Universität Augsburg Lehrstuhl für Algebra und Zahlentheorie

Skript

Kommutative Algebra

Marc A. Nieper-Wißkirchen*

7. März 2016
http://www.math.uni-augsburg.de/alg

Inhaltsverzeichnis

*marc.nieper-wisskirchen@math.uni-augsburg.de

Teil I.
Ringe und Ideale

1. Ringe und Ringhomomorphismen

1.1. Ringe

Definition 1.1. Ein *Ring* A ist eine Menge mit zwei ausgezeichneten Elementen, 0 und 1, und zwei binären Operationen $+$ und $\cdot$, so daß

1. $(A, +, 0)$ eine abelsche Gruppe ist,
2. $(A, \cdot, 1)$ ein Monoid ist und
3. die Multiplikation distributiv über die Addition ist, also $x(y+z) = xy + xz$ und $(y+z)x = yx + zx$ für alle $x, y, z \in A$.

Der Ring heißt *kommutativ*, falls $(A, \cdot, 1)$ ein kommutatives Monoid ist.

Wir nennen $(A, +, 0)$ die *abelsche Gruppe von* A und $(A, \cdot, 1)$ das *multiplikative Monoid von* A.

Sei A ein Ring.

Proposition 1.2. *Sei $x \in A$. Dann ist $0 \cdot x = 0$.*

Beweis. $0 \cdot x = 0 \cdot x + 0 \cdot x - 0 \cdot x = (0+0) \cdot x - 0 \cdot x = 0 \cdot x - 0 \cdot x = 0.$ □

Folgerung 1.3. *Sei $x \in A$. Dann ist $(-1) \cdot x = -x$.*

Beweis. $x + (-1) \cdot x = 1 \cdot x + (-1) \cdot x = (1-1) \cdot x = 0 \cdot x = 0.$ □

Eine Menge A mit zwei ausgezeichneten Elementen 0 und 1 und zwei binären Operationen $+$ und $\cdot$ ist also genau dann ein Ring, falls für alle $x, y, z \in A$ gilt:

$$
\begin{aligned}
x + (y + z) &= (x + y) + z; & & \\
y + x &= x + y; & & \\
0 + x &= x; & & \\
\exists (-x) \in A\colon\; -x + x &= 0; & & \\
x(yz) &= (xy)z; & & \\
1 \cdot x &= x; & x \cdot 1 &= x; \\
x(y+z) &= xy + xz; & (y+z)x &= yx + zx; \\
0 \cdot x &= 0; & x \cdot 0 &= 0.
\end{aligned}
$$

Beispiel 1.4. Die ganzen Zahlen $\mathbb{Z}$ bilden einen kommutativen Ring. Dieser Ring ist grundlegend für die algebraische Zahlentheorie.

Beispiel 1.5. Der Polynomring $K[x_1, \ldots, x_n]$ in n Variablen über einem Körper K ist ein kommutativer Ring. Diese Ringe sind grundlegend für die algebraische Geometrie.

Bei der Definition eines Ringes ist $0 = 1$ nicht ausgeschlossen worden:

Beispiel 1.6. Gilt $0 = 1$ in einem Ring A, folgt $x = 1 \cdot x = 0 \cdot x = 0$ für alle $x \in A$. Damit ist $A = \{0\}$. Ein solcher Ring heißt der *Nullring* und wird mit 0 bezeichnet.

1.2. Unterringe

Definition 1.7. Eine Teilmenge B eines Ringes A heißt *Unterring von A*, falls B eine Untergruppe der abelschen Gruppe von A und ein Untermonoid des multiplikativen Monoides von A ist.

Wir betrachten B auf offensichtliche Weise wieder als Ring. Eine Teilmenge B von A ist also genau dann ein Unterring, falls für alle $x, y \in B$ gilt:

$$\begin{aligned} x + y &\in B; \\ -x &\in B; \\ 0 &\in B; \\ xy &\in B; \\ 1 &\in B. \end{aligned}$$

Beispiel 1.8. Die ganzen Zahlen $\mathbb{Z}$ bilden einen Unterring der rationalen Zahlen $\mathbb{Q}$.

Beispiel 1.9. Wir können einen Körper K als Unterring des Ringes $K[x]$ der Polynome in einer Variablen über K auffassen.

Beispiel 1.10. Der (bezüglich der Inklusionsordnung) größte Unterring eines Ringes A ist der Ring A selbst.

Proposition 1.11. *Ist $(B_i)_{i \in I}$ eine Familie von Unterringen eines Ringes A, so ist der Schnitt $\bigcap_{i \in I} B_i$ ein Unterring von A.*

Beweis. Da die B_i jeweils 0 und 1 enthalten und jeweils abgeschlossen unter Addition und Multiplikation sind, folgt, daß auch der Schnitt 0 und 1 enthält und abgeschlossen unter Addition und Multiplikation ist. $\square$

Konstruktion 1.12. *Sei S eine Teilmenge eines Ringes A. Dann ist der Schnitt aller Unterringe von A, welche S enthalten, der kleinste Unterring von A, welcher S enthält.* $\square$

1.3. Ringhomomorphismen

Definition 1.13. Ein *Ringhomomorphismus* ϕ ist eine Abbildung $\phi\colon A \to B$ zwischen zwei Ringen, welche einen Homomorphismus zwischen den abelschen Gruppen und einen Homomorphismus zwischen den multiplikativen Monoiden von A und B induziert.

Eine Abbildung $\phi\colon A \to B$ ist also genau dann ein Ringhomomorphismus, falls für alle $x, y \in A$ gilt:

$$\begin{aligned} \phi(x+y) &= \phi(x) + \phi(y); && \qquad (*) \\ \phi(0) &= 0 && \text{(folgt schon aus } (*)); \\ \phi(xy) &= \phi(x)\phi(y); \\ \phi(1) &= 1. \end{aligned}$$

Beispiel 1.14. Die Identität id_A eines Ringes ist ein Ringhomomorphismus.

Beispiel 1.15. Die Inklusion $B \hookrightarrow A$ eines Unterrings ist ein Ringhomomorphismus.

Proposition 1.16. *Seien $\phi\colon A \to B$ und $\psi\colon B \to C$ Ringhomomorphismen. Dann ist $\psi \circ \phi\colon A \to C$ ein Ringhomomorphismus.*

Beweis. Die Verknüpfung zweier Gruppen- bzw. Monoidhomomorphismen ist wieder ein Gruppen- bzw. Monoidhomomorphismus. □

Seien A und B zwei Ringe und $\phi\colon A \to B$ eine Abbildung.

Proposition 1.17. *Sei $\pi\colon C \twoheadrightarrow A$ ein surjektiver Ringhomomorphismus. Ist dann $\phi \circ \pi\colon C \to B$ ein Ringhomomorphismus, so auch $\phi\colon A \to B$.*

Beweis. Seien $a, a' \in A$. Dann existieren $c, c' \in C$ mit $\pi(c) = a$ und $\pi(c') = a'$. Es folgt $\phi(aa') = \phi(\pi(c)\pi(c')) = \phi(\pi(cc')) = \phi(\pi(c))\phi(\pi(c')) = \phi(a)\phi(a')$. Analog erhält ϕ auch Addition, 0 und 1. □

Proposition 1.18. *Sei $\iota\colon B \hookrightarrow C$ ein injektiver Ringhomomorphismus. Ist dann $\iota \circ \phi\colon A \to C$ ein Ringhomomorphismus, so auch $\phi\colon A \to B$.* □

Sei $\phi\colon A \to B$ ein Ringhomomorphismus.

Definition 1.19. Der Homomorphismus ϕ heißt *Isomorphismus*, falls ein Ringhomomorphismus $\check{\phi}\colon B \to A$ existiert, so daß $\check{\phi} \circ \phi = \mathrm{id}_A$ und $\phi \circ \check{\phi} = \mathrm{id}_B$.

Proposition 1.20. *Ist $\phi\colon A \to B$ eine bijektive Abbildung, so ist ϕ schon ein Isomorphismus.*

Beweis. Da $\mathrm{id}_B = \phi \circ \phi^{-1}$ ein Ringhomomorphismus ist und ϕ ein injektiver Ringhomomorphismus ist, ist auch ϕ^{-1} ein Ringhomomorphismus. □

1.4. Bezeichnungen

Konvention 1.21. Ringe bezeichnen wir mit großen lateinischen Buchstaben $A, B, C, \ldots$, Ringelemente mit kleinen lateinischen Buchstaben $a, b, c, f, g, h, x, y, z, \ldots$.

Betrachten wir einen Ring als Rechenbereich, nennen wir seine Elemente auch *Zahlen*. Betrachten wir einen Ring als Algebra von Funktionen auf einem Raum, heißen die Ringelemente entsprechend *Funktionen*.

Konvention 1.22. Ringhomomorphismen bezeichnen wir mit kleinen griechischen Buchstaben $\phi, \psi, \ldots$.

2. Ideale und Quotientenringe

2.1. Ideale

Definition 2.1. Eine Teilmenge $\mathfrak{a}$ eines Ringes A heißt *(beidseitiges) Ideal von* A, falls

1. $\mathfrak{a}$ eine Untergruppe der abelschen Gruppe von A ist und
2. $\mathfrak{a}$ abgeschlossen unter der Multiplikation mit Elementen aus A ist, also $xa \in \mathfrak{a}$ und $ax \in \mathfrak{a}$ für alle $a \in \mathfrak{a}$ und $x \in A$.

Bemerkung 2.2. Im allgemeinen ist ein Ideal kein Unterring und ein Unterring kein Ideal.

Eine Teilmenge $\mathfrak{a}$ von A ist genau dann ein Ideal, falls für alle $a, a' \in \mathfrak{a}$ und $x \in A$ gilt:

$$\begin{aligned} a + a' &\in \mathfrak{a}; & 0 &\in \mathfrak{a}; \\ xa &\in \mathfrak{a}; & ax &\in \mathfrak{a}. \end{aligned}$$

Proposition 2.3. *Ist $(\mathfrak{a}_i)_{i \in I}$ eine Familie von Idealen eines Ringes A, so ist der Schnitt $\bigcap\limits_{i \in I} \mathfrak{a}_i$ ein Ideal von A.* □

Definition 2.4. Sei $(f_i)_{i \in I}$ eine Familie von Elementen eines Ringes A. Dann heißt der Schnitt $(f_i \mid i \in I)$ aller Ideale von A, welche jedes f_i enthalten, das *von der Familie $(f_i)_{i \in I}$ erzeugte Ideal in A*.

Proposition 2.5. *Das von einer Familie von Elementen in einem Ring A erzeugte Ideal ist das kleinste Ideal in A, welches jedes Element der Familie enthält.* □

Beispiel 2.6. Sei $(f_i)_{i \in I}$ eine Familie von Elementen in einem kommutativen Ring A. Dann ist $(f_i \mid i \in I) = \left\{ \sum\limits_{k=1}^{n} a_k f_{i_k} \mid a_k \in A, i_k \in I \right\}$.

Beispiel 2.7. Sei $n \in \mathbb{Z}$ eine ganze Zahl. Dann ist das Ideal (n) die Menge der durch n teilbaren Zahlen.

Beispiel 2.8. Das *Nullideal* (0) ist das kleinste Ideal in einem Ring, denn $(0) = \{0\}$.

Beispiel 2.9. Das *Einsideal* (1) ist das größte Ideal in einem Ring A, denn $(1) = A$.

2.2. Bild und Kern

Sei $\phi\colon A \to B$ ein Ringhomomorphismus.

Proposition 2.10. *1. Für jedes Ideal $\mathfrak{b}$ von B ist $\mathfrak{a} := \phi^{-1}(\mathfrak{b})$ ein Ideal von A.*

2. Für jeden Unterring A' von A ist $\phi(A')$ ein Unterring von B.

Beweis. 1. Als Urbild einer Untergruppe unter einem Gruppenhomomorphismus ist $\mathfrak{a}$ eine Untergruppe der abelschen Gruppe von A.

2. Für $a \in \mathfrak{a}$ und $x \in A$ ist $\phi(xa) = \phi(x)\phi(a) \in \mathfrak{b}$, also $xa \in \mathfrak{a}$. Analog ist $ax \in \mathfrak{a}$.

3. Bilder von Untergruppen bzw. -monoiden unter Gruppen- bzw. Monoidhomomorphismen sind Untergruppen bzw. -monoide. □

Sei $\phi\colon A \to B$ ein Ringhomomorphismus.

Beispiel 2.11. Das mengentheoretische Bild $\phi(A)$ von ϕ ist ein Unterring von B.

Beispiel 2.12. Das Urbild $\phi^{-1}((0)) = \{x \in A \mid \phi(x) = 0\}$ des Nullideals von B ist ein Ideal von A.

Definition 2.13. Das Ideal $\phi^{-1}((0))$ heißt der *Kern* $\ker\phi$ *von* ϕ.

Proposition 2.14. *Der Homomorphismus ϕ ist genau dann injektiv, wenn* $\ker\phi = (0)$. □

2.3. Quotientenringe

Proposition 2.15. *Sei $\mathfrak{a}$ ein Ideal eines Ringes A. Dann gibt es genau eine Ringstruktur auf der Menge $A/\mathfrak{a}$ der $\mathfrak{a}$-Nebenklassen, so daß die kanonische Abbildung $\pi\colon A \twoheadrightarrow A/\mathfrak{a}, x \mapsto [x] := x + \mathfrak{a}$ ein Ringhomomorphismus ist.*

Beweis. 1. Auf $A/\mathfrak{a}$ existiert genau eine Struktur einer abelschen Gruppe, so daß π ein Gruppenhomomorphismus abelscher Gruppen wird.

2. Da $\pi((x+a)(y+a')) = \pi(xy + xa' + ay + aa') = \pi(xy)$ für $x, y \in A$ und $a, a' \in \mathfrak{a}$, gibt es auf $A/\mathfrak{a}$ genau eine Multiplikation, welche von π respektiert wird, nämlich $(x + \mathfrak{a})(y + \mathfrak{a}) = xy + \mathfrak{a}$.

3. Schließlich muß die Eins in $A/\mathfrak{a}$ das Bild von $1 \in A$ unter π sein.

4. Da π surjektiv ist, folgen die Ringaxiome für $A/\mathfrak{a}$ aus denen für A. □

Sei A ein Ring.

Beispiel 2.16. Seien $\mathfrak{a}$ ein Ideal und $\pi\colon A \twoheadrightarrow A/\mathfrak{a}$ der kanonische Homomorphismus. Dann ist $\ker\pi = \mathfrak{a}$.

Beispiel 2.17. Ist $x \in A$ ein Element, so ist $x = 0$ genau dann, wenn der kanonische Homomorphismus $A \twoheadrightarrow A/(x)$ injektiv ist.

Seien $\mathfrak{a}$ ein Ideal in einem Ring A und $\pi\colon A \twoheadrightarrow A/\mathfrak{a}$ der kanonische Homomorphismus.

Definition 2.18. Der Ring $A/\mathfrak{a}$ heißt der *Quotientenring von A nach $\mathfrak{a}$*.

Proposition 2.19. *Durch $\mathfrak{x} = \pi^{-1}(\bar{\mathfrak{x}})$ wird eine bijektive ordnungserhaltende Korrespondenz zwischen den Idealen $\mathfrak{x}$ von A mit $\mathfrak{x} \supset \mathfrak{a}$ und den Idealen $\bar{\mathfrak{x}}$ von $A/\mathfrak{a}$ gegeben.*

Beweis.
1. Ist $\mathfrak{y}$ ein Ideal von A, so ist $\bar{\mathfrak{y}} \coloneqq \pi(\mathfrak{y})$ ein Ideal von $A/\mathfrak{a}$, da π surjektiv ist.
2. Es ist $\pi^{-1}(\bar{\mathfrak{y}}) = \mathfrak{y} + \mathfrak{a}$. □

Proposition 2.20 (Homomorphiesatz für Ringe)**.** *Sei $\phi\colon A \to B$ ein Homomorphismus von Ringen. Dann gibt es einen Ringisomorphismus $\underline{\phi}\colon A/\ker\phi \to \phi(A),\ [x] \mapsto \phi(x)$.*

Beweis.
1. Nach dem Homomorphiesatz für abelsche Gruppen wird durch $[x] \mapsto \phi(x)$ ein Gruppenisomorphismus definiert.
2. Da die kanonische Abbildung $\pi\colon A \to A/\ker\phi$ surjektiv ist und π und $\underline{\phi} \circ \pi = \phi$ Ringhomomorphismen sind, ist auch $\underline{\phi}$ ein Ringhomomorphismus. □

Bemerkung 2.21. Ideale sind also genau diejenigen Teilmengen von Ringen, welche Kerne von surjektiven Homomorphismen sind.

2.4. Bezeichnungen

Konvention 2.22. Ideale bezeichnen wir mit kleinen deutschen Buchstaben $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c}, \ldots$.

Sei $\mathfrak{a}$ ein Ideal in einem Ring A. Sei $x \in A$. Die Nebenklasse $[x] \in A/\mathfrak{a}$ von x bezeichnen wir häufig wieder mit x, eventuell mit dem Zusatz „in $A/\mathfrak{a}$“ oder „modulo $\mathfrak{a}$“. Anstelle von $[x] = 0$ sagen wir etwa, daß „$x = 0$ in $A/\mathfrak{a}$“ oder „$x = 0$ modulo $\mathfrak{a}$“.

3. Nullteiler, nilpotente Elemente und Einheiten

3.1. Integritätsbereiche

Sei x ein Element eines kommutativen Ringes A.

Definition 3.1.
1. Das Element x heißt *regulär*, falls für alle $y \in A$ aus $xy = 0$ schon $y = 0$ folgt.
2. Ein Element x ist ein *Nullteiler*, wenn es nicht regulär ist.
3. Der Ring A heißt ein *Integritätsbereich*, falls $\{0\}$ der einzige Nullteiler in A ist.

Das Element x ist also genau dann ein Nullteiler, falls ein $y \in A$ mit $y \neq 0$, aber $xy = 0$ existiert. Der Ring A ist weiter genau dann ein Integritätsbereich, wenn $0 \neq 1$ in A und aus $xy = 0$ für $x, y \in A$ schon $x = 0$ oder $y = 0$ folgt.

Proposition 3.2. *Sei $\phi\colon A \to B$ ein injektiver Homomorphismus kommutativer Ringe. Ist dann B ein Integritätsbereich, so auch A.*

Beweis. Sei also B ein Integritätsbereich. Da $0 \neq 1$ in B, muß wegen $\phi(0) = 0$ und $\phi(1) = 1$ auch $0 \neq 1$ in A gelten. Seien weiter $f, g \in A$ mit $fg = 0$ gegeben. Es folgt $\phi(fg) = 0$ in B. Damit ist $\phi(f) = 0$ oder $\phi(g) = 0$. Da ϕ injektiv ist, folgt dann $f = 0$ oder $g = 0$. □

Beispiel 3.3. Der Nullring ist kein Integritätsbereich, denn die Null ist im Nullring regulär.

Beispiel 3.4. Der Ring $\mathbb{Z}$ der ganzen Zahlen ist ein Integritätsbereich.

Sei K ein Körper.

Beispiel 3.5. Der Polynomring $K[x_1, \ldots, x_n]$ in n Variablen über einem Körper K ist ein Integritätsbereich.

Beispiel 3.6. Der Ring $A \coloneqq K[x, y]/(xy)$ ist kein Integritätsbereich, da zum Beispiel x und y Nullteiler in A sind.

Definition 3.7.
1. Ein Ideal $\mathfrak{a}$ in einem kommutativen Ring A heißt *Hauptideal*, falls $\mathfrak{a} = (a)$ für ein $a \in A$.
2. Ein Integritätsbereich A heißt *Hauptidealbereich*, falls jedes Ideal in A ein Hauptideal ist.

Sei K ein Körper.

Beispiel 3.8. Die Ringe $\mathbb{Z}$ und $K[x]$ sind Hauptidealbereiche.

Bemerkung 3.9. Für $n \geq 2$ ist $K[x_1, \ldots, x_n]$ kein Hauptidealbereich. Das Ideal $(x_1, \ldots, x_n)$ läßt sich nicht von weniger als n Elementen erzeugen.

3.2. Nilpotente Elemente

Definition 3.10. Ein Element $x \in A$ eines kommutativen Ringes A heißt *nilpotent*, falls ein $n \in \mathbb{N}_0$ mit $x^n = 0$ existiert.

Beispiel 3.11. In jedem kommutativen Ring ist 0 ein nilpotentes Element.

Proposition 3.12. *Ist A ein Integritätsbereich, so ist 0 das einzige nilpotente Element von A.*

Beweis. Sei $x \in A$ nilpotent und $n \in \mathbb{N}_0$ die kleinste natürliche Zahl mit $x^n = 0$. Dann ist $n \geq 1$. Aus $x \cdot x^{n-1} = 0$ und $x^{n-1} \neq 0$ folgt dann $x = 0$. □

Beispiel 3.13. Sei K ein Körper. Im Ring $K[x]/(x^2)$ ist x ein nilpotentes Element.

Beispiel 3.14. Sei $\phi\colon A \to B$ ein Homomorphismus von Ringen. Sei a ein nilpotentes Element von A. Dann ist $\phi(a)$ ein nilpotentes Element von B.

3.3. Einheiten

Sei $x \in A$ ein Element eines Ringes.

Definition 3.15. 1. Das Element x heißt *Einheit in A*, falls x Einheit des multiplikativen Monoides von A ist.

2. Die Untergruppe $A^\times$ im multiplikativen Monoid von A, die von den Einheiten in A gebildet wird, heißt die *Einheitengruppe von A*.

3. Der Ring A heißt *Schiefkörper*, falls $\{0\}$ die einzige Nichteinheit in A ist. Ein kommutativer Schiefkörper heißt *Körper*.

Das Element x ist also genau dann eine Einheit, falls ein $y \in A$ mit $xy = 1 = yx$ existiert, nämlich die *Inverse* $y = x^{-1}$ von x.

Beispiel 3.16. Der Nullring ist kein Körper, denn die Null ist im Nullring invertierbar.

Beispiel 3.17. Die Einheitengruppe des Ringes $\mathbb{Z}$ der ganzen Zahlen ist $\mathbb{Z}^\times = \{1, -1\}$. Insbesondere bilden die ganzen Zahlen keinen Körper.

Beispiel 3.18. Die Einheitengruppe des Ringes $\mathbb{Q}$ der rationalen Zahlen ist $\mathbb{Q}^\times = \mathbb{Q} \setminus \{0\}$. Damit ist $\mathbb{Q}$ ein Körper.

