ein über K endlicher Zwischenkörper. Zeige:

$$\mathrm{disc}_{L/K} = N_{E/K}(\mathrm{disc}_{L/E}) \cdot (\mathrm{disc}_{E/K})^{[L:E]}.$$

Aufgabe 3. (2+2) *Erster Gehversuch mit transzendenten Erweiterungen*

Sei $L = \mathbb{Q}(X)$ und $E = \mathbb{Q}(X^3 - 2, X^6 - X^2 - 1)$.

a) Finde ein primitives Element von E über $\mathbb{Q}$.

b) Zeige, dass L eine endliche Erweiterung von E ist. Was ist der Grad?

Aufgabe 4. (2+2) *Beispiele für Spannoperationen*

Eine *Spannoperation* auf einer Menge S ist eine Vorschrift, die jeder endlichen Teilmenge $\{x_1, \ldots, x_n\}$ von S eine gewisse Teilmenge $\langle x_1, \ldots, x_n \rangle \subseteq S$ zuordnet, sodass gewisse natürliche Axiome erfüllt sind (siehe Hinweisblatt).

a) Sei V ein endlich-dimensionaler Vektorraum über einem Körper K. Für je endlich viele Vektoren $v_1, \ldots, v_n \in V$ sei $\langle v_1, \ldots, v_n \rangle$ ihr linearer Spann. Zeige, dass diese Vorschrift eine Spannoperation auf V definiert.

b) Sei L über K eine Körpererweiterung. Für je endlich viele Elemente $x_1, \ldots, x_n \in L$ sei $\langle x_1, \ldots, x_n \rangle$ die Teilmenge der Elemente aus L, welche über $K(x_1, \ldots, x_n)$ algebraisch sind. Zeige, dass diese Vorschrift eine Spannoperation auf L definiert.