Rechenregeln für Ideale

1. $(x_1, \dots, x_n) + (y_1, \dots, y_m) = (x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_m)$
2. $(x_1, \dots, x_n) \cdot (y_1, \dots, y_m) = (x_1 y_1, \dots, x_1 y_m, x_2 y_1, \dots, x_2 y_m, \dots\dots, x_n y_1, \dots, x_n y_m)$
3. Die Reihenfolge der Erzeuger spielt keine Rolle.
4. Ein Ideal ändert sich nicht, wenn man zu einem Erzeuger ein beliebiges Vielfaches eines anderen Erzeugers addiert.
5. Ist ein Erzeuger ein Vielfaches eines anderen, so kann man ihn weglassen.
6. Ein Ideal ändert sich nicht, wenn man einen Erzeuger mit einer beliebigen Einheit multipliziert.

   Ist einer der Erzeuger eine Einheit, so ist das Ideal schon das Einsideal.
7. Speziell in Bézoutschen Ringen:

$$(x_1, \dots, x_n) = (\mathrm{ggT}(x_1, \dots, x_n))$$
$$(x) \cap (y) = (\mathrm{kgV}(x, y))$$

8. Speziell in Polynomringen:

$$(f_1(X), \dots, f_n(X), X - a) = (f_1(a), \dots, f_n(a), X - a)$$

Beispiele

- in $\mathbb{Z}$: $(8, 6, 4) = (\mathrm{ggT}(8, 6, 4)) = (2)$
- in $\mathbb{Z}$: $(2, 4) \cdot (3, 6) = (2 \cdot 3, 2 \cdot 6, 4 \cdot 3, 4 \cdot 6) = (6, 12, 12, 24) = (6)$
- in $\mathbb{Z}[X]$: $(X^2 - 25, X - 3) = (3^2 - 25, X - 3) = (-16, X - 3) = (16, X - 3)$
- in $\mathbb{Q}$: $(8, 6, 4) = (1) = (2) = (3173)$
- in $\mathbb{R}[X]$: $(X^2 - 25, X - 3) = (3^2 - 25, X - 3) = (-16, X - 3) = (1)$