Beispiel 3.19. Sei $a \in A$ ein Element eines kommutativen Ringes. In $A[x]/(xa - 1)$ ist a eine Einheit mit Inverse x.

Beispiel 3.20. Seien $a, b \in A$ Elemente eines kommutativen Ringes, so daß ab eine Einheit ist. Dann ist auch a eine Einheit mit $a^{-1} = b(ab)^{-1}$.

Sei $x \in A$ ein Element eines kommutativen Ringes A.

Proposition 3.21. *Das Element x ist genau dann eine Einheit, falls $(x) = (1)$.*

Beweis. Es ist $1 = x^{-1} \cdot x \in (x)$ und damit $(1) \subset (x)$, also $(1) = (x)$, falls x Einheit ist. Die umgekehrte Implikation ist ebenso klar. □

Proposition 3.22. *Ist x eine Einheit, ist x auch regulär.*

Beweis. Sei $x \cdot y = 0$ für ein $y \in A$. Multiplizieren mit x^{-1} von links liefert $y = 0$. □

3.4. Charakterisierung von Körpern

Hilfssatz 3.23. *Sei A ein Körper. Dann besitzt A genau zwei Ideale (nämlich (0) und (1)).*

Beweis. Sei A ein Körper. Da 0 keine Einheit ist, ist $(0) \neq (1)$. Sei jetzt $\mathfrak{a} \neq (0)$ ein Ideal in A. Dann existiert ein $x \in \mathfrak{a}$ mit $x \neq 0$, also $x \in A^\times$. Es folgt $(1) = (x) \subset \mathfrak{a}$, also $\mathfrak{a} = (1)$. □

Hilfssatz 3.24. *Sei $\phi\colon A \to B$ ein Ringhomomorphismus kommutativer Ringe. Besitze A genau zwei Ideale. Dann ist ϕ genau dann injektiv, wenn B nicht der Nullring ist.*

Beweis. 1. Sei $\ker \phi = (0)$. Dann ist ϕ injektiv. Weiter ist $1 = \phi(1) \neq 0 \in B$, da $1 \notin (0) \subset A$, also ist B nicht der Nullring.

2. Sei $\ker \phi = (1)$. Dann ist ϕ nicht injektiv, da $(1) \neq (0) \subset A$. Weiter ist $1 = \phi(1) = 0 \in B$, also ist B der Nullring. □

Hilfssatz 3.25. *Sei A ein kommutativer Ring, so daß jeder Ringhomomorphismus $\phi\colon A \to B$ in einen weiteren kommutativen Ring B genau dann injektiv ist, wenn B nicht der Nullring ist. Dann ist A ein Körper.*

Beweis. Sei $x \in A$. Dann gilt: $x \in A^\times \iff A/(x) = 0 \iff \ker(A \twoheadrightarrow A/(x)) \neq 0 \iff x \neq 0$. □

Zusammengefaßt haben wir also gezeigt:

Proposition 3.26. *Sei A ein kommutativer Ring. Dann sind die folgenden Aussagen äquivalent:*

1. *A ist ein Körper.*
2. *A besitzt genau zwei Ideale (nämlich (0) und (1)).*
3. *Ein Ringhomomorphismus $A \to B$ in einen kommutativen Ring B ist genau dann injektiv, wenn B nicht der Nullring ist.*

4. Primideale und maximale Ideale

4.1. Primideale

Seien $\mathfrak{p}, \mathfrak{m}$ zwei Ideale eines kommutativen Ringes A.

Definition 4.1. 1. Das Ideal $\mathfrak{p}$ von A heißt *prim*, falls $1 \notin \mathfrak{p}$ und falls aus $ab \in \mathfrak{p}$ für $a, b \in A$ schon $a \in \mathfrak{p}$ oder $b \in \mathfrak{p}$ folgt.

2. Das Ideal $\mathfrak{m}$ von A heißt *maximal*, falls für jedes Ideal $\mathfrak{a}$ von A mit $\mathfrak{a} \supset \mathfrak{m}$ *entweder* $\mathfrak{a} = \mathfrak{m}$ *oder* $\mathfrak{a} = (1)$ gilt.

Proposition 4.2. *Das Ideal $\mathfrak{p}$ ist genau dann prim, wenn $A/\mathfrak{p}$ ein Integritätsbereich ist.* □

Beispiel 4.3. Das Nullideal ist genau dann prim, wenn A ein Integritätsbereich ist.

Beispiel 4.4. Jedes Ideal in $\mathbb{Z}$ ist von der Form (m) mit $m \geq 0$. Das Ideal (m) ist genau dann prim, falls $m = 0$ oder m eine Primzahl ist. Im Falle, daß p eine Primzahl ist, ist (p) ein maximales Ideal.

Beispiel 4.5. Sei $f \in A := K[x_1, \dots, x_n]$ ein irreduzibles Polynom über dem Körper K. Da A ein faktorieller Ring ist, ist (f) ein Primideal von A.

Das Ideal $(x_1, \dots, x_n)$ ist ein maximales Ideal in A.

Proposition 4.6. *Sei $\mathfrak{a}$ ein Ideal eines kommutativen Ringes A und $\pi\colon A \to A/\mathfrak{a}$ der kanonische Homomorphismus. Durch $\mathfrak{p} = \pi^{-1}(\bar{\mathfrak{p}})$ wird eine bijektive ordnungserhaltende Korrespondenz zwischen den Primidealen $\mathfrak{p}$ von A mit $\mathfrak{p} \supset \mathfrak{a}$ und den Primidealen $\bar{\mathfrak{p}}$ von $A/\mathfrak{a}$ gegeben.* □

Proposition 4.7. *Sei $\mathfrak{p}$ ein Primideal in einem Hauptidealbereich A. Ist $\mathfrak{p} \neq (0)$, so ist $\mathfrak{p}$ ein maximales Ideal.*

Beweis.
1. Sei $\mathfrak{p} = (p)$ mit $p \neq 0$. Sei $(q) \supset (p)$. Wir müssen zeigen, daß q eine Einheit ist oder daß $(q) = (p)$.
2. Da $(q) \supset (p)$, existiert ein $x \in A$ mit $p = xq$.
3. Aus $xq \in (p)$ folgt $x \in (p)$ oder $q \in (p)$.
4. Sei $x \in (p)$. Dann existiert ein $y \in A$ mit $x = yp$, also $p = yqp$. Da $p \neq 0$, folgt $yq = 1$. Also ist q eine Einheit.
5. Sei $q \in (p)$. Dann ist $(q) \subset (p)$ und damit $(q) = (p)$. □

4.2. Maximale Ideale

Sei A ein kommutativer Ring.

Proposition 4.8. *Sei $\mathfrak{a}$ ein Ideal von A und $\pi\colon A \to A/\mathfrak{a}$ der kanonische Homomorphismus. Durch $\mathfrak{m} = \pi^{-1}(\bar{\mathfrak{m}})$ wird eine bijektive ordnungserhaltende Korrespondenz zwischen den maximalen Idealen $\mathfrak{m}$ von A mit $\mathfrak{m} \supset \mathfrak{a}$ und den maximalen Idealen $\bar{\mathfrak{m}}$ von $A/\mathfrak{a}$ gegeben.* □

Proposition 4.9. *Ein Ideal $\mathfrak{m}$ von A ist genau dann maximal, wenn $A/\mathfrak{m}$ ein Körper ist.* □

Folgerung 4.10. *Jedes maximale Ideal von A ist prim.* □

Satz 4.11. *Ein Ring A besitzt genau dann ein maximales Ideal, wenn A nicht der Nullring ist.*

Beweis.
1. Ein maximales Ideal von A ist gerade ein maximales Element des Systems $\mathfrak{A}$ aller Ideale $\mathfrak{a}$ von A mit $\mathfrak{a} \neq (1)$ bezüglich der Inklusionsordnung.
2. Jede Kette $\mathfrak{C}$ in $\mathfrak{A}$ besitzt eine obere Schranke in $\mathfrak{A}$, nämlich $\bigcup \mathfrak{C}$.
3. Nach dem Zornschen Lemma besitzt $\mathfrak{A}$ damit genau dann ein maximales Element, falls $\mathfrak{A}$ nicht leer ist.
4. Das System $\mathfrak{A}$ ist genau nicht leer, wenn A nicht der Nullring ist, denn dann ist $(0) \in \mathfrak{A}$. □

Sei A ein kommutativer Ring.

Folgerung 4.12. *Sei $\mathfrak{a}$ ein Ideal von A. Dann existiert genau dann ein maximales Ideal $\mathfrak{m}$ von A mit $\mathfrak{a} \subset \mathfrak{m}$, wenn $\mathfrak{a} \neq (1)$.*

Beweis. Der Ring $A/\mathfrak{a}$ besitzt genau dann ein maximales Ideal, wenn $\mathfrak{a} \neq (1)$. Ein solches maximales Ideal entspricht einem maximalen Ideal $\mathfrak{m}$ von A mit $\mathfrak{m} \supset \mathfrak{a}$. □

Folgerung 4.13. *Ein Element x von A liegt genau dann in einem maximalen Ideal von A, wenn x keine Einheit ist.* □

4.3. Lokale Ringe

Definition 4.14. Ein *lokaler Ring A* ist ein kommutativer Ring mit genau einem maximalen Ideal $\mathfrak{m}$. Der Körper $A/\mathfrak{m}$ ist der *Restklassenkörper von A*.

Beispiel 4.15. Körper sind lokale Ringe.

Notation 4.16. Ist A ein lokaler Ring mit maximalem Ideal $\mathfrak{m}$ und Restklassenkörper F, so schreiben wir häufig $(A, \mathfrak{m})$ oder $(A, \mathfrak{m}, F)$ für A.

Die folgende Definition verallgemeinert den Begriff des lokalen Ringes.

Definition 4.17. Ein *halblokaler Ring A* ist ein kommutativer Ring mit nur endlich vielen maximalen Idealen.

Proposition 4.18. *Sei $\mathfrak{m}$ ein Ideal eines kommutativen Ringes A, so daß $A \setminus \mathfrak{m} = A^\times$. Dann ist $(A, \mathfrak{m})$ ein lokaler Ring.*

Beweis. Sei $\mathfrak{a} \neq (1)$ ein Ideal von A. Wegen $1 \neq \mathfrak{a}$ enthält $\mathfrak{a}$ keine Einheiten. Also ist $\mathfrak{a} \subset A \setminus A^\times = \mathfrak{m}$. Folglich ist $\mathfrak{m}$ ein maximales Ideal und das einzige. □

Proposition 4.19. *Sei $\mathfrak{m}$ ein maximales Ideal eines kommutativen Ringes A, so daß jedes Element von $1 + \mathfrak{m}$ eine Einheit in A ist. Dann ist A ein lokaler Ring.*

Beweis.

1. Wir zeigen, daß $A \setminus \mathfrak{m} = A^\times$. Sei dazu $x \in A \setminus \mathfrak{m}$.
2. Da $\mathfrak{m}$ ein maximales Ideal ist, ist das von $\mathfrak{m}$ und x aufgespannte Ideal das Einsideal.
3. Damit existieren ein $y \in A$ und ein $t \in \mathfrak{m}$ mit $xy + t = 1$, also $xy = 1 - t \in 1 + \mathfrak{m}$.
4. Nach Voraussetzung ist xy damit eine Einheit. Folglich ist auch $x \in A^\times$. □

4.4. Bezeichnungen

Konvention 4.20. Primideale bezeichnen wir mit kleinen deutschen Buchstaben $\mathfrak{p}, \mathfrak{q}, \ldots$.

Konvention 4.21. Maximale Ideale bezeichnen wir mit kleinen deutschen Buchstaben $\mathfrak{m}, \mathfrak{n}, \ldots$.

5. Das Nil- und das Jacobsonsche Radikal

5.1. Das Nilradikal

Proposition 5.1. *Sei A ein kommutativer Ring. Die Menge $\mathfrak{n}$ der nilpotenten Elemente von A ist ein Ideal, das Nilradikal von A. Der Ring $A/\mathfrak{n}$ hat außer 0 keine nilpotenten Elemente.*

Beweis. 1. Es ist $0 \in \mathfrak{n}$. Ist $x \in \mathfrak{n}$ und $a \in A$, so ist auch $ax \in \mathfrak{n}$, denn $(ax)^n = a^n x^n = 0$ für $n \gg 0$.

2. Seien $x, y \in \mathfrak{n}$, etwa $x^m = 0$ und $y^n = 0$ für $n, m \geq 0$. Nach dem in jedem kommutativen Ring gültigen Binomialsatz ist dann $(x+y)^{m+n-1} = \sum\limits_{r+s=m+n-1} \binom{m+n-1}{r} x^r y^s = 0$. Also folgt $x + y \in \mathfrak{n}$.

3. Sei $x \in A$. Sei x nilpotent in $A/\mathfrak{n}$, das heißt $x^n \in \mathfrak{n}$ für $n \gg 0$. Nach Definition von $\mathfrak{n}$ ist $x^{kn} = (x^n)^k = 0$ für $k \gg 0$. Folglich ist auch $x \in \mathfrak{n}$. Damit ist $x = 0$ in $A/\mathfrak{n}$. □

Proposition 5.2. *Das Nilradikal $\mathfrak{n}$ eines kommutativen Ringes A ist der Schnitt $\bigcap \mathfrak{p}$ aller seiner Primideale.*

Beweis. 1. Sei $f \in \mathfrak{n}$, also $f^n = 0$ für $n \gg 0$. Ist $\mathfrak{p}$ ein Primideal, so folgt aus $f^n = 0 \in \mathfrak{p}$ schon $f \in \mathfrak{p}$, also $f \in \bigcap \mathfrak{p}$.

2. Sei umgekehrt $f \notin \mathfrak{n}$. Sei $\mathfrak{A}$ die Menge der Ideale $\mathfrak{a}$ von A mit $f^n \notin \mathfrak{a}$ für alle $n \geq 0$. Da $(0) \in \mathfrak{A}$, besitzt $\mathfrak{A}$ nach dem Zornschen Lemma ein maximales Element $\mathfrak{p} \neq (1)$. Insbesondere $f \notin \mathfrak{p}$.

3. Es reicht dann zu zeigen, daß $\mathfrak{p}$ prim ist. Dazu seien $x, y \in A \setminus \mathfrak{p}$ gegeben. Nach Maximalität von $\mathfrak{p}$ ist f^m im von $\mathfrak{p}$ und x aufgespannten Ideal $\mathfrak{p} + (x)$ für ein $m \geq 0$. Analog ist $f^n \in \mathfrak{p} + (y)$ für ein $n \geq 0$. Es folgt $f^{m+n} \in \mathfrak{p} + (xy)$. Damit ist $xy \notin \mathfrak{p}$. □

5.2. Das Jacobsonsche Radikal

Sei A ein kommutativer Ring.

Definition 5.3. Das *Jacobsonsche Radikal von A* ist der Schnitt aller maximalen Ideale von A.

Proposition 5.4. *Ein Element x von A ist genau dann im Jacobsonschen Radikal $\mathfrak{j}$, wenn $1 - xy$ für alle $y \in A$ eine Einheit ist.*

Beweis. 1. Sei $1 - xy$ keine Einheit. Dann ist $1 - xy \in \mathfrak{m}$ für ein maximales Ideal $\mathfrak{m}$. Da $1 \notin \mathfrak{m}$, folgt $xy \notin \mathfrak{m}$, also $x \notin \mathfrak{j}$.

2. Sei umgekehrt $x \notin \mathfrak{j}$, also $x \notin \mathfrak{m}$ für ein maximales Ideal $\mathfrak{m}$. Damit erzeugen x und $\mathfrak{m}$ das Einsideal, also existiert ein $y \in A$, so daß $1 - xy \in \mathfrak{m}$. Damit ist $1 - xy$ keine Einheit. □

Das Jacobsonsche Radikal besteht also aus allen Elementen eines kommutativen Ringes, welche in einem gewissen Sinne „nahe bei 0 sind".

6. Operationen mit Idealen

6.1. Summe, Schnitt und Produkt von Idealen

Sei A ein Ring.

Definition 6.1. Sei $(\mathfrak{a}_i)_{i\in I}$ eine Familie von Idealen von A. Dann ist ihre *Summe* $\sum\limits_{i\in I} \mathfrak{a}_i$ das kleinste Ideal von A, welches die Ideale $\mathfrak{a}_i$ umfaßt.

Es ist $\sum\limits_{i\in I} \mathfrak{a}_i = \left\{ \sum\limits_{k=1}^{n} x_k \mid x_k \in \mathfrak{a}_{i(k)}, i_k \in I \right\}$.

Bemerkung 6.2. Da der Schnitt einer Familie von Idealen wieder ein Ideal ist, bilden die Ideale von A damit einen vollständigen Verband bezüglich der Inklusionsordnung.

Bemerkung 6.3. Die Vereinigung zweier Ideale von A ist im allgemeinen kein Ideal.

Seien A ein Ring und $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}$ zwei Ideale von A.

Definition 6.4.
1. Das *Produkt* $\mathfrak{a}\mathfrak{b}$ *der Ideale* $\mathfrak{a}$ *und* $\mathfrak{b}$ ist das Ideal welches von allen Elementen der Form xy mit $x \in \mathfrak{a}$ und $y \in \mathfrak{b}$ erzeugt wird.
2. Sei $n \in \mathbb{N}_0$. Die *n-te Potenz* $\mathfrak{a}^n$ *des Ideals* $\mathfrak{a}$ ist $\underbrace{\mathfrak{a}\cdots\mathfrak{a}}_{n}$. Hierbei setzen wir $\mathfrak{a}^0 = (1)$.

Beispiel 6.5. Es ist $\mathfrak{a}\mathfrak{b} \subset \mathfrak{a} \cap \mathfrak{b}$.

Proposition 6.6. *Seien $m, n \in \mathbb{N}_0$. Dann ist $\mathfrak{a}^m\mathfrak{a}^n = \mathfrak{a}^{m+n}$.* □

Beispiel 6.7. Seien $m, n \in \mathbb{Z}$.

1. Das Ideal $(m)+(n) = (m, n)$ ist das Ideal, welches von einem größten gemeinsamen Teiler von m und n erzeugt wird.
2. Das Ideal $(m) \cap (n)$ ist das Ideal, welches von einem kleinsten gemeinsamen Vielfachen von m und n erzeugt wird.
3. Das Ideal $(m) \cdot (n)$ ist das Ideal, welches vom Produkt mn erzeugt wird.

Beispiel 6.8. Sei K ein Körper. Sei $\mathfrak{m}$ das von $x_1, \ldots, x_s$ in $K[x_1, \ldots, x_s]$ erzeugte Ideal. Dann ist $\mathfrak{m}^n$ das Ideal aller Polynome ohne Monome mit Grad kleiner als n.

Sei A ein Ring und seien $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c}$ drei Ideale von A.

Proposition 6.9. *1. Summe, Schnitt und Produkt von Idealen sind jeweils assoziative Operationen. Summe und Schnitt sind außerdem kommutativ. Das Produkt ist kommutativ, wenn der Ring kommutativ ist.*

2. Es gilt das Distributivgesetz: $\mathfrak{a}(\mathfrak{b}+\mathfrak{c}) = \mathfrak{a}\mathfrak{b} + \mathfrak{a}\mathfrak{c}$.

3. Es gilt das Modularitätsgesetz: Ist $\mathfrak{a} \supset \mathfrak{b}$ *oder* $\mathfrak{a} \supset \mathfrak{c}$, *folgt* $\mathfrak{a}\cap(\mathfrak{b}+\mathfrak{c}) = \mathfrak{a}\cap\mathfrak{b}+\mathfrak{a}\cap\mathfrak{c}$. □

Seien $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}$ zwei Ideale in einem kommutativen Ring A.

Definition 6.10. Die Ideale $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$ heißen *koprim*, wenn $\mathfrak{a} + \mathfrak{b} = (1)$.

Die Ideale $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$ sind also genau dann koprim, wenn ein $x \in \mathfrak{a}$ und ein $y \in \mathfrak{b}$ mit $x + y = 1$ existieren.

Hilfssatz 6.11. *Seien* $\mathfrak{a}$ *und* $\mathfrak{b}$ *koprim. Dann gilt* $\mathfrak{a} \cap \mathfrak{b} = \mathfrak{a}\mathfrak{b}$.

Beweis. Es ist $\mathfrak{a} \cap \mathfrak{b} = (\mathfrak{a}+\mathfrak{b})(\mathfrak{a}\cap\mathfrak{b}) = \mathfrak{a}(\mathfrak{a}\cap\mathfrak{b}) + \mathfrak{b}(\mathfrak{a}\cap\mathfrak{b}) \subset \mathfrak{a}\mathfrak{b} \subset \mathfrak{a}\cap\mathfrak{b}$. □

Beispiel 6.12. Im Ring der ganzen Zahlen sind (m) und (n) genau dann koprim, wenn m und n teilerfremd sind.

Proposition 6.13. *Seien* $\mathfrak{a}_1, \ldots, \mathfrak{a}_n$ *paarweise koprime Ideale eines kommutativen Ringes* A. *Dann gilt* $\prod_{i=1}^{n} \mathfrak{a}_i = \bigcap_{i=1}^{n} \mathfrak{a}_i$.

Beweis. 1. Der Fall $n = 0$ ist trivial.

2. Sei schon bewiesen, daß $\mathfrak{b} := \prod_{i=1}^{n-1} \mathfrak{a}_i = \bigcap_{i=1}^{n-1} \mathfrak{a}_i$. Da $\mathfrak{a}_i$ und $\mathfrak{a}_n$ für $i < n$ koprim sind, existieren $x_i \in \mathfrak{a}_i$ und $y_i \in \mathfrak{a}_n$ mit $x_i + y_i = 1$. Damit ist $\prod_{i=1}^{n-1} x_i = \prod_{i=1}^{n-1} (1 - y_i) = 1$ modulo $\mathfrak{a}_n$. Es folgt, daß $\mathfrak{b}$ und $\mathfrak{a}_n$ koprim sind, also ist $\prod_{i=1}^{n} \mathfrak{a}_i = \mathfrak{b}\mathfrak{a}_n = \mathfrak{b} \cap \mathfrak{a}_n = \bigcap_{i=1}^{n} \mathfrak{a}_i$. □

6.2. Direkte Produkte

Sei $(A_i)_{i\in I}$ eine Familie von Ringen. Auf der Menge $A := \prod_{i\in I} A_i$ der Folgen $x := (x_i)_{i\in I}$ mit $x_i \in A_i$ definieren wir eine Addition und Multiplikation durch gliedweise Addition und Multiplikation. Dann wird A mit der Null $(0)_{i\in I}$ und der Eins $(1)_{i\in I}$ zu einem Ring.

Definition 6.14. Der Ring $\prod_{i\in I} A_i$ ist das *direkte Produkt über die Familie* $(A_i)_{i\in I}$.

Proposition 6.15. *Die Projektionen* $\pi_i\colon A \to A_i, x \mapsto x_i$ *sind Ringhomomorphismen.* □

Genauer ist die Ringstruktur auf A gerade so gewählt, daß die π_i Ringhomomorphismen werden.

Proposition 6.16. *Seien $\mathfrak{a}_1, \ldots, \mathfrak{a}_n$ Ideale in einem kommutativen Ring A. Dann ist $\phi\colon A \to \prod_{i=1}^{n} A/\mathfrak{a}_i, x \mapsto (x + \mathfrak{a}_1, \ldots, x + \mathfrak{a}_n)$ genau dann surjektiv, wenn die Ideale $\mathfrak{a}_i$ paarweise koprim sind.*

Beweis.

1. Sei zunächst ϕ surjektiv. Wir zeigen, daß etwa $\mathfrak{a}_1$ und $\mathfrak{a}_2$ koprim sind: Es existiert ein $x \in A$ mit $\phi(x) = (1, 0, \ldots, 0)$. Es folgt, daß $1 = (1 - x) + x \in \mathfrak{a}_1 + \mathfrak{a}_2$.
2. Seien umgekehrt die $\mathfrak{a}_i$ paarweise koprim. Wir zeigen, daß ein $x \in A$ mit $\phi(x) = (1, 0, \ldots, 0)$ existiert. Da $\mathfrak{a}_1$ und $\mathfrak{a}_i$ für $i > 1$ koprim sind, existieren $u_i \in \mathfrak{a}_1$ und $v_i \in \mathfrak{a}_i$ mit $u_i + v_i = 1$. Setze $x \coloneqq \prod_{i=2}^{n} v_i = \prod_{i=2}^{n} (1 - u_i)$. Dann ist $x = 0$ modulo $\mathfrak{a}_i$ für $i > 1$ und $x = 1$ modulo $\mathfrak{a}_1$. $\square$

Seien $\mathfrak{a}_1, \ldots, \mathfrak{a}_n$ Ideale in einem kommutativen Ring A. Dann ist der Kern von $\phi\colon A \to \prod_{i=1}^{n} A/\mathfrak{a}_i, x \mapsto (x + \mathfrak{a}_1, \ldots, x + \mathfrak{a}_n)$ offensichtlich durch $\bigcap_{i=1}^{n} \mathfrak{a}_i$ gegeben. Insbesondere ist ϕ genau dann injektiv, wenn $\bigcap_{i=1}^{n} \mathfrak{a}_i = (0)$.

6.3. Ideale in Primidealen

Proposition 6.17. *Seien $\mathfrak{p}_1, \ldots, \mathfrak{p}_n$ Primideale in einem kommutativen Ring A. Ist dann $\mathfrak{a}$ ein Ideal von A mit $\mathfrak{a} \subset \bigcup_{i=1}^{n} \mathfrak{p}_i$, so ist $\mathfrak{a} \subset \mathfrak{p}_i$ für ein i.*

Beweis.

1. Wir zeigen $(\forall i\colon \mathfrak{a} \not\subset \mathfrak{p}_i) \implies \mathfrak{a} \not\subset \bigcup_{i=1}^{n} \mathfrak{p}_i$.
2. Der Fall $n = 0$ ist trivial.
3. Sei $\mathfrak{a} \not\subset \mathfrak{p}_i$ für alle i. Sei schon bewiesen, daß daraus $\mathfrak{a} \not\subset \bigcup_{i=1, i\neq j}^{n} \mathfrak{p}_i$ für alle j folgt. Damit existieren $x_j \in \mathfrak{a}$ mit $x_j \notin \mathfrak{p}_i$ für $i \neq j$.
4. Ist dann $x_j \notin \mathfrak{p}_j$ für ein j sind wir fertig. Ansonsten ist $x_j \in \mathfrak{p}_j$ für alle j. Damit ist $y \coloneqq \sum_{j=1}^{n} x_1 \cdots \widehat{x_j} \cdots x_n \in \mathfrak{a}$, aber $y \notin \mathfrak{p}_i$ für alle i. $\square$

Proposition 6.18. *Seien $\mathfrak{a}_1, \ldots, \mathfrak{a}_n$ Ideale in einem kommutativen Ring A und $\mathfrak{p}$ ein Primideal mit $\mathfrak{p} \supset \bigcap_{i=1}^{n} \mathfrak{a}_i$. Dann ist $\mathfrak{p} \supset \mathfrak{a}_i$ für ein i.*

Ist $\mathfrak{p} = \bigcap_{i=1}^{n} \mathfrak{a}_i$, folgt $\mathfrak{p} = \mathfrak{a}_i$ für ein i.

Beweis.

1. Sei $\mathfrak{p} \not\supset \mathfrak{a}_i$ für alle i. Dann existieren $x_i \in \mathfrak{a}_i$ mit $x_i \notin \mathfrak{p}$. Dann ist $x \coloneqq \prod_{i=1}^{n} x_i \subset \bigcap_{i=1}^{n} \mathfrak{a}_i$, aber $x \notin \mathfrak{p}$, da $\mathfrak{p}$ prim ist. Damit ist $\mathfrak{p} \not\supset \bigcap_{i=1}^{n} \mathfrak{a}_i$.
2. Ist $\mathfrak{p} = \bigcap_{i=1}^{n} \mathfrak{a}_i$, ist $\mathfrak{p} \subset \mathfrak{a}_i$ für alle i und damit $\mathfrak{p} = \mathfrak{a}_i$ für ein i. $\square$

6.4. Der Idealquotient

Seien $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}$ zwei Ideale eines kommutativen Ringes A. Dann ist $(\mathfrak{a} : \mathfrak{b}) := \{x \in A \mid x\mathfrak{b} \subset \mathfrak{a}\}$ ein Ideal von A.

Definition 6.19. Das Ideal $(\mathfrak{a} : \mathfrak{b})$ ist der *Idealquotient von* $\mathfrak{a}$ *nach* $\mathfrak{b}$.

Notation 6.20. Ist $\mathfrak{a}$ ein Hauptideal (x), schreiben wir $(x : \mathfrak{b})$ anstelle von $((x) : \mathfrak{b})$. Ist $\mathfrak{b}$ ein Hauptideal (y), schreiben wir analog $(\mathfrak{b} : y)$ für $(\mathfrak{b} : (y))$.

Definition 6.21. Das Ideal $(0 : \mathfrak{b})$ ist der *Annulator* $\operatorname{ann}\mathfrak{b}$ *von* $\mathfrak{b}$.

Es ist also $\operatorname{ann}\mathfrak{b} = \{x \in A \mid x\mathfrak{b} = 0\}$. Die Menge der Nullteiler von A ist durch $\bigcup\limits_{x \in A\setminus\{0\}} \operatorname{ann}(x)$ gegeben.

Beispiel 6.22. Seien $(m), (n)$ zwei Ideale im Ring der ganzen Zahlen. Seien die Primfaktorzerlegungen von m und n durch $m = \prod\limits_p p^{e_p}$ und $n = \prod\limits_p p^{f_p}$ gegeben. Dann ist $(m : n) = (q)$ mit $q = \prod\limits_p p^{\max(e_p - f_p, 0)}$. Es folgt, daß $q = m/(m, n)$, wobei (m, n) hier für einen größten gemeinsamen Teiler von m und n steht.

Proposition 6.23. *Seien* $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c}$ *drei Ideale eines kommutativen Ringes* A.

1. $\mathfrak{a} \subset (\mathfrak{a} : \mathfrak{b})$.
2. $(\mathfrak{a} : \mathfrak{b})\mathfrak{b} \subset \mathfrak{a}$.
3. $((\mathfrak{a} : \mathfrak{b}) : \mathfrak{c}) = (\mathfrak{a} : \mathfrak{b}\mathfrak{c})$.
4. *Sei* $(\mathfrak{a}_i)_{i \in I}$ *eine Familie von Idealen in* A. *Dann ist* $(\bigcap\limits_{i \in I} \mathfrak{a}_i : \mathfrak{b}) = \bigcap\limits_{i \in I} (\mathfrak{a}_i : \mathfrak{b})$.
5. *Sei* $(\mathfrak{b}_i)_{i \in I}$ *eine Familie von Idealen in* A. *Dann ist* $(\mathfrak{a} : \sum\limits_{i \in I} \mathfrak{b}_i) = \bigcap\limits_{i \in I} (\mathfrak{a} : \mathfrak{b}_i)$. □

6.5. Das Wurzelideal

Sei $\mathfrak{a}$ ein Ideal eines kommutativen Ringes. Sei $\sqrt{\mathfrak{a}} := \{x \in A \mid x^n \in \mathfrak{a} \text{ für ein } n \in \mathbb{N}_0\}$.

Proposition 6.24. *Sei* $\pi\colon A \to A/\mathfrak{a}$ *der kanonische Homomorphismus und* $\mathfrak{n}$ *das Nilradikal von* $A/\mathfrak{a}$. *Dann ist* $\sqrt{\mathfrak{a}} = \pi^{-1}(\mathfrak{n})$. □

Insbesondere ist $\sqrt{\mathfrak{a}}$ damit ein Ideal.

Definition 6.25. Das Ideal $\sqrt{\mathfrak{a}}$ ist das *Wurzelideal zu* $\mathfrak{a}$.

Beispiel 6.26. Das Nilradikal von A ist $\sqrt{(0)}$.

Seien $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}$ Ideale und $\mathfrak{p}$ ein Primideal eines kommutativen Ringes A.

Proposition 6.27. *1.* $\sqrt{\mathfrak{a}} \supset \mathfrak{a}$.

2. $\sqrt{\sqrt{\mathfrak{a}}} = \sqrt{\mathfrak{a}}$.

3. $\sqrt{\mathfrak{a}\mathfrak{b}} = \sqrt{\mathfrak{a} \cap \mathfrak{b}} = \sqrt{\mathfrak{a}} \cap \sqrt{\mathfrak{b}}$.

4. $\sqrt{\mathfrak{a}} = (1) \iff \mathfrak{a} = (1)$.

5. $\sqrt{\mathfrak{a} + \mathfrak{b}} = \sqrt{\sqrt{\mathfrak{a}} + \sqrt{\mathfrak{b}}}$.

6. $\sqrt{\mathfrak{p}^n} = \mathfrak{p}$ *für* $n > 0$. □

Definition 6.28. Das Ideal $\mathfrak{a}$ heißt *Wurzelideal*, falls $\sqrt{\mathfrak{a}} = \mathfrak{a}$.

Proposition 6.29. *Das Wurzelideal von* $\mathfrak{a}$ *ist der Schnitt* $\bigcap_{\mathfrak{p} \supset \mathfrak{a}} \mathfrak{p}$ *aller Primideale* $\mathfrak{p}$*, welche* $\mathfrak{a}$ *enthalten.*

Beweis. Sei $\pi\colon A \to A/\mathfrak{a}$ der kanonische Homomorphismus und $\mathfrak{n}$ das Nilradikal von $A/\mathfrak{a}$. Dann ist $\bigcap_{\mathfrak{p} \supset \mathfrak{a}} \mathfrak{p} = \pi^{-1}(\bigcap_{\bar{\mathfrak{p}}} \bar{\mathfrak{p}}) = \pi^{-1}(\mathfrak{n}) = \sqrt{\mathfrak{a}}$, wobei $\mathfrak{p}$ die Primideale von A und $\bar{\mathfrak{p}}$ die Primideale von $A/\mathfrak{a}$ durchläuft. □

Sei A ein kommutativer Ring. Analog zum Wurzelideal eines Ideals von A können wir auch die Wurzelmenge $\sqrt{S}$ zu einer Teilmenge S von A definieren. Ist $(S_i)_{i \in I}$ eine Familie von Teilmengen, gilt $\sqrt{\bigcup_{i \in I} S_i} = \bigcup_{i \in I} \sqrt{S_i}$.

Proposition 6.30. *Die Menge* D *der Nullteiler von* A *ist durch* $\bigcup_{x \in A \setminus \{0\}} \sqrt{\operatorname{ann}(x)}$ *gegeben.*

Beweis. $D = \sqrt{D} = \sqrt{\bigcup_{x \in A \setminus \{0\}} \operatorname{ann}(x)} = \bigcup_{x \in A \setminus \{0\}} \sqrt{\operatorname{ann}(x)}$. □

Beispiel 6.31. Sei $(m) \neq (0)$ ein Ideal im Ring der ganzen Zahlen und seien $p_1, \dots, p_r$ die verschiedenen Primteiler von (m). Dann ist $\sqrt{(m)} = (p_1 \cdots p_r) = \bigcap_{i=1}^{r} (p_i)$.

Proposition 6.32. *Seien* $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}$ *Ideale in einem Ring, so daß* $\sqrt{\mathfrak{a}}$ *und* $\sqrt{\mathfrak{b}}$ *koprim sind. Dann sind auch* $\mathfrak{a}$ *und* $\mathfrak{b}$ *koprim.*

Beweis. Aus $\sqrt{\mathfrak{a} + \mathfrak{b}} = \sqrt{\sqrt{\mathfrak{a}} + \sqrt{\mathfrak{b}}} = \sqrt{(1)} = (1)$ folgt $\mathfrak{a} + \mathfrak{b} = (1)$. □

7. Erweiterungen und Kontraktionen von Idealen

7.1. Kontraktionen

Sei $\phi\colon A \to B$ ein Homomorphismus kommutativer Ringe. Sei $\mathfrak{b}$ ein Ideal von B. Wir haben gesehen, daß das Urbild $\phi^{-1}(\mathfrak{b})$ ein Ideal von A ist.

Definition 7.1. Das Ideal $A \cap \mathfrak{b} := \phi^{-1}(\mathfrak{b})$ von A heißt die *Kontraktion von* $\mathfrak{b}$ *(bezüglich* ϕ*).*

Bemerkung 7.2. Ist ϕ die Inklusion eines Unterringes A in B, ist die Kontraktion von $\mathfrak{b}$ in der Tat der mengentheoretische Schnitt von A mit $\mathfrak{b}$.

Es ist $A \cap \mathfrak{b}$ der Kern des Homomorphismus $A \to B/\mathfrak{b}, a \mapsto [\phi(a)]$. Nach dem Homomorphiesatz existiert damit ein injektiver Homomorphismus $A/(A \cap \mathfrak{b}) \to B/\mathfrak{b}$.

Proposition 7.3. *Ist* $\mathfrak{q}$ *ein Primideal von* B*, so ist* $A \cap \mathfrak{q}$ *ein Primideal von* A*.*

Beweis. Da ein injektiver Ringhomorphismus $A/(A \cap \mathfrak{q}) \hookrightarrow B/\mathfrak{q}$ existiert, muß $A/(A \cap \mathfrak{q})$ mit $B/\mathfrak{q}$ auch ein Integritätsbereich sein. □

Beispiel 7.4. Die Kontraktion eines maximalen Ideals ist im allgemeinen nicht mehr maximal. Sei etwa $\phi\colon \mathbb{Z} \hookrightarrow \mathbb{Q}$ die Inklusion der ganzen in die rationalen Zahlen. Dann ist die Kontraktion des maximalen Ideals (0) in $\mathbb{Q}$ das Primideal (0) in $\mathbb{Z}$, welches aber nicht maximal ist.

7.2. Erweiterungen

Sei $\phi\colon A \to B$ ein Homomorphismus kommutativer Ringe. Sei $\mathfrak{a}$ ein Ideal von A. Im allgemeinen ist das Bild $\phi(\mathfrak{a})$ kein Ideal in B, aber wir können das von $\phi(\mathfrak{a})$ erzeugte Ideal $(\phi(\mathfrak{a}))$ in B betrachten.

Definition 7.5. Das Ideal $B\mathfrak{a} := (\phi(\mathfrak{a}))$ von B heißt die *Erweiterung von* $\mathfrak{a}$ *(bezüglich* ϕ*).*

Bemerkung 7.6. Ist ϕ die Inklusion eines Unterringes A in B, ist die Erweiterung von $\mathfrak{a}$ in der Tat die Menge der B-Linearkombinationen von Elementen in $\mathfrak{a}$.

Beispiel 7.7. Die Erweiterung eines Primideals ist im allgemeinen nicht mehr prim. Sei etwa $\phi\colon \mathbb{Z} \hookrightarrow \mathbb{Q}$ die Inklusion der ganzen in die rationalen Zahlen. Ist dann $\mathfrak{a} \neq (0)$ ein nicht triviales Ideal von $\mathbb{Z}$, ist $\mathbb{Q}\mathfrak{a} = (1)$.

Beispiel 7.8. Sei die kanonische Injektion $\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}[\mathrm{i}]$ gegeben, wobei $\mathrm{i}^2 = -1$. Der Ring $\mathbb{Z}[\mathrm{i}]$ ist wie $\mathbb{Z}$ ein euklidischer Ring und damit ebenso ein Hauptidealbereich. Die Erweiterung eines Primideals (p) in $\mathbb{Z}$ ist dann wie folgt gegeben:

1. Ist $p = 2$, ist $\mathbb{Z}[\mathrm{i}](p) = (1+\mathrm{i})(1+\mathrm{i})$, das Quadrat eines Primideals in $\mathbb{Z}[\mathrm{i}]$.

2. Ist $p = 1$ modulo 4, ist $\mathbb{Z}[\mathrm{i}](p)$ das Produkt zweier verschiedener Primideale, also etwa $\mathbb{Z}[\mathrm{i}](5) = (2+\mathrm{i})(2-\mathrm{i})$. Diese nicht triviale Tatsache ist effektiv der Fermatsche Zwei-Quadrate-Satz, der besagt, daß eine Primzahl p mit $p = 1$ modulo 4 als Summe zweier Quadratzahlen dargestellt werden kann. (Also etwa $5 = 2^2 + 1^2$.)

3. Ist $p = 3$ modulo 4, ist $\mathbb{Z}[\mathrm{i}](p)$ ein Primideal.

7.3. Operationen mit Erweiterungen und Kontraktionen

Proposition 7.9. *Sei $\phi\colon A \to B$ ein Homomorphismus kommutativer Ringe. Sei $\mathfrak{a}$ ein Ideal von A und $\mathfrak{b}$ ein Ideal von B. Dann gilt:*

1. $\mathfrak{a} \subset A \cap (B\mathfrak{a})$ *und* $\mathfrak{b} \supset B(A \cap \mathfrak{b})$.

2. $A \cap \mathfrak{b} = A \cap (B(A \cap \mathfrak{b}))$ *und* $B\mathfrak{a} = B(A \cap (B\mathfrak{a}))$.

Beweis.

1. $A \cap (B\mathfrak{a}) \supset \phi^{-1}(\phi(\mathfrak{a})) \supset \mathfrak{a}$.

2. $\phi(\phi^{-1}(\mathfrak{b})) \subset \mathfrak{b}$. Damit auch $(\phi(\phi^{-1}(\mathfrak{b}))) \subset (\mathfrak{b}) = \mathfrak{b}$.

3. Aus $B(A \cap \mathfrak{b}) \subset \mathfrak{b}$ folgt $A \cap (B(A \cap \mathfrak{b})) \subset A \cap \mathfrak{b} \subset A \cap (B(A \cap \mathfrak{b}))$.

4. Aus $\mathfrak{a} \subset A \cap (B\mathfrak{a})$ folgt $B\mathfrak{a} \subset B(A \cap (B\mathfrak{a})) \subset B\mathfrak{a}$. □

Proposition 7.10. *Sei $\phi\colon A \to B$ ein Homomorphismus kommutativer Ringe. Durch $\mathfrak{a} = A \cap \mathfrak{b}$ und $\mathfrak{b} = B\mathfrak{a}$ wird eine bijektive ordnungserhaltende Korrespondenz zwischen den kontrahierten Idealen $\mathfrak{a}$ von A und den erweiterten Idealen $\mathfrak{b}$ von B gegeben.*

Beweis.

1. Ist $\mathfrak{a}$ ein kontrahiertes Ideal von A, also etwa $\mathfrak{a} = A \cap \mathfrak{b}$, so ist $\mathfrak{a} = A \cap \mathfrak{b} = A \cap (B(A \cap \mathfrak{b})) = A \cap (B\mathfrak{a})$, also die Kontraktion eines erweiterten Ideals von B.

2. Ist $\mathfrak{b}$ ein erweitertes Ideal von B, also etwa $\mathfrak{b} = B\mathfrak{a}$, so ist $\mathfrak{b} = B\mathfrak{a} = B(A \cap (B\mathfrak{a})) = B(A \cap \mathfrak{b})$, also die Erweiterung eines kontrahierten Ideals von A. □

Proposition 7.11. *Sei $\phi\colon A \to B$ ein Homomorphismus kommutativer Ringe. Seien $\mathfrak{a}, \mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_2$ Ideale von A. Dann gilt:*

1. $B(\mathfrak{a}_1 + \mathfrak{a}_2) = B\mathfrak{a}_1 + B\mathfrak{a}_2$.

2. $B(\mathfrak{a}_1 \cap \mathfrak{a}_2) \subset B\mathfrak{a}_1 \cap B\mathfrak{a}_2$.

3. $B(\mathfrak{a}_1\mathfrak{a}_2) = (B\mathfrak{a}_1)(B\mathfrak{a}_2)$.

4. $B(\mathfrak{a}_1 : \mathfrak{a}_2) \subset (B\mathfrak{a}_1 : B\mathfrak{a}_2)$.

5. $B\sqrt{\mathfrak{a}} \subset \sqrt{B\mathfrak{a}}$. □

Proposition 7.12. *Sei $\phi\colon A \to B$ ein Ringhomomorphismus. Seien $\mathfrak{b}, \mathfrak{b}_1, \mathfrak{b}_2$ Ideale von B. Dann gilt:*

1. $A \cap (\mathfrak{b}_1 + \mathfrak{b}_2) \supset (A \cap \mathfrak{b}_1) + (A \cap \mathfrak{b}_2)$.

2. $A \cap (\mathfrak{b}_1 \cap \mathfrak{b}_2) = (A \cap \mathfrak{b}_1) \cap (A \cap \mathfrak{b}_2)$.

3. $A \cap (\mathfrak{b}_1\mathfrak{b}_2) \supset (A \cap \mathfrak{b}_1)(A \cap \mathfrak{b}_2)$.

4. $A \cap (\mathfrak{b}_1 : \mathfrak{b}_2) \subset (A \cap \mathfrak{b}_1 : A \cap \mathfrak{b}_2)$.

5. $A \cap \sqrt{\mathfrak{b}} = \sqrt{A \cap \mathfrak{b}}$. □

Teil II. Moduln

8. Moduln und Modulhomomorphismen

8.1. Moduln

Sei A ein Ring.

Definition 8.1. Ein *A-(Links-)Modul M* ist eine abelsche Gruppe $(M, +, 0)$ zusammen mit einer Abbildung $\cdot\colon A \times M \to M$, so daß

1. die Multiplikation eine Operation des multiplikativen Monoides von A auf der Menge M ist, also $(ab)x = a(bx)$ und $1 \cdot x = x$ für alle $a, b \in A$ und $x \in M$ gilt, und

2. die Multiplikation distributiv über die Addition ist, also $a(x + y) = ax + ay$ und $(a + b)x = ax + bx$ für alle $a, b \in A$ und $x, y \in M$.

Bemerkung 8.2. Alternativ läßt sich ein A-Modul als eine abelsche Gruppe zusammen mit einem Ringhomomorphismus $A \to \operatorname{End}_{\mathbb{Z}}(M), a \mapsto (m \mapsto am)$ definieren, wobei $\operatorname{End}_{\mathbb{Z}}(M)$ für den Endomorphismenring der abelschen Gruppe M steht.

Seien A ein Ring und M ein A-Modul.

Proposition 8.3. *Sei $x \in M$. Dann ist* $0 \cdot x = 0$.

Beweis. $0 \cdot x = 0 \cdot x + 0 \cdot x - 0 \cdot x = (0 + 0) \cdot x - 0 \cdot x = 0 \cdot x - 0 \cdot x = 0$. □

Folgerung 8.4. *Sei $x \in M$. Dann ist* $(-1) \cdot x = -x$.

Beweis. $x + (-1) \cdot x = 1 \cdot x + (-1) \cdot x = (1 - 1) \cdot x = 0 \cdot x = 0$. □

Beispiel 8.5. Jedes Ideal $\mathfrak{a}$ eines Ringes A wird durch Einschränkung der Multiplikation zu einem A-Modul. Insbesondere ist A selbst in kanonischer Weise ein A-Modul. Betrachten wir das Nullideal als A-Modul schreiben wir in der Regel 0 statt (0).

Beispiel 8.6. Ein Modul über einem (Schief-)Körper K ist dasselbe wie ein K-(Links-)Vektorraum.

Beispiel 8.7. Ein $\mathbb{Z}$-Modul M ist dasselbe wie eine abelsche Gruppe ($nx = (\underbrace{1 + \cdots + 1}_{n})x = \underbrace{x + \cdots + x}_{n}, n \in \mathbb{N}_0, x \in M$).

Sei K ein Körper.

Beispiel 8.8. Ein $K[x]$-Modul V ist dasselbe wie ein K-Vektorraum V zusammen mit einem Endomorphismus $V \to V, v \mapsto xv$.

Beispiel 8.9. Sei G eine endliche Gruppe und $A \coloneqq K[G] = \left\{ \sum_{g \in G} a_g \cdot g \mid g \in G, a_g \in K \right\}$ die Gruppenalgebra von G über K. Ein A-Modul V ist dasselbe wie eine K-Vektorraum V zusammen mit einer K-linearen Darstellung $G \to \operatorname{End}_K(V)$ von G auf V.

8.2. Modulhomomorphismen

Sei A ein Ring.

Definition 8.10. Ein A-*Modulhomomorphismus* ϕ ist eine Abbildung $\phi\colon M \to N$ zwischen zwei A-Moduln, welche einen Homomorphismus zwischen den abelschen Gruppen von M und N induziert, welcher mit der Operation des multiplikativen Monoids von A verträglich ist, das heißt $\phi(ax) = a\phi(x)$ für alle $a \in A$ und $x \in M$.

Eine Abbildung $\phi\colon M \to N$ ist also genau dann ein Modulhomomorphismus, falls für alle $a \in A$ und $x, y \in M$ gilt:

$$\begin{aligned} \phi(x+y) &= \phi(x) + \phi(y); && && (*) \\ \phi(0) &= 0 && \text{(folgt schon aus } (*)\text{);} \\ \phi(ax) &= a\phi(x), \end{aligned}$$

wenn die Abbildung also A-linear ist.

Sei A ein kommutativer Ring. Seien M, N zwei A-Moduln. Auf der Menge $\operatorname{Hom}_A(M, N)$ der Modulhomomorphismen $M \to N$ definieren wir eine Addition durch $(\phi + \psi)(x) = \phi(x) + \psi(x)$. Zusammen mit der Nullabbildung als Null wird $\operatorname{Hom}_A(M, N)$ damit zu einer abelschen Gruppe, durch die Setzung $(a\phi)(x) = a\phi(x)$ sogar zu einem A-Modul.

Definition 8.11. Der A-Modul $\operatorname{Hom}_A(M, N)$ ist der *Modul der Homomorphismen von M nach N*.

Ergibt sich der Ring A aus dem Kontext, schreiben wir in der Regel $\operatorname{Hom}(M, N) = \operatorname{Hom}_A(M, N)$.

Beispiel 8.12. Seien $\phi\colon M' \to M$ und $\psi\colon N \to N'$ zwei Homomorphismen von A-Moduln. Dann sind $\phi^*\colon \operatorname{Hom}_A(M, N) \to \operatorname{Hom}_A(M', N), \chi \mapsto \chi \circ \phi$ und $\psi_*\colon \operatorname{Hom}(M, N) \to \operatorname{Hom}(M, N'), \chi \mapsto \psi \circ \chi$ Homomorphismen von A-Moduln.

Sei A ein Ring. Sei $\phi\colon M \to N$ ein Homomorphismus von A-Moduln.

Definition 8.13. Der Homomorphismus ϕ heißt *Isomorphismus*, falls ein Modulhomomorphismus $\check{\phi}\colon N \to M$ existiert, so daß $\check{\phi} \circ \phi = \mathrm{id}_M$ und $\phi \circ \check{\phi} = \mathrm{id}_N$.

Proposition 8.14. *Ist ϕ bijektiv, so ist ϕ schon ein Isomorphismus.* □

Beispiel 8.15. Sei A kommutativ. Es ist $\operatorname{Hom}(A, M) \to M, \phi \mapsto \phi(1)$ ein Isomorphismus von A-Moduln, denn ein A-Modulhomomorphismus $\phi\colon A \to M$ ist schon eindeutig durch $\phi(1)$ bestimmt, was ein beliebiges Element aus M sein kann.

8.3. Bezeichnungen

Konvention 8.16. Moduln bezeichnen wir mit großen lateinischen Buchstaben $L, M, N, \ldots$, Modulelemente mit kleinen lateinischen Buchstaben $m, n, x, y, z, \ldots$.

Betrachten wir einen Ring als Algebra von Funktionen über einem Raum, heißen die Elemente eines Moduls über diesem Ring auch *Schnitte*.

Konvention 8.17. Modulhomomorphismen bezeichnen wir mit kleinen griechischen Buchstaben $\phi, \psi, \ldots$.

9. Untermoduln und Quotientenmoduln

9.1. Untermoduln, Quotientenmoduln, Kerne und Kokerne

Sei A ein Ring.

Definition 9.1. Eine Teilmenge M' eines A-Moduls M heißt *Untermodul von M*, falls

1. M' eine Untergruppe der abelschen Gruppe von M ist und
2. M' abgeschlossen unter Multiplikation mit Elementen aus A ist, also $ax \in M'$ für alle $a \in A$ und $x \in M'$.

Eine Teilmenge M' von M ist genau dann ein Untermodul, falls für alle $x, x' \in M'$ und $a \in A$ gilt:

$$\begin{aligned} x + x' &\in M'; & 0 &\in M'; \\ ax &\in M'. \end{aligned}$$

Bemerkung 9.2. Durch Einschränkung der Multiplikation wird jeder Untermodul eines A-Moduls selbst zu einem A-Modul.

Sei A ein Ring.

Beispiel 9.3. Jeder A-Modul M besitzt die beiden trivialen Untermoduln $\{0\}$ und M.

Beispiel 9.4. Sei A kommutativ. Eine Teilmenge $\mathfrak{a}$ von A ist genau dann ein Ideal von A, wenn $\mathfrak{a}$ ein Untermodul von A ist, wobei wir A in kanonischer Weise als Modul über sich selbst auffassen.

Sei A ein Ring. Sei M' ein Untermodul eines A-Moduls M.

Proposition 9.5. *Es gibt genau eine Modulstruktur auf der Menge M/M' der M'-Nebenklassen, so daß die kanonische Abbildung $\pi\colon M \twoheadrightarrow M/M', x \mapsto [x] := x + M'$ ein Homomorphismus von A-Moduln wird.* □

Definition 9.6. Der A-Modul M/M' heißt der *Quotientenmodul von M nach M'*.

Proposition 9.7. *Sei $\pi\colon M \to M/M'$ die kanonische Abbildung. Durch $N = \pi^{-1}(\bar{N})$ wird eine bijektive, ordnungserhaltende Korrespondenz zwischen den Untermoduln N von M mit $N \supset M'$ und den Untermoduln $\bar{N}$ von M/M' gegeben.* □

Sei A ein Ring. Sei $\phi\colon M \to N$ ein Homomorphismus von A- Moduln. Es sind

$$\ker\phi \coloneqq \{x \in M \mid \phi(x) = 0\} \subset M$$

und

$$\operatorname{im}\phi \coloneqq \{\phi(x) \mid x \in M\} \subset N$$

Untermoduln von M beziehungsweise N.

Definition 9.8. 1. Der Untermodul $\ker\phi$ von M heißt der *Kern von* ϕ.

2. Der Untermodul $\operatorname{im}\phi$ von N heißt das *Bild von* ϕ.

3. Der Quotientenmodul $\operatorname{coker}\phi \coloneqq N/\operatorname{im}\phi$ heißt der *Kokern von* ϕ.

Proposition 9.9. *Es ist* $\operatorname{coker}\phi = 0$ *genau dann, wenn* ϕ *surjektiv ist.* □

Sei A ein Ring. Sei $\phi\colon M \to N$ ein Homomorphismus von A-Moduln.

Proposition 9.10 (Homomorphiesatz für Moduln)**.** *Ist* M' *ein Untermodul von* M *mit* $M' \subset \ker\phi$, *so gibt es genau einen Modulhomomorphismus* $\underline{\phi}\colon M/M' \to N, [x] \mapsto \phi(x)$ *mit* $\ker\underline{\phi} = \ker\phi/M'$.

Beweis. 1. Die Existenz von $\underline{\phi}$ wird wie beim Homomorphiesatz für Ringe bewiesen.

2. Es ist $[x] \in \ker\underline{\phi} \iff \underline{\phi}([x]) = 0 \iff \phi(x) = 0 \iff x \in \ker\phi \iff [x] \in \ker\phi/M'$. □

Beispiel 9.11. Es existiert ein kanonischer Isomorphismus $M/\ker\phi \to \operatorname{im}\phi$ von A-Moduln.

9.2. Bezeichnungen

Konvention 9.12. Untermoduln von Moduln $M, N, L, \ldots$ bezeichnen wir häufig mit Strichen $M', N', L', \ldots$.

Konvention 9.13. Quotientenmoduln von Moduln $M, N, L, \ldots$ bezeichnen wir häufig mit Doppelstrichen $M'', N'', L'', \ldots$.

10. Operationen auf Untermoduln

10.1. Summe und Schnitt

Sei A ein Ring. Sei M ein A-Modul. Sei $(M_i)_{i\in I}$ eine Familie von Untermoduln von M. Mit $\sum\limits_{i\in I} M_i \subset M$ bezeichnen wir die Teilmenge aller endlichen Summen der Form $\sum\limits_{i\in I} x_i$ mit $x_i \in M_i$. Hierbei heißt endlich, daß $x_i = 0$ für fast alle (das heißt, alle bis auf endlich viele) $i \in I$. Es ist $\sum\limits_{i\in I} M_i$ ein Untermodul von M.

Definition 10.1. Der Untermodul $\sum_{i\in I} M_i$ von M heißt die *Summe der Untermoduln M_i*.

Bemerkung 10.2. Die Summe $\sum_{i\in I} M_i$ ist der kleinste Untermodul von M, welcher alle M_i umfaßt.

Sei A ein Ring. Sei M ein A-Modul.

Proposition 10.3. *Sei $(M_i)_{i\in I}$ eine Familie von Untermoduln von M. Dann ist der Schnitt $\bigcap_{i\in I} M_i \subset M$ ein Untermodul von M.*

Bemerkung 10.4. Damit bilden die Untermoduln von M einen vollständigen Verband bezüglich der Inklusionsordnung.

10.2. Die Isomorphiesätze

Proposition 10.5 (Erster Isomorphiesatz)**.** *Sei A ein Ring. Sei M ein A-Modul, und seien $M_1, M_2 \subset M$ zwei Untermoduln. Dann existiert ein kanonischer Isomorphismus $(M_1 + M_2)/M_1 \xrightarrow{\sim} M_2/(M_1 \cap M_2)$ von A-Moduln.*

Beweis.

1. Sei $\theta\colon M_2 \to (M_1 + M_2)/M_1, x \mapsto x + M_1$. Dann ist θ ein surjektiver Homomorphismus von A-Moduln.
2. Der Kern von θ ist $M_1 \cap M_2$. Damit folgt die Aussage aus dem Homomorphiesatz. □

Proposition 10.6 (Zweiter Isomorphiesatz)**.** *Sei A ein Ring. Sei L ein A-Modul, und seien $N \subset M \subset L$ Untermoduln. Dann existiert ein kanonischer Isomorphismus $(L/N)/(M/N) \xrightarrow{\sim} L/M$ von A-Moduln.*

Beweis.

1. Sei $\theta\colon L/N \to L/M, x + N \mapsto x + M$. Dann ist θ ein wohldefinierter, surjektiver Homomorphismus von A-Moduln.
2. Der Kern von θ ist M/N. Damit folgt die Aussage aus dem Homomorphiesatz. □

10.3. Operationen mit Moduln

Sei A ein kommutativer Ring. Seien M ein A-Modul und $\mathfrak{a}$ ein Ideal in A. Mit $\mathfrak{a}M$ bezeichnen wir die Teilmenge aller endlichen Summen der Form $\sum_i a_i x_i$ mit $a_i \in \mathfrak{a}$ und $x_i \in M$. Es ist $\mathfrak{a}M$ ein Untermodul von M.

Definition 10.7. Der Untermodul $\mathfrak{a}M$ von M heißt das *Produkt von $\mathfrak{a}$ und M*.

Notation 10.8. Ist $\mathfrak{a}$ ein Hauptideal (a), schreiben wir aM anstelle von $(a)M$.

Der Untermodul aM enthält genau die Elemente der Form ax von M mit $x \in M$.

Bemerkung 10.9. Auf diese Weise läßt sich ein Produkt von Moduln im allgemeinen nicht definieren.

Sei A ein kommutativer Ring. Seien N, P zwei Untermoduln eines A-Moduls M. Dann ist $(N : P) \coloneqq \{a \in A \mid aP \subset N\}$ ein Ideal von A.

Definition 10.10. Das Ideal $(N : P)$ heißt der *Quotient von N nach P*.

Bemerkung 10.11. Betrachten wir zwei Ideale von A als Untermoduln von A, stimmt deren Idealquotient mit dem Quotient als Moduln überein.

Definition 10.12. Das Ideal $(0 : M)$ ist der *Annulator* $\operatorname{ann} M$ von M.

Es ist also $\operatorname{ann} M = \{a \in A \mid aM = 0\}$.

Sei A ein kommutativer Ring. Sei M ein A-Modul. Ist $\mathfrak{a}$ ein Ideal von A mit $\mathfrak{a} \subset \operatorname{ann} M$, können wir M als einen $A/\mathfrak{a}$-Modul $M^{\mathfrak{a}}$ betrachten: Als abelsche Gruppen stimmen M und $M^{\mathfrak{a}}$ überein. Die Multiplikation auf $M^{\mathfrak{a}}$ ist durch $(a + \mathfrak{a}) \cdot x = ax$ mit $a \in A$ und $x \in M$ definiert. Diese ist wohldefiniert, da $ax = 0$ für $a \in \mathfrak{a} \subset \operatorname{ann} M$. Anstelle von $M^{\mathfrak{a}}$ sagen wir häufig auch „M als $A/\mathfrak{a}$-Modul".

Definition 10.13. Der A-Modul M heißt *treu*, falls $\operatorname{ann} M = 0$.

Es ist M also genau dann treu, falls aus $\forall x \in M\colon ax = 0$ mit $a \in A$ schon $a = 0$ folgt.

Beispiel 10.14. Es ist M treu als $(A/\operatorname{ann} M)$-Modul.

Proposition 10.15. *Sei A ein kommutativer Ring. Seien N, P zwei Untermoduln eines A-Moduls M. Dann gilt:*

1. $\operatorname{ann}(N + P) = \operatorname{ann} N \cap \operatorname{ann} P$.
2. $(N : P) = \operatorname{ann}((N + P)/N)$. □

10.4. Endlich erzeugte Moduln

Sei A ein Ring. Seien M ein A-Modul und $x \in M$. Dann ist $Ax \coloneqq \{ax \mid a \in A\}$ ein Untermodul von M, die Teilmenge der Vielfachen von x.

Definition 10.16. Gilt $M = \sum_{i \in I} Ax_i$ für eine Familie $(x_i)_{i \in I}$ von Elementen in M, so bilden die x_i eine *Familie von Erzeugern von M*.

In diesem Falle läßt sich also jedes Element von M als (nicht notwendigerweise eindeutige) endliche Linearkombination der x_i darstellen.

Definition 10.17. Der A-Modul M heißt *endlich erzeugt*, falls er eine endliche Familie von Erzeugern besitzt.

11. Direkte Summen und Produkte

11.1. Definition von direkter Summe und Produkt

Sei A ein Ring. Sei $(M_i)_{i\in I}$ eine Familie von A-Moduln. Auf der Menge $M := \prod_{i\in I} M_i$ der Folgen $x := (x_i)_{i\in I}$ mit $x_i \in M_i$ definieren wir eine Addition und eine Multiplikation mit Ringelementen gliedweise. Dann wird M mit der Null $(0)_{i\in I}$ zu einem A-Modul.

Definition 11.1. Der A-Modul $\prod_{i\in I} M_i$ ist das *direkte Produkt über die Familie* $(M_i)_{i\in I}$.

Proposition 11.2. *Die Projektionen* $\pi_i\colon M \to M_i, x \mapsto x_i$ *sind Homomorphismen von* A*-Moduln.* □

Die A-Modulstruktur auf M ist gerade so gewählt, daß die π_i Homomorphismen von A-Moduln werden.

Sei A ein Ring. Sei $(M_i)_{i\in I}$ eine Familie von A-Moduln. Sei $M := \bigoplus_{i\in I} M_i$ die Teilmenge derjenigen Familien $x = (x_i)_{i\in I} \in \prod_{i\in I} M_i$, für die für fast alle $i \in I$ gilt $x_i = 0$. Es ist $\bigoplus_{i\in I} M_i$ ein Untermodul des direkten Produktes $\prod_{i\in I} M_i$.

Definition 11.3. Der A-Modul $\bigoplus_{i\in I} M_i$ heißt die *direkte Summe über die Familie* $(M_i)_{i\in I}$.

Bemerkung 11.4. Ist die Indexmenge I endlich, stimmen direktes Produkt und direkte Summe überein.

Proposition 11.5. *Die Inklusionen* $\iota_i\colon M_i \to M, m \mapsto x$ *mit* $x_j = m$ *für* $j = i$ *und* $x_j = 0$ *sonst sind ein Homomorphismus von* A*-Moduln.*

11.2. Direkte Summenzerlegungen von Ringen

Beispiel 11.6. Sei $A = \prod_{i=1}^{n} A_i$ ein endliches direktes Produkt kommutativer Ringe. Sei $\mathfrak{a}_i \subset A$ die Teilmenge aller (a_j) mit $a_j = 0$ für $j \neq i$ und $a_i \in A_i$ beliebig. Dann ist $\mathfrak{a}_i$ ein Ideal in A. Weiter besitzt A als A-Modul die direkte Summenzerlegung $A = \mathfrak{a}_1 \oplus \ldots \oplus \mathfrak{a}_n$.

Beispiel 11.7. Sei $A = \mathfrak{a}_1 \oplus \ldots \oplus \mathfrak{a}_n$ eine Zerlegung eines kommutativen Ringes A als A-Modul in eine direkte Summe von Idealen. Dann existiert ein kanonischer Isomorphismus $A \cong \prod_{i=1}^{n} A/\mathfrak{b}_i$ mit $\mathfrak{b}_i := \bigoplus_{j\neq i} \mathfrak{a}_j$. Ist $e_i \in A$ das Einselement des Ringes $A/\mathfrak{b}_i \cong \mathfrak{a}_i$, so ist $\mathfrak{a}_i = (e_i)$.

12. Endlich erzeugte Moduln

12.1. Freie Moduln

Sei A ein Ring.

Definition 12.1. Ein *freier A-Modul M* ist ein zu einem A-Modul der Form $\bigoplus_{i\in I} M_i$ isomorpher A-Modul, wobei $M_i \cong A$ als A-Modul.

Häufig wird für M auch die Notation $A^{(I)}$ verwendet.

Beispiel 12.2. Ein endlich erzeugter freier Modul ist damit ein freier Modul isomorph zu $A^n = \underbrace{A \oplus \cdots \oplus A}_{n}$. (Es ist $A^0 = 0$ der Nullmodul.)

Proposition 12.3. *Sei A ein Ring. Sei M ein A-Modul. Dann ist M genau dann ein endlich erzeugter A-Modul, wenn M ein Quotient eines A-Moduls der Form A^n für ein $n \in \mathbb{N}_0$ ist.*

Beweis.

1. Sei M endlich erzeugt, etwa mit Erzeugern $x_1, \ldots, x_n$. Dann ist $\phi\colon A^n \to M, (a^1, \ldots, a^n) \mapsto a^1 x_1 + \cdots + a^n x_n$ ein surjektiver Homomorphismus von A-Moduln. Nach dem Homomorphiesatz ist also $M \cong A^n / \ker \phi$.

2. Sei M ein Quotient von A^n. Dann existiert ein surjektiver Homomorphismus $\phi\colon A^n \to M$ von A-Moduln. Ist dann $e_i \coloneqq (0, \ldots, 1, \ldots, 0) \in A^n$ mit der Eins an Position i, so erzeugen $e_1, \ldots, e_n$ den A-Modul A^n. Also erzeugen die $\phi(e_i)$ den A-Modul M. □

12.2. Das Nakayamasche Lemma

Proposition 12.4. *Sei A ein kommutativer Ring. Seien M ein endlich erzeugter A-Modul und $\mathfrak{a}$ ein Ideal von A. Sei $\phi\colon M \to M$ ein Endomorphismus von M mit $\operatorname{im}\phi \subset \mathfrak{a}M$. Dann erfüllt ϕ eine Gleichung der Form $\phi^n + a_1\phi^{n-1} + \cdots + a_n = 0$ mit $a_i \in \mathfrak{a}$.*

Beweis.

1. Erzeugen $x_1, \ldots, x_n$ den A-Modul M. Da $\phi(x_i) \in \mathfrak{a}M$, existieren $a^i_j \in \mathfrak{a}$ mit $\phi(x_j) = \sum_i a^i_j x_i$, also $\sum_i (\delta^i_j \phi - a^i_j) x_i = 0$ für alle j.

2. Multiplizieren wir die linke Seite mit der Adjunkten der Matrix $(\delta^i_j \phi - a^i_j)$ erhalten wir, daß $\det(\delta^i_j \phi - a^i_j)$ alle Erzeuger x_i auslöscht und damit der Nullmorphismus ist. Ausmultiplizieren der Determinanten liefert eine Gleichung der gesuchten Form. □

Sei A ein kommutativer Ring. Sei M ein endlich erzeugter A-Modul.

Folgerung 12.5. *Sei $\mathfrak{a}$ ein Ideal von A mit $\mathfrak{a}M = M$. Dann existiert ein $x \in A$ mit $x = 1$ modulo $\mathfrak{a}$ und $xM = 0$.*

Beweis. Anwenden der Proposition auf $\mathrm{id}_M\colon M \to M$ liefert einen Ausdruck der Form $x \coloneqq 1 + a_1 + \cdots + a_n$ mit $a_i \in \mathfrak{a}$ und $xM = 0$. □

Proposition 12.6 (Nakayamasches Lemma)**.** *Sei $\mathfrak{a}$ ein Ideal von A, welches im Jacobsonschen Radikal $\mathfrak{j}$ von A enthalten ist. Dann folgt aus $\mathfrak{a}M = M$ schon $M = 0$.*

Beweis. Nach der Folgerung existiert ein $x = 1$ modulo $\mathfrak{a}$ mit $xM = 0$. Da $1 - x \in \mathfrak{j}$, ist $x \in A^\times$, also $M = x^{-1}xM = 0$. $\square$

Sei A ein kommutativer Ring. Sei M ein endlich erzeugter A-Modul.

Folgerung 12.7. *Seien $N \subset M$ ein Untermodul und $\mathfrak{a}$ ein Ideal von A, welches im Jacobsonschen Radikal von A enthalten ist. Dann folgt aus $M = \mathfrak{a}M + N$ schon $M = N$.*

Beweis. Wegen $\mathfrak{a}(M/N) = (\mathfrak{a}M + N)/N$ reicht es, das Nakayamasche Lemma auf M/N anzuwenden. $\square$

Sei $(A, \mathfrak{m}, F)$ ein lokaler Ring. Sei M ein endlich erzeugter A-Modul. Dann ist $\mathfrak{m} \subset \operatorname{ann}(M/\mathfrak{m}M)$, also ist $M/\mathfrak{m}M$ in natürlicher Weise ein (endlich-dimensionaler) $F = A/\mathfrak{m}$-Vektorraum. Wir nennen den F-Vektorraum $M(\mathfrak{m}) := M/\mathfrak{m}M$ auch die *spezielle Faser von M*. Das Bild eines Elementes $x \in M$ in $M(\mathfrak{m})$ heißt auch der *Wert des Schnittes x in der speziellen Faser*.

Proposition 12.8. *Seien $x_1, \ldots, x_n$ Schnitte von M, deren Werte in $M(\mathfrak{m})$ eine Basis bilden. Dann erzeugen $x_1, \ldots, x_n$ den A-Modul M.*

Beweis. Sei N der von den x_i erzeugte Untermodul von M. Nach Voraussetzung ist die Komposition $N \to M \to M/\mathfrak{m}M$ surjektiv, also $N + \mathfrak{m}M = M$. Nach der letzten Folgerung ist daher $M = N$. $\square$

13. Exakte Sequenzen

13.1. Definition und erste Eigenschaften

Definition 13.1. Sei A ein Ring. Eine Sequenz

$$\ldots \to M^{i-1} \xrightarrow{\phi^{i-1}} M^i \xrightarrow{\phi^i} M^{i+1} \to \ldots$$

von A-Moduln und A-Modulhomomorphismen heißt *exakt bei M^i*, falls $\operatorname{im} \phi^{i-1} = \ker \phi^i$. Die Sequenz heißt *exakt*, falls sie exakt bei jedem M^i ist.

Sei A ein Ring.

Beispiel 13.2. Eine Sequenz der Form $0 \to M' \xrightarrow{\phi} M$ von A-Moduln ist genau dann exakt, wenn ϕ injektiv ist.

Beispiel 13.3. Eine Sequenz der Form $M \xrightarrow{\psi} M'' \to 0$ von A-Moduln ist genau dann exakt, wenn ψ surjektiv ist.

Sei A ein Ring.

Definition 13.4. Eine *kurze exakte Seqenz von A-Moduln* ist eine exakte Sequenz der Form $0 \to M' \to M \to M'' \to 0$.

Beispiel 13.5. Eine Seqenz der Form $0 \to M' \xrightarrow{\phi} M \xrightarrow{\psi} M'' \to 0$ ist genau dann exakt, wenn ϕ injektiv ist, ψ surjektiv ist und ψ einen Isomorphismus $\operatorname{coker}\phi = M/\operatorname{im}\phi \cong M''$ induziert.

Beispiel 13.6. Jede lange exakte Sequenz $\ldots \to M^{i-1} \xrightarrow{\phi^{i-1}} M^i \xrightarrow{\phi^i} M^{i+1} \to \ldots$ zerfällt in kurze exakte Sequenzen: Ist $N^i = \operatorname{im}\phi^{i-1} = \ker\phi^i$, haben wir kurze exakte Sequenzen $0 \to N^i \to M^i \to N^{i+1} \to 0$ für alle i.

Proposition 13.7. *Sei A ein kommutativer Ring. Eine Sequenz $E\colon M' \xrightarrow{\phi} M \xrightarrow{\psi} M'' \to 0$ von A-Moduln ist genau dann exakt, wenn für alle A-Moduln N auch* $\operatorname{Hom}(E, N)\colon 0 \to \operatorname{Hom}(M'', N) \xrightarrow{\psi^*} \operatorname{Hom}(M, N) \xrightarrow{\phi^*} \operatorname{Hom}(M', N)$ *exakt ist.*

Beweis.

1. Wir zeigen eine Richtung: Sei die Hom-Sequenz exakt für alle N. Wir wählen $N = \operatorname{coker}\psi$. Ist $\pi\colon M'' \to N$ die kanonische Projektion, so ist $\pi \circ \psi = 0$. Da ψ^* injektiv ist, folgt $\pi = 0$, also $N = 0$. Damit ist ψ surjektiv.

2. Für $N = M''$ ist $\psi \circ \phi = \phi^*\psi^*(\mathrm{id}_{M''}) = 0$, also $\operatorname{im}\phi \subset \ker\psi$.

3. Wir wählen $N = \operatorname{coker}\phi$. Ist $\pi\colon M \to N$ die kanonische Projektion, so ist $\pi\circ\phi = 0$, also $\pi \in \ker\phi^*$. Damit existiert ein $\xi\colon M'' \to N$ mit $\pi = \xi \circ \psi$, also $\operatorname{im}\phi = \ker\pi \supset \ker\psi$. □

Proposition 13.8. *Sei A ein kommutativer Ring. Eine Sequenz $F\colon 0 \to N' \xrightarrow{\phi} N \xrightarrow{\psi} N''$ von A-Moduln ist genau dann exakt, wenn für alle A-Moduln M die Sequenz* $\operatorname{Hom}(M, F)\colon 0 \to \operatorname{Hom}(M, N') \xrightarrow{\phi_*} \operatorname{Hom}(M, N) \xrightarrow{\psi_*} \operatorname{Hom}(M, N'')$ *exakt ist.* □

13.2. Das Schlangenlemma

Proposition 13.9 (Schlangenlemma)**.** *Sei A ein Ring. Ist*

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & M' \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d, "\phi'"'] & M \arrow[r, "\beta"] \arrow[d, "\phi"'] & M'' \arrow[r] \arrow[d, "\phi''"'] & 0 \\
0 \arrow[r] & N' \arrow[r, "\alpha'"] & N \arrow[r, "\beta'"] & N'' \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

ein kommutatives Diagramm von A-Moduln mit exakten Zeilen, so existiert eine kanonische exakte Sequenz der Form $0 \to \ker\phi' \xrightarrow{\alpha_*} \ker\phi \xrightarrow{\beta_*} \ker\phi'' \xrightarrow{\delta} \operatorname{coker}\phi' \xrightarrow{\alpha'_*} \operatorname{coker}\phi \xrightarrow{\beta'_*} \operatorname{coker}\phi'' \to 0$. □

Der *(Ko-)Randhomomorphismus* δ ist folgendermaßen definiert: Sei $x'' \in \ker\phi''$. Dann ist $x'' = \beta(x)$ für ein $x \in M$. Da $\beta'(\phi(x)) = \phi''(\beta(x)) = 0$, existiert ein $y' \in N'$ mit $\alpha'(y') = \phi(x)$. Schließlich ist $\delta(x'')$ das Bild von y' in $\operatorname{coker}\phi'$.

Bemerkung 13.10. Das Schlangenlemma ist ein Spezialfall der langen exakten Kohomologiesequenz der homologischen Algebra.

13.3. Additive Funktionen

Definition 13.11. Sei A ein Ring. Sei $\mathfrak{C}$ eine Klasse von A-Moduln. Eine Abbildung $\lambda\colon \mathfrak{C} \to G$ in eine abelsche Gruppe heißt *additive Funktion*, falls für alle kurzen exakten Sequenzen $0 \to C' \to C \to C'' \to 0$ von Moduln aus $\mathfrak{C}$ gilt, daß $\lambda(C) = \lambda(C') + \lambda(C'')$.

Beispiel 13.12. Seien K ein Körper und $\mathfrak{C}$ die Klasse der endlich-dimensionalen K-Vektorräume. Dann ist $\dim\colon \mathfrak{C} \to \mathbb{Z}$ eine additive Funktion.

Proposition 13.13. *Sei A ein Ring. Sei $\mathfrak{C}$ eine Klasse von A-Moduln und $\lambda\colon \mathfrak{C} \to G$ eine additive Funktion. Sei $0 \to M^0 \xrightarrow{\phi^0} M^1 \xrightarrow{\phi^1} \cdots \to M^n \to 0$ eine exakte Sequenz von Moduln in $\mathfrak{C}$, so daß auch die Kerne der ϕ^i zu $\mathfrak{C}$ gehören. Dann gilt $\sum\limits_{i=0}^{n}(-1)^i\lambda(M^i) = 0$.*

Beweis. 1. Die exakte Sequenz zerfällt in kurze exakte Sequenzen der Form $0 \to N^i \to M^i \to N^{i+1} \to 0$ (mit $N^0 = N^{n+1} = 0$), wobei $N^i \in \mathfrak{C}$.

2. Daher gilt $\lambda(M^i) = \lambda(N^i) + \lambda(N^{i+1})$. Addieren wir diese Gleichungen alternierend, hebt sich die rechte Seite weg. □

14. Tensorprodukte von Moduln

14.1. Bilineare Abbildungen und das Tensorprodukt

Sei A ein kommutativer Ring.

Definition 14.1. Seien M, N, P drei A-Moduln. Eine Abbildung $\beta\colon M \times N \to P$ heißt *A-bilinear*, falls für alle $x \in M$ die Abbildung $y \mapsto \beta(x, y)$ und für alle $y \in N$ die Abbildung $x \mapsto \beta(x, y)$ Homomorphismen von A-Moduln sind.

Beispiel 14.2. Fassen wir A als A-Modul auf, ist die Multiplikationsabbildung $A \times A \to A, (a, a') \mapsto aa'$ eine A-bilineare Abbildung.

Sei A ein kommutativer Ring.

Proposition 14.3. *Seien M, N zwei A-Moduln.*

1. *Es existiert ein A-Modul T zusammen mit einer A-bilinearen Abbildung $\gamma\colon M \times N \to T$ mit der folgenden (universellen) Eigenschaft: Für jeden weiteren A-Modul P zusammen mit einer A-bilinearen Abbildung $\beta\colon M \times N \to P$ existiert genau eine A-lineare Abbildung $\underline{\beta}\colon T \to P$ mit $\beta = \underline{\beta} \circ \gamma$.*

2. *Sind $(T, \gamma), (T', \gamma')$ zwei solcher Paare mit dieser Eigenschaft, so existiert genau ein Isomorphismus $\phi\colon T \to T'$ mit $\phi \circ \gamma = \gamma'$.*

Es faktorisiert also jede A-bilineare Abbildung auf $M \times N$ über T.

Eindeutigkeit. 1. Aufgrund der universellen Eigenschaft für (T, γ) existiert eine A-lineare Abbildung $\phi\colon T \to T'$ mit $\gamma' = \phi \circ \gamma$.

2. Vertauschen der Rollen von T und T' liefert weiter eine A-lineare Abbildung $\phi' \colon T' \to T$ mit $\gamma = \phi' \circ \gamma'$.

3. Es folgt, daß $\gamma = (\phi' \circ \phi) \circ \gamma$. Nach der Eindeutigkeitsaussage der universellen Eigenschaft für T muß daher $\phi' \circ \phi = \mathrm{id}_T$ gelten.

4. Analog folgt $\phi \circ \phi' = \mathrm{id}_{T'}$.

Konstruktion. 1. Sei C der freie A-Modul $A^{(M \times N)}$. Die Elemente von C können wir uns als formale Linearkombinationen $\sum_{i=1}^{n} a^i(x_i, y_i)$ mit $a_i \in A, x_i \in M, y_i \in N$ vorstellen.

2. Sei D der von allen Elementen der Form

$$
\begin{aligned}
&(x + x', y) - (x, y) - (x', y),\\
&(x, y + y') - (x, y) - (x, y'),\\
&(ax, y) - a(x, y),\\
&(x, ay) - a(x, y)
\end{aligned}
$$

mit $x, x' \in M$, $y, y' \in N$ und $a \in A$ erzeugte Untermodul von C.

3. Wir setzen $T \coloneqq C/D$. Wir schreiben $x \otimes y \in T$ für das Bild des Elementes $(x, y) \in C$ in T.

Beweis der universellen Eigenschaft. 1. Damit ist T erzeugt von Elementen der Form $x \otimes y$, wobei folgende Gleichungen gelten:

$$
\begin{aligned}
(x + x') \otimes y &= x \otimes y + x' \otimes y, & x \otimes (y + y') &= x \otimes y + x \otimes y',\\
(ax) \otimes y &= a(x \otimes y), & x \otimes (ay) &= a(x \otimes y).
\end{aligned}
$$

Also ist $\gamma \colon M \times N \to T, (x, y) \mapsto x \otimes y$ eine A-bilineare Abbildung.

2. Jede Abbildung $\beta \colon M \times N \to P$ induziert eine A-lineare Abbildung $\beta' \colon C \to P, (x, y) \mapsto \beta(x, y)$. Ist β eine A-bilineare Abbildung verschwindet β' auf den Erzeugern von D, induziert also nach dem Homomorphiesatz eine A-lineare Abbildung $\underline{\beta} \colon T \to P, x \otimes y \mapsto \beta(x, y)$.

3. Da T von Elementen der Form $x \otimes y$ erzeugt wird, ist $\underline{\beta}$ die einzige Abbildung mit $\beta = \underline{\beta} \circ \gamma$. □

Sei A ein kommutativer Ring. Seien M und N zwei A-Moduln. Der in der letzten Proposition konstruierte A-Modul T heißt das *Tensorprodukt von M und N*.

Notation 14.4. Wir schreiben $M \otimes_A N$ für das Tensorprodukt von M mit N.

Im Falle, daß der Ring A aus dem Kontext hervorgeht, schreiben wir auch $M \otimes N$ anstelle von $M \otimes_A N$.

Notation 14.5. Ist $\beta\colon M \times N \to P$ eine bilineare Abbildung in einen weiteren A-Modul, so schreiben wir $M \otimes N \to P, x \otimes y \mapsto \beta(x,y)$ für diejenige A-lineare Abbildung $\underline{\beta}$ mit $\underline{\beta}(x \otimes y) = \beta(x,y)$.

Bemerkung 14.6. Das Tensorprodukt $M \otimes N$ ist als A-Modul durch die *Produkte* $x \otimes y$ mit $x \in M$ und $y \in N$ erzeugt. Sind $(x_i)_{i \in I}$ und $(y_j)_{j \in J}$ Familien von Erzeugern von M beziehungsweise N, so erzeugen die Elemente $x_i \otimes y_j$ das Tensorprodukt $M \otimes N$. Insbesondere ist $M \otimes N$ ein endlich erzeugter A-Modul, falls M und N endlich erzeugte A-Moduln sind.

Beispiel 14.7. Wir betrachten $\mathbb{Z}$ und $\mathbb{Z}/(2)$ als $\mathbb{Z}$-Moduln. Sei $x \in \mathbb{Z}/(2)$ das nicht verschwindende Element. Sei $2\mathbb{Z} \subset \mathbb{Z}$ der Untermodul der geraden ganzen Zahlen. Im Tensorprodukt $\mathbb{Z} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}/(2)$ verschwindet das Element $2 \otimes x$, denn $2 \otimes x = 1 \otimes (2x) = 1 \otimes 0 = 0$. Auf der anderen Seite verschwindet das Element $2 \otimes x$ nicht im Tensorprodukt $2\mathbb{Z} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}/(2)$.

Damit ist die Notation $x \otimes y$ mehrdeutig, solange das Tensorprodukt, in dem das Element enthalten ist, nicht festgelegt worden ist.

Folgerung 14.8. *Sei A ein kommutativer Ring. Seien M, N zwei A-Moduln und $x_i \in M$ und $y_i \in N$ mit $\sum_i x_i \otimes y_i = 0$ in $M \otimes N$. Dann existieren endlich erzeugte Untermoduln $M_0 \subset M$ und $N_0 \subset N$, so daß $\sum_i x_i \otimes y_i = 0$ in $M_0 \otimes N_0$.*

Beweis.

1. Wir benutzen dieselbe Notation wie im Beweis der Existenz des Tensorproduktes, insbesondere also $M \otimes N = T = C/D$.
2. Da $\sum_i x_i \otimes y_i = 0$ in $M \otimes N$, folgt $\sum_i (x_i, y_i) \in D$, ist also eine endliche Summe von Erzeugern d_j.
3. Sei M_0 der Untermodul von M, welcher von allen x_i und allen Elementen von M, welche als erste Komponenten in den d_j auftauchen, erzeugt wird. Der Untermodul N_0 von N wird auf analoge Weise definiert. $\square$

Bemerkung 14.9. Ab jetzt spielt die genaue Konstruktion des Tensorproduktes für uns keine Rolle mehr. Wesentlich ist seine universelle Eigenschaft.

14.2. Multilineare Abbildungen und mehrfache Tensorprodukte

In Verallgemeinerung des Begriffes der bilinearen Abbildung definieren wir:

Definition 14.10. Sei A ein kommutativer Ring. Sei $M_1, \ldots, M_r, P$ eine Folge von A-Moduln. Eine Abbildung $\mu\colon M_1 \times \cdots \times M_r \to P$ heißt *A-multilinear*, falls sie linear in jedem Argument ist.

Proposition 14.11. *Sei A ein kommutativer Ring. Sei $M_1, \ldots, M_r, P$ eine Folge von A-Moduln.*

1. *Es existiert ein A-Modul T zusammen mit einer A-multilinearen Abbildung $\gamma\colon M_1 \times \cdots \times M_r \to T$ mit der folgenden (universellen) Eigenschaft: Für jeden weiteren A-Modul P zusammen mit einer A-multilinearen Abbildungen $\mu\colon M_1 \times \cdots \times M_r \to P$ existiert genau eine A-lineare Abbildung $\underline{\mu}\colon T \to P$ mit $\mu = \underline{\mu} \circ \gamma$.*

2. *Sind $(T, \gamma), (T', \gamma')$ zwei solcher Paare mit dieser Eigenschaft, so existiert genau ein Isomorphismus $\phi\colon T \to T'$ mit $\phi \circ \gamma = \gamma'$.* □

Wir schreiben $M_1 \otimes \cdots \otimes M_r$ für T.

14.3. Kanonische Isomorphismen zwischen Tensorprodukten

Proposition 14.12. *Sei A ein kommutativer Ring. Seien M, N, P drei A-Moduln. Dann existieren Isomorphismen*

1. $M \otimes N \xrightarrow{\sim} N \otimes M, x \otimes y \mapsto y \otimes x,$

2. $(M \otimes N) \otimes P \xrightarrow{\sim} M \otimes (N \otimes P) \xrightarrow{\sim} M \otimes N \otimes P, (x \otimes y) \otimes z \mapsto x \otimes (y \otimes z) \mapsto x \otimes y \otimes z,$

3. $(M \oplus N) \otimes P \xrightarrow{\sim} (M \otimes P) \oplus (N \otimes P), (x, y) \otimes z \mapsto (x \otimes z, y \otimes z),$

4. $A \otimes M \xrightarrow{\sim} M, a \otimes x \mapsto ax.$

Beweis.

1. In allen Fällen ist nachzuweisen, daß die so definierten Abbildungen wohldefiniert sind und Umkehrungen besitzen. Wir beweisen dies exemplarisch am Beispiel $(M \otimes N) \otimes P \xrightarrow{\sim} M \otimes N \otimes P, (x \otimes y) \otimes z \mapsto x \otimes y \otimes z$.

2. Sei zunächst $z \in P$. Die Abbildung $M \times N \to M \otimes N \otimes P, (x, y) \mapsto x \otimes y \otimes z$ ist bilinear in x, y und induziert damit einen Homomorphismus $M \otimes N \to M \otimes N \otimes P, x \otimes y \mapsto x \otimes y \otimes z$.

3. Die Abbildung $(M \otimes N) \times P \to M \otimes N \otimes P, (t, z) \mapsto t \otimes z$ ist bilinear in t, z und induziert damit einen Homomorphismus $(M \otimes N) \otimes P \to M \otimes N \otimes P, (x \otimes y) \otimes z \mapsto x \otimes y \otimes z$.

4. Die Wohldefiniertheit von $M \otimes N \otimes P \to (M \otimes N) \otimes P, x \otimes y \otimes z \mapsto (x \otimes y) \otimes z$ wird analog gezeigt. Dies ist die Umkehrung. □

Seien A, B zwei kommutative Ringe.

Definition 14.13. Ein (A, B)-Bimodul N ist eine abelsche Gruppe N, welche zugleich ein A-Modul und ein B-Modul ist, so daß die beiden Stukturen kompatibel sind, nämlich $a(bx) = b(ax)$ für alle $a \in A$, $b \in B$ und $x \in N$.

Proposition 14.14. *Sei M ein A-Modul, P ein B-Modul und N ein (A, B)-Bimodul. Dann ist $M \otimes_A N$ durch Multiplikation im zweiten Faktor in natürlicher Weise ein B-Modul und $N \otimes_B P$ durch Multiplikation im ersten Faktor in natürlicher Weise ein A-Modul. Schließlich ist $(M \otimes_A N) \otimes_B P \xrightarrow{\sim} M \otimes_A (N \otimes_B P), (x \otimes y) \otimes z \mapsto x \otimes (y \otimes z)$ ein Isomorphismus abelscher Gruppen.* □

14.4. Funktorialität des Tensorproduktes

Beispiel 14.15. Sei A ein kommutativer Ring. Seien $\phi\colon M \to M'$ und $\psi\colon N \to N'$ Homomorphismen von A-Moduln. Es ist $M \times N \to M' \otimes N', (x, y) \mapsto \phi(x) \otimes \psi(y)$ eine A-bilineare Abbildung und induziert daher einen Homomorphismus

$$\phi \otimes \psi\colon M \otimes N \to M' \otimes N', x \otimes y \mapsto \phi(x) \otimes \psi(y)$$

von A-Moduln.

Proposition 14.16. *Sei A ein kommutativer Ring. Seien $M \xrightarrow{\phi} M' \xrightarrow{\phi'} M''$ und $N \xrightarrow{\psi} N' \xrightarrow{\psi'} N''$ Homomorphismen von A-Moduln. Dann ist*

$$(\phi' \circ \phi) \otimes (\psi' \circ \psi) = (\phi' \otimes \psi') \circ (\phi \otimes \psi)\colon M \otimes N \to M'' \otimes N''.$$

Beweis. Die Homomorphismen $(\phi' \circ \phi) \otimes (\psi' \circ \psi)$ und $(\phi' \otimes \psi') \circ (\phi \otimes \psi)$ stimmen auf allen Elementen der Form $x \otimes y \in M \otimes N$ überein. Da diese Elemente $M \otimes N$ erzeugen, folgt die Gleichheit der Homomorphismen. □

15. Skalareinschränkungen und -erweiterungen

15.1. Skalareinschränkung

Sei $\phi\colon A \to B$ ein Homomorphismus kommutativer Ringe. Sei N ein B-Modul. Wir definieren einen A-Modul N^A wie folgt: Die abelsche Gruppe von N^A ist die abelsche Gruppe von N. Die Multiplikation mit Elementen aus A wird durch $ay \coloneqq \phi(a)y$ mit $a \in A$ und $y \in N$ definiert.

Definition 15.1. Der A-Modul N^A heißt die *Skalareinschränkung von N (vermöge ϕ) auf A.*

Beispiel 15.2. Da wir B als Modul über sich selbst auffassen können, erhalten wir insbesondere den A-Modul B^A.

Proposition 15.3. *Sei $\phi\colon A \to B$ ein Homomorphismus kommutativer Ringe. Sei N ein B-Modul. Ist B^A ein endlich erzeugter A-Modul und N ein endlich erzeugter B-Modul, so ist N^A ein endlich erzeugter A-Modul.*

Beweis. Sei N als B-Modul von den Elementen $y_1, \ldots, y_n \in N$ erzeugt. Sei weiter B^A als A-Modul von den Elementen $b_1, \ldots, b_m \in B$ erzeugt. Dann erzeugen die Produkte $b_1y_1, \ldots, b_my_n \in N$ den A-Modul N^A. □

15.2. Skalarerweiterung

Sei $\phi\colon A \to B$ ein Homomorphismus kommutativer Ringe. Sei M ein A-Modul. Wir definieren einen B-Modul M_B wie folgt: Die abelsche Gruppe von M_B ist die abelsche Gruppe von $B^A \otimes_A M$. Die Multiplikation mit Elementen aus B wird durch $b(b' \otimes x) \coloneqq (bb') \otimes x$ mit $b, b' \in B$ und $x \in M$ definiert.

Definition 15.4. Der B-Modul M_B heißt die *Skalarerweiterung von M (vermöge ϕ) auf B*.

Beispiel 15.5. Sei N ein B-Modul. Dann ist $N^A \otimes_A M = N \otimes_A M$, indem wir N als (A, B)-Bimodul auffassen. Insbesondere ist $N^A \otimes_A M$ (durch Multiplikation von links) in kanonischer Weise ein B-Modul. In dieser Situation existiert ein kanonischer Isomorphismus $N \otimes_B M_B \cong N^A \otimes_A M$ von B-Moduln.

Proposition 15.6. *Ist M als A-Modul endlich erzeugt, so ist M_B als B-Modul endlich erzeugt.*

Beweis. Sei M als A-Modul von $x_1, \ldots, x_m \in M$ erzeugt. Dann wird M_B als B-Modul durch $1 \otimes x_1, \ldots, 1 \otimes x_m \in M_B$ erzeugt. $\square$

16. Exaktheitseigenschaften des Tensorproduktes

16.1. Tensorprodukte und Homomorphismenmoduln

Sei A ein kommutativer Ring. Seien M, N, P drei A-Moduln. Sei $\phi\colon M \otimes N \to P$ eine A-lineare Abbildung. Diese definiert eine A-lineare Abbildung $(\phi N)\colon M \to \operatorname{Hom}(N, P), x \mapsto (y \mapsto \phi(x \otimes y))$.

Proposition 16.1. *Die Abbildung*

$$\operatorname{Hom}(M \otimes N, P) \to \operatorname{Hom}(M, \operatorname{Hom}(N, P)), \phi \mapsto (\phi N)$$

ist ein Isomorphismus von A-Moduln.

Beweis.

1. Sei $\psi\colon M \to \operatorname{Hom}(N, P)$ eine A-lineare Abbildung. Diese definiert eine A-lineare Abbildung $(N\psi)\colon M \otimes N \to P, x \otimes y \mapsto \psi(x)(y)$.

2. Die Abbildung $\psi \mapsto (N\psi)$ ist die Umkehrung der Abbildung $\phi \mapsto (\phi N)$. $\square$

16.2. Rechtsexaktheit des Tensorproduktes

Proposition 16.2. *Sei A ein kommutativer Ring. Sei $E\colon M' \xrightarrow{\phi} M \xrightarrow{\psi} M'' \to 0$ eine exakte Sequenz von A-Moduln und N ein weiterer A-Modul. Dann ist auch die Sequenz $E \otimes N\colon M' \otimes N \xrightarrow{\phi \otimes \mathrm{id}_N} M \otimes N \xrightarrow{\psi \otimes \mathrm{id}_N} M'' \otimes N \to 0$ exakt.*

Beweis.

1. Sei P ein beliebiger A-Modul. Aus der Exaktheit von E folgt die Exaktheit der Sequenz $\operatorname{Hom}(E, \operatorname{Hom}(N, P))$.

2. Diese Sequenz ist isomorph zur Sequenz $\operatorname{Hom}(E \otimes N, P)$, welche damit auch exakt ist.

3. Da P beliebig ist, folgt die Exaktheit von $E \otimes N$. $\square$

Bemerkung 16.3. Sei A ein kommutativer Ring. Sei N ein A-Modul. Definieren wir $T(M) := M \otimes N$ und $U(P) := \operatorname{Hom}(N, P)$ für A-Moduln M und P, so haben wir die Existenz eines natürlichen Isomorphismus'

$$\operatorname{Hom}(T(M), P) = \operatorname{Hom}(M, U(P))$$

gezeigt. In der Sprache der Kategorientheorie ist T damit das Linksadjungierte zu U und das Rechtsadjungierte zu T. Der Beweis der letzten Proposition zeigt allgemeiner, daß jeder Funktor, welcher ein linksadjungierter ist, rechtsexakt ist. Entsprechend ist ein Funktor, welcher ein linksadjungierter ist, ein linksexakter.

Bemerkung 16.4. Sei A ein kommutativer Ring. Sei $M' \to M \to M''$ eine exakte Sequenz von A-Moduln. Im allgemeinen ist dann das Tensorprodukt $M' \otimes N \to M \otimes N \to M'' \otimes N$ mit einem beliebigen A-Moduln N nicht mehr exakt.

Beispiel 16.5. Sei die exakte Sequenz $0 \to \mathbb{Z} \xrightarrow{\phi} \mathbb{Z}$ mit $\phi(x) = 2x$ von $\mathbb{Z}$-Moduln gegeben. Sei weiter der $\mathbb{Z}$-Modul $N := \mathbb{Z}/(2)$ gegeben. Das Tensorprodukt $0 \to \mathbb{Z} \otimes N \xrightarrow{\phi \otimes \mathrm{id}_N} \mathbb{Z} \otimes N$ der Sequenz mit N ist nicht exakt, denn für alle $x \otimes y \in \mathbb{Z} \otimes N$ ist $(\phi \otimes \mathrm{id}_N)(x \otimes y) = 2x \otimes y = x \otimes 2y = x \otimes 0 = 0$, also $\phi \otimes \mathrm{id}_N = 0$. Allerdings ist $\mathbb{Z} \otimes N$ nicht der Nullmodul.

16.3. Flachheit

Sei A ein kommutativer Ring. Sei N ein A-Modul.

Definition 16.6. Der A-Modul N heißt *flach*, falls für jede exakte Sequenz E von A-Moduln auch die tensorierte Sequenz $E \otimes N$ exakt ist.

Hilfssatz 16.7. *Sei $\phi \otimes \mathrm{id}_N \colon M' \otimes N \to M \otimes N$ für jede injektive lineare Abbildung $\phi\colon M' \to M$ endlich erzeugter A-Moduln injektiv. Dann ist auch $\phi \otimes \mathrm{id}_N$ für jede injektive lineare Abbildung $\phi\colon M' \to M$ beliebiger A-Moduln injektiv.*

Beweis.

1. Sei also $\phi\colon M' \to M$ eine injektive lineare Abbildung zwischen A-Moduln. Sei $u = \sum x_i' \otimes y_i \in \ker(\phi \otimes \mathrm{id}_N)$, also $\sum \phi(x_i') \otimes y_i = 0 \in M \otimes N$.
2. Sei $M_0' \subset M'$ der durch die x_i' erzeugte Untermodul und sei $u_0 = \sum x_i' \otimes y_i \in M_0' \otimes N$.
3. Es existiert ein endlich erzeugter Untermodul $M_0 \subset M$ mit $\phi(M_0') \subset M_0$, so daß $\sum \phi(x_i') \otimes y_i = 0 \in M_0 \otimes N$. Damit ist also $(\phi_0 \otimes \mathrm{id}_N)(u_0) = 0$, wobei $\phi_0 := \phi|_{M_0'}\colon M_0' \to M_0$.
4. Da M_0', M_0 endlich erzeugt sind, folgt damit nach Voraussetzung, daß $u_0 = 0$, also $u = 0$. □

Proposition 16.8. *Sei A ein kommutativer Ring. Sei N ein A-Modul. Dann sind äquivalent:*

1. *Der A-Modul N ist flach.*

2. *Für jede kurze exakte Sequenz $E\colon 0 \to M' \to M \to M'' \to 0$ von A-Moduln ist die tensorierte Sequenz $E \otimes N$ exakt.*

3. *Für jede injektive A-lineare Abbildung $\phi\colon M' \to M$ zwischen A-Moduln ist die Abbildung $\phi \otimes \mathrm{id}_N\colon M' \otimes N \to M \otimes N$ injektiv.*

4. *Für jede injektive A-lineare Abbildung $\phi\colon M' \to M$ zwischen endlich erzeugten A-Moduln ist die Abbildung $\phi \otimes \mathrm{id}_N\colon M' \otimes N \to M \otimes N$ injektiv.*

Beweis. 1. Die Äquivalenz der ersten beiden Aussagen folgt aus der Tatsache, daß jede lange exakte Sequenz in kurze exakte Sequenzen zerfällt werden kann.

2. Die Äquivalenz der zweiten und dritten Aussage folgt aus der Rechtsexaktheit des Tensorproduktes.

3. Die Äquivalenz der letzten beiden Aussagen folgt aus dem letzten Hilfssatz. □

Proposition 16.9. *Sei $\phi\colon A \to B$ ein Homomorphismus kommutativer Ringe. Ist M ein flacher A-Modul, so ist M_B ein flacher B-Modul.*

Beweis. Dies folgt aus den kanonischen Isomorphismen $N \otimes_B M_B \cong N^A \otimes_A M$ für B-Moduln N. □

17. Algebren

17.1. Definition von Algebren

Sei A ein kommutativer Ring.

Definition 17.1. Eine *kommutative A-Algebra B* ist ein kommutativer Ring B zusammen mit einem Ringhomomorphismus $\phi\colon A \to B$, dem *Strukturmorphismus der Algebra B*.

Bemerkung 17.2. Ist B eine A-Algebra, so können wir insbesondere die Skalareinschränkung B^A definieren. Damit ist eine Multiplikation mit Elementen aus A auf der B zugrundeliegenden abelschen Gruppe durch $ab := \phi(a)b \in B$ mit $a \in A$ und $b \in B$ definiert. Die so definierte Struktur ist kompatibel mit der multiplikativen Struktur auf B.

Beispiel 17.3. Sei K ein Körper und $B \neq 0$ eine kommutative K-Algebra. Da der Strukturmorphismus in diesem Falle injektiv ist, können wir K kanonisch mit seinem Bild in B identifizieren. Damit ist eine kommutative Algebra über einem Körper nichts anderes als ein kommutativer Ring, welcher K als Unterring enthält.

Beispiel 17.4. Sei B ein beliebiger kommutativer Ring. Da genau ein Ringhomomorphismus $\mathbb{Z} \to B$ existiert, nämlich $n \mapsto n \cdot 1_B$, wobei 1_B die Eins in B bezeichnet, wird jeder kommutativer Ring auf genau eine Weise zu einer $\mathbb{Z}$-Algebra.

Sei A ein kommutativer Ring. Seien B, C zwei kommutative A-Algebren.

Definition 17.5. Ein *Homomorphismus* $\chi\colon B \to C$ *von* A*-Algebren* ist ein Ringhomomorphismus $\chi\colon B \to C$, welcher einen Homomorphismus $\chi\colon B^A \to C^A$ von A-Moduln induziert.

Ein Ringhomomorphismus $\chi\colon B \to C$ ist also genau dann ein Homomorphismus von A-Algebren, falls $\chi(ab) = a\chi(b)$ für alle $a \in A$ und $b \in B$.

Bemerkung 17.6. Seien $\phi\colon A \to B$ und $\psi\colon A \to C$ die beiden Strukturhomomorphismen. Ein Ringhomomorphismus $\chi\colon B \to C$ ist genau dann ein Homomorphismus von A-Algebren, falls $\chi \circ \phi = \psi$.

17.2. Endliche Algebren und Algebren endlichen Typs

Definition 17.7. Sei A ein kommutativer Ring. Eine kommutative A-Algebra B heißt eine *endliche* A*-Algebra*, falls B^A als A-Modul endlich erzeugt ist.

Es ist B also genau dann eine endliche A-Algebra, falls endlich viele Elemente $b_1, \ldots, b_n \in B$ existieren, so daß jedes andere Element von B als eine A-Linearkombination der b_i geschrieben werden kann.

Definition 17.8. Sei A ein kommutativer Ring. Eine kommutative A-Algebra B heißt eine A*-Algebra endlichen Typs*, falls endlich viele Elemente $b_1, \ldots, b_n \in B$ existieren, so daß jedes Element von B als Polynom in den b_i mit Koeffizienten aus A geschrieben werden kann.

Es ist B also genau dann eine A-Algebra endlichen Typs, falls ein surjektiver A-Algebrenhomomorphismus von einem Polynomring $A[x_1, \ldots, x_n]$ auf B existiert.

Beispiel 17.9. Ein kommutativer Ring B heißt *endlich erzeugt*, falls er eine $\mathbb{Z}$-Algebra endlichen Typs ist. Dies ist gleichbedeutend damit, daß endlich viele Elemente $b_1, \ldots, b_n$ von B existieren, so daß jedes Element von B als Polynom in den b_i mit ganzzahligen Koeffizienten geschrieben werden kann.

18. Tensorprodukte von Algebren

18.1. Definition des Tensorproduktes zweier Algebren

Sei A ein kommutativer Ring, und seien B und C zwei kommutative A-Algebren. Da B und C insbesondere A-Moduln sind, können wir den A-Modul $D := B^A \otimes_A C^A$ betrachten. Die Abbildung $B \times C \times B \times C \mapsto D, (b, c, b', c') \mapsto bb' \otimes cc'$ ist A-linear in jedem Faktor, so daß sie einen Homomorphismus $B \otimes C \otimes B \otimes C \to D, b \otimes c \otimes b' \otimes c' \mapsto bb' \otimes cc'$ von A-Moduln induziert. Durch Klammersetzung erhalten wir also einen Homomorphismus $D \otimes D \to D$ von A-Moduln, welcher wiederum zu einer A-bilinearen Abbildung

$$\mu\colon D \times D \to D, (b \otimes c, b' \otimes c') \mapsto bb' \otimes cc'$$

korrespondiert.

Sei A ein kommutativer Ring und seien $\phi\colon A \to B$ und $\psi\colon A \to C$ zwei kommutative A-Algebren. Wir definieren eine kommutative A-Algebra $B \otimes_A C$ wie folgt: Als abelsche Gruppe sei $B \otimes_A C$ die abelsche Gruppe des A-Moduls $D = B^A \otimes_A C^A$. Die Multiplikation ist $B \otimes_A C$ wird durch die eben definierte Abbildung

$$\mu\colon (B \otimes_A C) \times (B \otimes_A C) \to B \otimes_A C, (b \otimes c, b' \otimes c') \mapsto bb' \otimes cc'$$

gegeben. Die Eins ist durch $1_B \otimes 1_C \in B \otimes_A C$ gegeben. Schließlich ist der Strukturhomomorphismus der A-Algebra durch $A \to B \otimes_A C, a \mapsto \phi(a) \otimes 1 = 1 \otimes \psi(a)$ gegeben.

Definition 18.1. Die kommutative A-Algebra $B \otimes_A C$ heißt das *Tensorprodukt der kommutativen A-Algebren B und C.*

Bemerkung 18.2. Sei A ein kommutativer Ring. Seien B, C zwei kommutative A-Algebren. Als A-Algebra trägt $B \otimes_A C$ insbesondere die Struktur eines A-Moduls, nämlich $(B \otimes_A C)^A$. Auf der anderen Seite ist die $B \otimes_A C$ zugrundeliegende abelsche Gruppe in natürlicher Weise ein A-Modul, nämlich $B^A \otimes_A C^A$. Beide A-Modulstrukturen stimmen überein, das heißt die identische Abbildung $\mathrm{id}\colon B^A \otimes_A C^A \to (B \otimes_A C)^A$ ist ein Isomorphismus von A-Moduln.

19. Gerichtete Limiten

19.1. Definition des gerichteten Limes

Definition 19.1. Eine *gerichtete Menge* ist eine nicht leere teilweise geordnete Menge $I = (I, \leq)$, so daß für jedes Paar von Elementen $i, j \in I$ ein $k \in I$ mit $i \leq k$ und $j \leq k$ existiert.

Eine teilweise geordnete Menge ist also genau gerichtet, wenn jede endliche Teilmenge eine obere Schranke besitzt.

Sei A ein Ring. Sei I eine gerichtete Menge. Sei weiter $(M_i)_{i \in I}$ eine Familie von A-Moduln. Schließlich sei für jedes Paar $i, j \in I$ mit $i \leq j$ ein Homomorphismus $\mu^i_j\colon M_i \to M_j$ von A-Moduln gegeben.

Definition 19.2. Das Datum $M_\bullet = (M_i, \mu^i_j)$ heißt ein *gerichtetes System von A-Moduln über I*, falls folgende Axiome erfüllt sind:

1. Für alle $i \in I$ ist $\mu^i_i = \mathrm{id}_{M_i}\colon M_i \to M_i$.

2. Für alle $i \leq j \leq k$ ist $\mu^i_k = \mu^j_k \circ \mu^i_j\colon M_i \to M_k$.

Seien A ein Ring und I eine gerichtete Menge. Sei $M_\bullet = (M_i, \mu^i_j)$ ein gerichtetes System von A-Moduln über I. Sei $C := \bigoplus\limits_{i \in I} M_i$. Wir identifizieren die M_i mit ihren kanonischen Bildern in C. Sei D der Untermodul von C, welcher von allen Elementen der Form $x_i - \mu^i_j(x_i)$ mit $i \leq j$ und $x_i \in M_i$ erzeugt wird. Sei $\mu\colon C \twoheadrightarrow M := C/D$ die kanonische Projektion. Sei schließlich $\mu^i := \mu|M_i\colon M_i \to M$.

Definition 19.3. Der Modul M heißt der *gerichtete Limes von $M_\bullet$*. Die kanonischen A-linearen Abbildungen $\mu^i\colon M_i \to M$ heißen die *Strukturhomomorphismen von M*.

Notation 19.4. Wir schreiben $\varinjlim_{i\in I} M_i$ für den gerichteten Limes des gerichteten Systems $M_\bullet$.

19.2. Universelle Eigenschaft des gerichteten Limes

Seien A ein Ring und I eine gerichtete Menge. Sei $M_\bullet = (M_i, \mu^i_j)$ ein gerichtetes System von A-Moduln über I. Seien die $\mu^i\colon M_i \to M := \varinjlim_{i\in I} M_i$ die Strukturhomomorphismen.

Proposition 19.5. *Sei $x \in M$. Dann existiert ein $i \in I$ und ein $x_i \in M_i$ mit $\mu^i(x_i) = x$.* □

Proposition 19.6. *Seien $i \in I$ und $x_i \in M_i$ mit $\mu^i(x_i) = 0 \in M$. Dann existiert ein $j \geq i$ mit $\mu^i_j(x_i) = 0 \in M_j$.*

Proposition 19.7. *Sei N ein A-Modul. Sei weiter für alle $i \in I$ eine A-lineare Abbildung $\alpha^i\colon M_i \to N$ gegeben, so daß $\alpha^i = \alpha^j \circ \mu^i_j$ für alle Paare $i \leq j$. Dann existiert genau eine A-lineare Abbildung $\alpha\colon M \to N$ mit $\alpha^i = \alpha \circ \mu^i$ für alle $i \in I$.* □

Beispiel 19.8. Sei A ein Ring. Sei M ein A-Modul. Sei $(M_i)_{i\in I}$ eine Familie von Untermoduln von M. Für je zwei Elemente $i, j \in I$ existieren ein $k \in I$ mit $M_i + M_j \subset M_k$. Durch die Setzung $i \leq j \iff M_i \subset M_j$ wird I zu einer gerichteten Menge. Weiter sei im Falle $i \leq j$ die Abbildung $\mu^i_j\colon M_i \to M_j$ die Inklusionsabbildung. Dann ist

$$\varinjlim_{i\in I} M_i \cong \sum_{i\in I} M_i = \bigcup_{i\in I} M_i.$$

Damit ist insbesondere jeder A-Modul der gerichtete Limes seiner endlich erzeugten Untermoduln.

19.3. Exakte Sequenzen gerichteter Systeme

Seien A ein Ring und I eine gerichtete Menge. Seien $M_\bullet = (M_i, \mu^i_j)$ und $N_\bullet = (N_i, \nu^i_j)$ zwei gerichtete Systeme von A-Moduln über I. Mit $\mu^i\colon M^i \to M := \varinjlim_{i\in I} M_i$ und $\nu^i\colon N^i \to N := \varinjlim_{i\in I} N_i$ bezeichnen wir die Strukturhomomorphismen der gerichteten Limiten. Sei $\phi_\bullet = (\phi_i)$ eine Familie von A-linearen Abbildungen $\phi_i\colon M_i \to N_i$.

Definition 19.9. Die Familie $\phi_\bullet$ heißt ein *Homomorphismus $\phi_\bullet\colon M_\bullet \to N_\bullet$ gerichteter Systeme*, falls $\phi_j \circ \mu^i_j = \nu^i_j \circ \phi_i\colon M_i \to N_j$ für alle $i \leq j$.

Seien A ein Ring und I eine gerichtete Menge. Seien $M_\bullet = (M_i, \mu^i_j)$ und $N_\bullet = (N_i, \nu^i_j)$ zwei gerichtete Systeme von A-Moduln über I. Mit $\mu^i\colon M^i \to M := \varinjlim_{i\in I} M_i$ und $\nu^i\colon N^i \to N := \varinjlim_{i\in I} N_i$ bezeichnen wir die Strukturhomomorphismen der gerichteten Limiten.

Proposition 19.10. *Es existiert genau ein Homomorphismus* $\phi \coloneqq \varinjlim_{i\in I} \phi_i \colon M \to N$ *von* A*-Moduln, so daß* $\phi \circ \mu^i = \nu^i \circ \phi_i \colon M_i \to N$ *für alle* $i \in I$.

Definition 19.11. Seien A ein Ring und I eine gerichtete Menge. Eine Sequenz $M_\bullet \xrightarrow{\phi_\bullet} N_\bullet \xrightarrow{\psi_\bullet} P_\bullet$ von gerichteten Systemen von A-Moduln über I heißt *exakt*, falls die induzierten Sequenzen $M_i \xrightarrow{\phi_i} N_i \xrightarrow{\psi_i} P_i$ für alle $i \in I$ exakt sind.

Proposition 19.12. *Seien* A *ein Ring und* I *eine gerichtete Menge. Sei* $M_\bullet \xrightarrow{\phi_\bullet} N_\bullet \xrightarrow{\psi_\bullet} P_\bullet$ *eine exakte Sequenz von gerichteten Systemen von* A*-Moduln über* I*. Dann ist die induzierte Sequenz* $\varinjlim_{i\in I} M_i \xrightarrow{\varinjlim_{i\in I}\phi_i} \varinjlim_{i\in I} N_i \xrightarrow{\varinjlim_{i\in I}\psi_i} \varinjlim_{i\in I} P_i$ *exakt.* □

19.4. Tensorprodukte und gerichtete Limiten

Seien A ein Ring und I eine gerichtete Menge. Sei N ein A-Modul. Sei weiter $M_\bullet = (M_i, \mu^i_j)$ ein gerichtetes System von A-Moduln über I.

Beispiel 19.13. Zusammen mit den Abbildungen $\mu^i_j \otimes \mathrm{id}_N \colon M_i \otimes N \to M_j \otimes N$ für alle $i \leq j$ wird $M_\bullet \otimes N = (M_i \otimes N)$ zu einem gerichteten System über I.

Seien $\mu^i \colon M_i \to M \coloneqq \varinjlim_{i\in I} M_i$ und $\iota^i \colon M_i \otimes N \to P \coloneqq \varinjlim_{i\in I}(M_i \otimes N)$ die Strukturhomomorphismen für $i \in I$. Nach der universellen Eigenschaft des gerichteten Limes induzieren die $\mu^i \otimes \mathrm{id}_N \colon M_i \otimes N \to M \otimes N$ eine eindeutige A-lineare Abbildung $\psi \colon P \to M \otimes N$ mit $\mu^i \otimes \mathrm{id}_N = \psi \circ \iota^i$ für alle i.

Proposition 19.14. *Die* A*-lineare Abbildung* ψ *ist ein Isomorphismus* $\varinjlim_{i\in I}(M_i \otimes N) \xrightarrow{\sim} (\varinjlim_{i\in I} M_i) \otimes N$. □

19.5. Gerichtete Limiten von Ringen

Sei I eine gerichtete Menge. Sei $(A_i)_{i\in I}$ eine Familie von Ringen über I. Für $i \leq j$ sei $\alpha^i_j \colon A_i \to A_j$ ein Ringhomomorphismus. Die additiven Gruppen der Ringe A_i mögen ein gerichtetes System von $\mathbb{Z}$-Moduln $A_\bullet = (A_i, \alpha^i_j)$ bilden. Seien die $\alpha^i \colon A_i \to \varinjlim_{i\in I} A_i$ die Strukturhomomorphismen, welche Homomorphismen abelscher Gruppen sind.

Proposition 19.15. *Auf* $\varinjlim_{i\in I} A_i$ *existiert genau eine Struktur eines Ringes, so daß die* $\alpha^i \colon A^i \to A$ *Ringhomomorphismen werden.* □

Proposition 19.16. *Ist* $\varinjlim_{i\in I} A_i = 0$*, so existiert ein* $i \in I$ *mit* $A_i = 0$. □

Sei A ein kommutativer Ring. Sei $(B_i)_{i\in I}$ eine Familie kommutativer A-Algebren. Ist $J \subset I$ eine endliche Teilmenge, so sei $B_J = \bigotimes_{j\in J} B_j$. Ist $K \subset I$ eine weitere endliche

Teilmenge mit $K \subset J$, so sei $\beta_J^K : B_K \to B_J$ der kanonische Homomorphismus von A-Algebren, welcher $\bigotimes_{k \in K} b_k$ auf $\bigotimes_{j \in J} b_j$ abbildet, wobei wir $b_j = 1$ für $j \notin K$ setzen. Der gerichtete Limes $B := \bigotimes_{i \in I} B_i := \varinjlim_{J \subset I} B_J$ ist in kanonischer Weise eine A- Algebra, so daß die Strukturmorphismen $B_J \to B$ Morphismen von A-Algebren werden.

Definition 19.17. Die kommutative A-Algebra $\bigotimes_{i \in I} B_i$ heißt das *Tensorprodukt über die Familie* (B_i).

Teil III. Lokalisierungen von Ringen und Moduln

20. Lokalisierungen von Ringen und Moduln

20.1. Lokalisierung eines Ringes

Definition 20.1. Sei A ein Ring. Eine *multiplikativ abgeschlossene Teilmenge von* A ist eine Teilmenge $S \subset A$ mit $1 \in S$ und $xy \in S$ für alle $x, y \in S$.

Eine Teilmenge $S \subset A$ ist also genau dann multiplikativ abgeschlossen, wenn sie ein Untermonoid des multiplikativen Monoides von A ist.

Beispiel 20.2. Sei A ein kommutativer Ring. Dann ist $A \setminus \{0\}$ genau dann multiplikativ abgeschlossen, wenn A ein Integritätsbereich ist.

Beispiel 20.3. Sei $\mathfrak{a}$ ein Ideal A. Dann ist $1 + \mathfrak{a} = \{1 + x \mid x \in \mathfrak{a}\} \subset A$ multiplikativ abgeschlossen.

Sei A ein kommutativer Ring. Sei $S \subset A$ multiplikativ abgeschlossen. Wir betrachten die Menge der Paare $(a, s) \in A \times S$. Wir nennen zwei Paare $(a, s), (b, t)$ *äquivalent*, wenn $(at - bs)u = 0$ für ein $u \in S$.

Proposition 20.4. *Die so definierte Relation ist eine Äquivalenzrelation.*

Beweis.

1. Die Relation ist offensichtlich reflexiv und symmetrisch.
2. Sei (a, s) äquivalent zu (b, t) und (b, t) äquivalent zu (c, u). Damit existieren $v, w \in S$ mit $(at - bs)v = (bu - ct)w = 0$.
3. Multiplizieren wir die linke Gleichung mit uw und die rechte mit sv, können wir b eliminieren und erhalten $(au - cs)tvw = 0$.
4. Da S multiplikativ abgeschlossen ist, ist $tvw \in S$. Damit sind (a, s) und (c, u) äquivalent. □

Sei A ein kommutativer Ring. Sei $S \subset A$ multiplikativ abgeschlossen. Die Äquivalenzklasse $(a, s) \in A \times S$ eines Paares nennen wir einen *Bruch*. Wir schreiben die Äquivalenzklasse dieses Paares als $\frac{a}{s}$. Mit $S^{-1}A$ bezeichnen wir die Menge aller dieser Brüche. Auf dieser Menge definieren wir eine Addition durch

$$\frac{a}{s} + \frac{b}{t} = \frac{at + bs}{st}$$

und eine Multiplikation durch

$$\frac{a}{s}\frac{b}{t} = \frac{ab}{st}.$$

Proposition 20.5. *Mit den so definierten Operationen wird $S^{-1}A$ zu einem wohldefinierten kommutativen Ring.* □

Sei A ein kommutativer Ring. Sei S eine multiplikativ abgeschlossene Teilmenge. Die Abbildung $\iota\colon A \to S^{-1}A, a \mapsto \frac{a}{1}$ ist ein Ringhomomorphismus.

Definition 20.6. Der kommutative Ring $S^{-1}A$ heißt die *Lokalisierung von A nach S* und $\iota\colon A \to S^{-1}A$ ihr *Strukturhomomorphismus*.

Proposition 20.7 (Universelle Eigenschaft der Lokalisierung)**.** *Sei $\phi\colon A \to B$ ein Ringhomomorphismus, so daß $\phi(s) \in B^\times$ für alle $s \in S$. Dann existiert genau ein Ringhomomorphismus $\psi\colon S^{-1}A \to B$ mit $\phi = \psi \circ \iota$.*

Beweis.

1. Eindeutigkeit: Sei $\psi\colon S^{-1}A \to B$ mit $\psi(\frac{a}{1}) = \phi(a)$ für alle $a \in A$. Ist weiter $s \in S$, so gilt dann $\psi(\frac{a}{s}) = \psi(\frac{a}{1}(\frac{s}{1})^{-1}) = \psi(\frac{a}{1})\psi(\frac{s}{1})^{-1} = \phi(a)\phi(s)^{-1}$.
2. Existenz: Es ist zu zeigen, daß $\psi\colon S^{-1}A \to B, \frac{a}{s} \mapsto \phi(a)\phi(s)^{-1}$ wohldefiniert ist. Dazu sei $\frac{a}{s} = \frac{a'}{s'}$, also $(as' - a's)u = 0$ für ein $u \in S$.
3. Es folgt $(\phi(a)\phi(s') - \phi(a')\phi(s))\phi(u) = 0$.
4. Da $\phi(u) \in B^\times$, folgt $\phi(a)\phi(s)^{-1} = \phi(a')\phi(s')^{-1}$. □

20.2. Eigenschaften der Lokalisierung

Proposition 20.8. *Sei A ein kommutativer Ring. Sei $S \subset A$ multiplikativ abgeschlossen. Sei $\iota\colon A \to S^{-1}A$ der Strukturhomomorphismus. Dann gilt:*

1. *Für alle $s \in S$ ist $\iota(s)$ eine Einheit in $S^{-1}A$.*
2. *Ist $a \in A$ mit $\iota(a) = 0$, so ist $as = 0$ für ein $s \in S$.*
3. *Jedes Element in $S^{-1}A$ ist von der Form $\iota(a)\iota(s)^{-1}$ mit $a \in A$ und $s \in S$.* □

Folgerung 20.9 (Universelle Eigenschaft der Lokalisierung)**.** *Sei A ein kommutativer Ring. Sei $S \subset A$ multiplikativ abgeschlossen. Sei $\iota\colon A \to S^{-1}A$ der Strukturhomomorphismus. Sei $\phi\colon A \to B$ ein Homomorphismus kommutativer Ringe mit folgenden Eigenschaften:*

1. Für alle $s \in S$ ist $\phi(s)$ eine Einheit in B.

2. Ist $a \in A$ mit $\phi(a) = 0$, so ist $as = 0$ für ein $s \in S$.

3. Jedes Element von B ist von der Form $\phi(a)\phi(s)^{-1}$ mit $a \in A$ und $s \in S$.

Dann existiert ein eindeutiger Isomorphismus $\psi\colon S^{-1}A \to B$ mit $\phi = \psi \circ \iota$.

Beweis. 1. Es ist zu zeigen, daß der aufgrund der ersten Eigenschaft wohldefinierte Ringhomomorphismus $\psi\colon S^{-1}A \to B, \frac{a}{s} \mapsto \phi(a)\phi(s)^{-1}$ ein Isomorphismus ist.

2. Da jedes Element in B von der Form $\phi(a)\phi(s)^{-1}$ ist, ist ψ offensichtlich surjektiv.

3. Sei schließlich $\frac{a}{s} \in S^{-1}A$ im Kern von ψ. Damit ist insbesondere $\phi(a) = 0$, also $at = 0$ für ein $t \in S$. Es folgt, daß $\frac{a}{s} = \frac{0}{1} = 0 \in S^{-1}A$. Also ist ψ auch injektiv. □

20.3. Beispiele von Lokalisierungen

Sei A ein kommutativer Ring. Sei $\mathfrak{p}$ ein Primideal in A.

Beispiel 20.10. Die Teilmenge $A \setminus \mathfrak{p} \subset A$ ist multiplikativ abgeschlossen.

Notation 20.11. Wir schreiben $A_\mathfrak{p} := (A \setminus \mathfrak{p})^{-1}A$ und nennen $A_\mathfrak{p}$ die *Lokalisierung von A bei $\mathfrak{p}$* oder den *Halm von A an $\mathfrak{p}$*.

Beispiel 20.12. Es ist $\mathfrak{m} := \{\frac{a}{s} \mid a \in \mathfrak{p}, s \in A \setminus \mathfrak{p}\}$ ein echtes Ideal im Halm $A_\mathfrak{p}$. Ist $\frac{b}{t} \in A_\mathfrak{p} \setminus \mathfrak{m}$, so ist $b \in A \setminus \mathfrak{p}$, also $\frac{b}{t} \in (A_\mathfrak{p})^\times$. Es folgt, daß $A_\mathfrak{p}$ ein lokaler Ring mit maximalem Ideal $\mathfrak{m}$ ist. Es ist $\mathfrak{m} = A_\mathfrak{p}\mathfrak{p}$.

Beispiel 20.13. Sei A ein Integritätsbereich. Dann ist $S := A \setminus \{0\}$ multiplikativ abgeschlossen, so daß wir die Lokalisierung $S^{-1}A$ bilden können. Da S nur reguläre Elemente (und zwar alle) enthält, ist $A \to S^{-1}A, a \mapsto \frac{a}{1}$ ein injektiver Ringhomomorphismus, so daß wir A als Unterring von $S^{-1}A$ auffassen können. Ist $\frac{p}{q} \in S^{-1}A \setminus \{0\}$, so ist $(\frac{p}{q})^{-1} = \frac{q}{p}$. Damit ist $S^{-1}A$ ein Körper. Wir nennen $S^{-1}A$ den *Quotientenkörper von A*. Es ist der kleinste Körper, welcher A als Unterring enthält.

Beispiel 20.14. Der Körper $\mathbb{Q}$ der rationalen Zahlen ist der Quotientenkörper des Ringes $\mathbb{Z}$ der ganzen Zahlen.

Sei A ein kommutativer Ring.

Beispiel 20.15. Sei $S \subset A$ eine multiplikativ abgeschlossene Teilmenge. Dann gilt $S^{-1}A = 0$ genau dann, wenn $0 \in S$.

Beispiel 20.16. Sei $f \in A$. Dann ist $\{f^n \mid n \in \mathbb{N}_0\}$ eine multiplikativ abgeschlossene Teilmenge.

Notation 20.17. Wir schreiben $A[f^{-1}] := \{f^n \mid n \in \mathbb{N}_0\}^{-1}A$ und nennen $A[f^{-1}]$ die *Lokalisierung von A außerhalb von f*.

Beispiel 20.18. Sei p eine Primzahl. Dann ist $\mathbb{Z}_{(p)}$ die Menge aller rationalen Zahlen $\frac{m}{n}$, wobei n teilerfremd zu p ist.

Beispiel 20.19. Sei $f \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$. Dann ist $\mathbb{Z}[f^{-1}]$ die Menge der rationalen Zahlen der Form $\frac{m}{f^n}$, wobei $n \in \mathbb{N}_0$.

Beispiel 20.20. Sei $A \coloneqq K[x_1, \ldots, x_n]$ der Polynomring in n Variablen über einem Körper K. Für jedes Primideal $\mathfrak{p}$ in A ist dann $A_\mathfrak{p}$ der Ring derjenigen rationalen Funktionen $\frac{f}{g}$ in den x_i mit $g \notin \mathfrak{p}$.

20.4. Lokalisierung von Moduln

Sei A ein kommutativer Ring. Seien $S \subset A$ multiplikativ abgeschlossen und M ein A-Modul. Wir nennen zwei Paare $(m, s), (m', s') \in M \times S$ *äquivalent*, wenn $(ms' - m's)u = 0$ für ein $u \in S$.

Proposition 20.21. *Die so definierte Relation ist eine Äquivalenzrelation.* □

Die Menge der Äquivalenzklasse $\frac{m}{s}$ der Paare (m, s) bezeichnen wir mit $S^{-1}M$.

Proposition 20.22. *Mit der offensichtlichen Definition der Modulstruktur wird $S^{-1}M$ zu einem $S^{-1}A$-Modul.* □

Sei A ein kommutativer Ring. Seien $S \subset A$ multiplikativ abgeschlossen und M ein A-Modul. Vermöge des Strukturhomomorphismus $A \to S^{-1}A$ fassen wir $S^{-1}A$ als A-Algebra auf. Die Abbildung $\iota\colon M \to (S^{-1}M)^A, m \mapsto \frac{m}{1}$ ist ein Homomomorphismus von A-Moduln.

Definition 20.23. Der $S^{-1}A$-Modul $S^{-1}M$ heißt die *Lokalisierung von M nach S* und $\iota\colon M \to (S^{-1}M)^A$ sein *Strukturhomomorphismus*.

Sei A ein kommutativer Ring. Sei M ein A-Modul.

Notation 20.24. Sei $\mathfrak{p}$ ein Primideal in A. Wir schreiben $M_\mathfrak{p} \coloneqq (A \setminus \mathfrak{p})^{-1}M$ und nennen den $A_\mathfrak{p}$-Modul $M_\mathfrak{p}$ die *Lokalisierung von M bei $\mathfrak{p}$* oder den *Halm von M an $\mathfrak{p}$*.

Das Bild eines Schnittes $m \in M$ in $M_\mathfrak{p}$ unter dem Strukturhomomorphismus $M \to M_\mathfrak{p}$ heißt der *Keim von m an $\mathfrak{p}$*.

Notation 20.25. Sei $f \in A$. Wir schreiben $M[f^{-1}] \coloneqq \{f^n \mid n \in \mathbb{N}_0\}^{-1}M$ und nennen $M[f^{-1}]$ die *Lokalisierung von M außerhalb von f*.

Das Bild eines Schnittes $m \in M$ in $M[f^{-1}]$ unter dem Strukturhomomorphismus $M \to M[f^{-1}]$ heißt die *Einschränkung von m außerhalb von f*.

20.5. Exaktheit der Lokalisierung

Sei A ein kommutativer Ring. Seien $S \subset A$ multiplikativ abgeschlossen und $\phi\colon M \to N$ ein Homomorphismus von A-Moduln. Dann ist

$$S^{-1}\phi\colon S^{-1}M \to S^{-1}N, \frac{m}{s} \mapsto \frac{\phi(m)}{s}$$

ein Homomorphismus von $S^{-1}A$-Moduln.

Proposition 20.26. *Sei $\psi\colon N \to P$ ein weiterer Homomorphismus von A-Moduln. Dann ist $S^{-1}(\psi \circ \phi) = S^{-1}\psi \circ S^{-1}\phi\colon S^{-1}M \to S^{-1}P$.* □

Proposition 20.27. *Sei A ein kommutativer Ring. Sei $S \subset A$ multiplikativ abgeschlossen. Ist $M' \xrightarrow{\phi} M \xrightarrow{\psi} M''$ exakt bei M, so ist auch $S^{-1}M' \xrightarrow{S^{-1}\phi} S^{-1}M \xrightarrow{S^{-1}\psi} S^{-1}M''$ exakt.*

Beweis.
1. Wegen $\psi \circ \phi = 0$ ist auch $(S^{-1}\psi) \circ (S^{-1}\phi) = S^{-1}0 = 0$, also $\operatorname{im} S^{-1}\phi \subset \ker S^{-1}\psi$.

2. Sei $\frac{m}{s} \in \ker S^{-1}\psi$, also $\frac{\psi(m)}{s} = 0 \in S^{-1}M''$. Damit existiert ein $t \in S$ mit $\psi(tm) = t\psi(m) = 0 \in M''$.

3. Damit existiert ein $m' \in M'$ mit $\phi(m') = tm$. Es folgt, daß $\frac{m}{s} = \frac{\phi(m')}{st} = (S^{-1}\phi)(\frac{m'}{st})$. □

Beispiel 20.28. Sei A ein kommutativer Ring. Sei S multiplikativ abgeschlossen. Sei M' ein Untermodul eines A-Moduls M. Da die Lokalisierung exakt ist, ist die Lokalisierung $S^{-1}M' \to S^{-1}M$ der Inklusion $M' \hookrightarrow M$ wieder injektiv. Damit können wir $S^{-1}M'$ als Untermodul von $S^{-1}M$ ansehen.

Sei A ein kommutativer Ring. Seien $S \subset A$ multiplikativ abgeschlossen und M ein A-Modul. Seien $N, P \subset M$ Untermoduln.

Folgerung 20.29. *Es gilt $S^{-1}(N + P) = S^{-1}N + S^{-1}P \subset S^{-1}M$.*

Beweis. Folgt sofort aus den Definitionen. □

Folgerung 20.30. *Die $S^{-1}A$-Moduln $S^{-1}(M/N)$ und $(S^{-1}M)/(S^{-1}N)$ sind isomorph.*

Beweis. Aus der Exaktheit von $0 \to N \to M \to M/N \to 0$ folgt die Exaktheit von $0 \to S^{-1}N \to S^{-1}M \to S^{-1}(M/N) \to 0$. □

Proposition 20.31. *Sei A ein kommutativer Ring. Seien $S \subset A$ multiplikativ abgeschlossen und M ein A-Modul. Seien $N, P \subset M$ Untermoduln. Es gilt $S^{-1}(N \cap P) = S^{-1}N \cap S^{-1}P \subset S^{-1}M$.*

Beweis.
1. Die Inklusion $S^{-1}(N \cap P) \subset S^{-1}N \cap S^{-1}P$ ist offensichtlich.

2. Seien umgekehrt $\frac{y}{s} = \frac{z}{t}$ mit $y \in N, z \in P$ und $s, t \in S$. Dann ist $u(ty - sz) = 0$ für ein $u \in S$. Es folgt, daß $w := uty = usz \in N \cap P$. Damit ist $\frac{y}{s} = \frac{w}{stu} \in S^{-1}(N \cap P)$. □

20.6. Lokalisierung als Basiswechsel

Proposition 20.32. *Sei A ein kommutativer Ring. Seien $S \subset A$ multiplikativ abgeschlossen und M ein A-Modul. Dann existiert ein eindeutiger Isomorphismus $\phi\colon S^{-1}A \otimes_A M \to S^{-1}M$, $\frac{a}{s} \otimes m \mapsto \frac{am}{s}$.*

Beweis.

1. Da $\frac{am}{s}$ bilinear in $\frac{a}{s}$ und m ist, ist ϕ nach der universellen Eigenschaft des Tensorproduktes wohldefiniert und eindeutig.
2. Die Surjektivität von ϕ ist offensichtlich.
3. Sei $\sum_i \frac{a_i}{s_i} \otimes m_i \in S^{-1}A \otimes M$ ein beliebiges Element. Mit $s := \prod_i s_i \in S$ und $t_i := \prod_{j \neq i} s_j \in S$ haben wir $\sum_i \frac{a_i}{s_i} \otimes m_i = \frac{1}{s} \otimes \sum_i a_i t_i m_i$, jedes Element von $S^{-1}A \otimes M$ ist also von der Form $\frac{1}{s} \otimes m$.
4. Sei $\phi(\frac{1}{s} \otimes m) = 0$. Dann ist $\frac{m}{s} = 0 \in S^{-1}M$, also $tm = 0 \in M$ für ein $t \in S$. Damit ist $\frac{1}{s} \otimes m = \frac{1}{st} \otimes tm = 0$. Also ist ϕ injektiv. □

Proposition 20.33. *Sei A ein kommutativer Ring. Sei $S \subset A$ multiplikativ abgeschlossen. Dann ist $S^{-1}A$ eine flache A-Algebra.*

Beweis.

1. Tensorieren eines A-Moduls mit $S^{-1}A$ über A entspricht Lokalisieren dieses A-Moduls an S.
2. Lokalisieren ist exakt. □

Sei A ein kommutativer Ring. Seien M, N zwei A-Moduln.

Proposition 20.34. *Sei $S \subset A$ multiplikativ abgeschlossen. Dann existiert ein eindeutiger Isomorphismus $\phi\colon S^{-1}M \otimes_{S^{-1}A} S^{-1}N \to S^{-1}(M \otimes_A N)$, $\frac{m}{s} \otimes \frac{n}{t} \mapsto \frac{m \otimes n}{st}$ von $S^{-1}A$-Moduln.*

Beweis. Wir haben die Isomorphismen $S^{-1}M \otimes_{S^{-1}A} S^{-1}N \xrightarrow{\sim} (S^{-1}A \otimes_A M) \otimes_{S^{-1}A} (S^{-1}A \otimes_A N) \xrightarrow{\sim} S^{-1}A \otimes_A (M \otimes_{S^{-1}A} S^{-1}A \otimes_A N) \xrightarrow{\sim} S^{-1}A \otimes_A (M \otimes_A N) \xrightarrow{\sim} S^{-1}(M \otimes_A N)$. □

Beispiel 20.35. Sei $\mathfrak{p}$ ein Primideal in A. Dann gilt für die Halme $M_\mathfrak{p} \otimes_{A_\mathfrak{p}} N_\mathfrak{p} = (M \otimes_A N)_\mathfrak{p}$.

21. Lokale Eigenschaften

21.1. Trivialität von Moduln

Wir nennen eine Eigenschaft kommutativer Ringe (bzw. Moduln über einem kommutativen Ring) *lokal*, falls folgendes gilt:

Ein kommutativer Ring A (bzw. ein Modul M über einem kommutativen Ring) hat die Eigenschaft genau dann, wenn alle seine Halme $A_\mathfrak{p}$ (bzw. $M_\mathfrak{p}$) an allen Primidealen $\mathfrak{p}$ die Eigenschaft hat.

Proposition 21.1. *Sei A ein kommutativer Ring. Sei M ein A-Modul. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:*

1. $M = 0$.
2. $M_{\mathfrak{p}} = 0$ *für alle Primideale* $\mathfrak{p}$ *von* A.
3. $M_{\mathfrak{m}} = 0$ *für alle maximalen Ideale* $\mathfrak{m}$ *von* A.

Beweis.
1. Aus der ersten folgt sicherlich die zweite Aussage und aus der zweiten die dritte.
2. Sei $M_{\mathfrak{m}} = 0$ für alle maximalen Ideale $\mathfrak{m}$ von A. Sei $x \in M$. Angenommen $x \neq 0$. Dann ist das Ideal $\operatorname{ann}(x)$ in einem maximalen Ideal $\mathfrak{m}$ von A enthalten.
3. Es ist $\frac{x}{1} = 0 \in M_{\mathfrak{m}}$, also $tx = 0$ für ein $t \in A \setminus \mathfrak{m}$. Damit ist $t \notin \operatorname{ann}(x)$, Widerspruch. □

21.2. Injektivität und Surjektivität

Proposition 21.2. *Sei A ein kommutativer Ring. Sei $\phi\colon M \to N$ ein Homomorphismus von A-Moduln. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:*

1. $\phi\colon M \to N$ *ist injektiv.*
2. $\phi_{\mathfrak{p}}\colon M_{\mathfrak{p}} \to N_{\mathfrak{p}}$ *ist injektiv für alle Primideale* $\mathfrak{p}$ *von* A.
3. $\phi_{\mathfrak{m}}\colon M_{\mathfrak{m}} \to N_{\mathfrak{m}}$ *ist injektiv für alle maximalen Ideale* $\mathfrak{m}$ *von* A.

Beweis.
1. Lokalisierung erhält Injektivität.
2. Jedes maximale Ideal ist ein Primideal.
3. Sei $\phi_{\mathfrak{m}}$ für alle maximalen Ideale $\mathfrak{m}$ injektiv. Sei $M' = \ker \phi$. Dann ist $0 \to M' \to M \to N$ exakt, also auch $0 \to M'_{\mathfrak{m}} \to M_{\mathfrak{m}} \to N_{\mathfrak{m}}$. Damit ist $M'_{\mathfrak{m}} = \ker \phi_{\mathfrak{m}} = 0$. Es folgt nach der letzten Aussage, daß $M' = 0$. Also ist ϕ injektiv. □

Proposition 21.3. *Sei A ein kommutativer Ring. Sei $\phi\colon M \to N$ ein Homomorphismus von A-Moduln. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:*

1. $\phi\colon M \to N$ *ist surjektiv.*
2. $\phi_{\mathfrak{p}}\colon M_{\mathfrak{p}} \to N_{\mathfrak{p}}$ *ist surjektiv für alle Primideale* $\mathfrak{p}$ *von* A.
3. $\phi_{\mathfrak{m}}\colon M_{\mathfrak{m}} \to N_{\mathfrak{m}}$ *ist surjektiv für alle maximalen Ideale* $\mathfrak{m}$ *von* A. □

21.3. Flachheit

Proposition 21.4. *Sei A ein kommutativer Ring. Sei M ein A-Modul. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:*

1. *M ist ein flacher A-Modul.*
2. *$M_\mathfrak{p}$ ist ein flacher $A_\mathfrak{p}$-Modul für alle Primideale $\mathfrak{p}$ von A.*
3. *$M_\mathfrak{m}$ ist ein flacher $A_\mathfrak{m}$-Modul für alle maximalen Ideale $\mathfrak{m}$ von A.*

Beweis. 1. $M_\mathfrak{p} = A_\mathfrak{p} \otimes_A M$ und Skalarerweiterung erhält Flachheit.

2. Jedes maximale Ideal ist ein Primideal.
3. Sei $M_\mathfrak{m}$ flach über $A_\mathfrak{m}$ für alle maximalen Ideale $\mathfrak{m}$. Sei $N \to P$ ein injektiver Homomorphismus von A-Moduln. Es folgt, daß $N_\mathfrak{m} \to P_\mathfrak{m}$ injektiv ist. Nach Voraussetzung ist dann $(N \otimes_A M)_\mathfrak{m} = N_\mathfrak{m} \otimes_{A_\mathfrak{m}} M_\mathfrak{m} \to P_\mathfrak{m} \otimes_{A_\mathfrak{m}} M_\mathfrak{m} = (P \otimes_A M)_\mathfrak{m}$ injektiv. Da $\mathfrak{m}$ beliebig ist, folgt, daß $N \otimes_A M \to P \otimes_A M$ injektiv ist. $\square$

22. Idealerweiterungen und -kontraktionen in Lokalisierungen

22.1. Erweiterungen und Kontraktionen

Sei A ein kommutativer Ring. Sei $S \subset A$ multiplikativ abgeschlossen.

Beispiel 22.1. Sei $\mathfrak{a}$ ein Ideal in A. Dann gilt für die Erweiterung $(S^{-1}A)\mathfrak{a} = S^{-1}\mathfrak{a}$, denn jedes Element in $(S^{-1}A)\mathfrak{a}$ ist von der Form $\sum_i \frac{a_i}{s_i}$ mit $a_i \in \mathfrak{a}$ und $s_i \in S$, und Ausdrücke dieser Form können wir auf einen gemeinsamen Nenner bringen.

Proposition 22.2. *Alle Ideale in $S^{-1}A$ sind erweiterte Ideale, also von der Form $S^{-1}\mathfrak{a}$.*

Beweis. Sei $\mathfrak{b}$ ein Ideal in $S^{-1}A$. Sei $\frac{x}{s} \in \mathfrak{b}$. Dann ist $\frac{x}{1}$ in $\mathfrak{b}$, also $x \in A \cap \mathfrak{b}$. Damit folgt $\frac{x}{s} \in S^{-1}(A \cap \mathfrak{b})$. $\square$

Sei A ein kommutativer Ring. Seien $S \subset A$ multiplikativ abgeschlossen und $\mathfrak{a}$ ein Ideal in A.

Proposition 22.3. *Es ist $A \cap (S^{-1}\mathfrak{a}) = \bigcup_{u \in S} (\mathfrak{a} : u)$.*

Beweis. $x \in A \cap (S^{-1}\mathfrak{a}) \iff \exists a \in \mathfrak{a} \exists s \in S \colon \frac{x}{1} = \frac{a}{s} \iff \exists a \in \mathfrak{a} \exists s, t \in S \colon (xs - a)t = 0 \iff \exists u \in S \colon ux \in \mathfrak{a} \iff x \in \bigcup_{u \in S} (\mathfrak{a} : u)$. $\square$

Beispiel 22.4. Es $S^{-1}\mathfrak{a} = (1)$ genau dann, wenn $\mathfrak{a} \cap S \neq \emptyset$.

Proposition 22.5. *Sei A ein kommutativer Ring. Seien $S \subset A$ multiplikativ abgeschlossen und $\mathfrak{a}$ ein Ideal in A. Es ist $\mathfrak{a}$ genau dann ein kontrahiertes Ideal bezüglich $A \to S^{-1}A$, also ein Ideal der Form $A \cap \mathfrak{b}$, $\mathfrak{b} \subset S^{-1}A$, wenn kein Element von S ein Nullteiler in $A/\mathfrak{a}$ ist.*

Beweis. $\mathfrak{a}$ ist genau dann kontrahiert, wenn $A \cap (S^{-1}\mathfrak{a}) \subset \mathfrak{a}$, wenn also aus $sx \in \mathfrak{a}$ mit $s \in S, x \in A$ schon $x \in \mathfrak{a}$ folgt. Das ist wiederum gleichbedeutend damit, daß kein $s \in S$ ein Nullteiler in $A/\mathfrak{a}$ ist. □

Proposition 22.6. *Sei A ein kommutativer Ring. Die Lokalisierung nach einer multiplikativ abgeschlossenen Teilmenge $S \subset A$ kommutiert mit folgenden Operationen auf Idealen: endliche Summen, endliche Produkte, endliche Schnitte und Wurzeln.*

Beweis.
1. Endliche Summen und Produkte vertauschen mit Idealerweiterungen, und die Lokalisierung eines Ideals nach S entspricht der Idealerweiterung in $S^{-1}A$.

2. Endliche Schnitte von Idealen vertauschen mit Lokalisierung, denn dies gilt allgemeiner für Untermoduln.

3. Sei $\mathfrak{a} \subset A$ ein Ideal. Daß $S^{-1}\sqrt{\mathfrak{a}} \subset \sqrt{S^{-1}\mathfrak{a}}$ folgt aus allgemeinen Eigenschaften der Erweiterung von Idealen. Die andere Inklusion ist einfach. □

Sei A ein kommutativer Ring. Sei $S \subset A$ multiplikativ abgeschlossen.

Folgerung 22.7. *Ist $\mathfrak{n}$ das Nilradikal von A, so ist $S^{-1}\mathfrak{n}$ das Nilradikal von $S^{-1}A$.* □

22.2. Primideale und Lokalisierungen

Proposition 22.8. *Sei A ein kommutativer Ring. Sei $S \subset A$ multiplikativ abgeschlossen. Durch $\mathfrak{q} = S^{-1}\mathfrak{p}$ ist eine bijektive, ordnungserhaltende Korrespondenz zwischen den Primidealen $\mathfrak{p}$ von A mit $\mathfrak{p} \cap S = \emptyset$ und den Primidealen $\mathfrak{q}$ von $S^{-1}A$ gegeben.*

Beweis.
1. Ist $\mathfrak{q}$ ein Primideal in $S^{-1}A$, so ist $\mathfrak{p} = A \cap \mathfrak{q}$ als Kontraktion eines Primideals wieder ein Primideal.

2. Ist $\mathfrak{p}$ ein Primideal in A, so ist $A/\mathfrak{p}$ ein Integritätsbereich. Ist $\bar{S}$ das Bild von S in $A/\mathfrak{p}$, so ist $S^{-1}A/S^{-1}\mathfrak{p} \cong \bar{S}^{-1}(A/\mathfrak{p})$ und damit entweder der Nullring oder wieder ein Integritätsbereich.

3. Der erste Fall tritt genau dann ein, wenn $S^{-1}\mathfrak{p} = (1)$, also genau dann, wenn $\mathfrak{p} \cap S \neq \emptyset$. Der zweite Fall tritt genau dann ein, wenn $S^{-1}\mathfrak{p}$ ein Primideal ist. □

Bemerkung 22.9. Sei A ein kommutativer Ring. Daß zu einem nicht nilpotenten Element $f \in A$ ein Primideal $\mathfrak{p}$ von A mit $f \notin \mathfrak{p}$ existiert, kann mittels Lokalisierung so bewiesen werden: Da f nicht nilpotent ist, ist $A[f^{-1}] \neq 0$. Damit besitzt $A[f^{-1}]$ ein maximales Ideal $\mathfrak{m}$. Es folgt, daß $\mathfrak{p} = A \cap \mathfrak{m}$ ein Primideal mit $f \notin \mathfrak{p}$ ist.

Sei $\mathfrak{p}$ ein Primideal in einem kommutativen Ring A.

Folgerung 22.10. *Durch* $\mathfrak{r} = A_\mathfrak{p}\mathfrak{q}$ *ist eine bijektive, ordnungserhaltende Korrespondenz zwischen den Primidealen* $\mathfrak{q}$ *von* A *mit* $\mathfrak{q} \subset \mathfrak{p}$ *und den Primidealen* $\mathfrak{r}$ *im Halm* $A_\mathfrak{p}$ *gegeben.* □

Bemerkung 22.11. Sei $\mathfrak{q} \subset \mathfrak{p}$ ein weiteres Primideal. Lokalisieren bei $\mathfrak{p}$ schneidet also alle Primideale außer denen heraus, die in $\mathfrak{p}$ enthalten sind. Auf der anderen Seite schneidet der Wechsel von A nach $A/\mathfrak{q}$ alle Primideale außer denen heraus, die $\mathfrak{q}$ enthalten. Beim Übergang von A auf den Ring $A_\mathfrak{p}/(A_\mathfrak{p}\mathfrak{q}) = (A/\mathfrak{q})_{\bar{\mathfrak{p}}}$ beschränken wir unsere Betrachtung also auf alle Primideale zwischen $\mathfrak{q}$ und $\mathfrak{p}$ beschränken. Im Spezialfall $\mathfrak{p} = \mathfrak{q}$ erhalten wir den *Restklassenkörper* $A(\mathfrak{p})$ *von* A *an* $\mathfrak{p}$, also den Restklassenkörper des Halmes $A_\mathfrak{p}$ beziehungsweise den Quotientenkörper des Quotienten $A/\mathfrak{p}$.

Proposition 22.12. *Sei* $\phi\colon A \to B$ *ein Homomorphismus kommutativer Ringe. Dann ist ein Primideal* $\mathfrak{p}$ *in* A *genau dann eine Kontraktion eines Primideals von* B*, falls* $\mathfrak{p} = A \cap (B\mathfrak{p})$.

Beweis.

1. Ist $\mathfrak{p} = A \cap \mathfrak{q}$ für ein Primideal $\mathfrak{q}$ von B, so ist $A \cap (B\mathfrak{p}) = A \cap (B(A \cap \mathfrak{q})) = A \cap \mathfrak{q} = \mathfrak{p}$.
2. Sei umgekehrt $\mathfrak{p} = A \cap (B\mathfrak{p})$. Sei S das Bild von $A \setminus \mathfrak{p}$ in B. Dann ist $S \cap (B\mathfrak{p}) = \emptyset$, also ist $S^{-1}(B\mathfrak{p})$ in einem maximalen Ideal $\mathfrak{m}$ in $S^{-1}B$ enthalten.
3. Sei $\mathfrak{q} \coloneqq B \cap \mathfrak{m}$. Es folgt, daß $\mathfrak{q}$ ein Primideal ist. Weiter ist $\mathfrak{q} \supset B\mathfrak{p}$ und $\mathfrak{q} \cap S = \emptyset$. Damit ist $A \cap \mathfrak{q} = \mathfrak{p}$. □

22.3. Lokalisierungen und der Annulator

Proposition 22.13. *Sei* A *ein kommutativer Ring. Sei* M *ein endlich erzeugter* A*-Modul. Sei* $S \subset A$ *multiplikativ abgeschlossen. Dann ist* $S^{-1}\operatorname{ann}(M) = \operatorname{ann}(S^{-1}M)$.

Beweis.

1. Sei die Aussage wahr für zwei Untermoduln N und P von M. Dann gilt sie auch für $N+P$: $S^{-1}\operatorname{ann}(N+P) = S^{-1}(\operatorname{ann} N \cap \operatorname{ann} P) = S^{-1}\operatorname{ann} N \cap S^{-1}\operatorname{ann} P = \operatorname{ann}(S^{-1}N) \cap \operatorname{ann}(S^{-1}P) = \operatorname{ann}(S^{-1}N + S^{-1}P) = \operatorname{ann}(S^{-1}(N+P))$.
2. Damit reicht es die Aussage für einen Modul der Form $M = A/\mathfrak{a}$, wobei $\mathfrak{a}$ ein Ideal in A ist, zu beweisen. Es ist $\mathfrak{a} = \operatorname{ann}(M)$. Weiter ist $S^{-1}M \cong (S^{-1}A)/(S^{-1}\mathfrak{a})$, also $\operatorname{ann}(S^{-1}M) = S^{-1}\mathfrak{a}$. □

Folgerung 22.14. *Sei* A *ein kommutativer Ring. Seien* N, P *zwei Untermoduln eines* A*-Moduls* M*. Sei* $S \subset A$ *multiplikativ abgeschlossen. Ist* P *endlich erzeugt, so gilt* $S^{-1}(N : P) = (S^{-1}N : S^{-1}P)$.

Beweis. Es ist $(N : P) = \operatorname{ann}((N+P)/N)$. □

Beispiel 22.15. Seien $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}$ Ideale von A. Ist $\mathfrak{b}$ endlich erzeugt, so gilt $S^{-1}(\mathfrak{a} : \mathfrak{b}) = (S^{-1}\mathfrak{a} : S^{-1}\mathfrak{b})$.

Teil IV. Primärzerlegung

23. Primärzerlegung I

23.1. Primäre Ideale

Ein Primideal in einem kommutativen Ring ist in gewisser Weise eine Verallgemeinerung einer Primzahl. Die entsprechende Verallgemeinerung einer Potenz einer Primzahl ist ein Primärideal.

Sei A ein kommutativer Ring.

Definition 23.1. Ein Ideal $\mathfrak{q}$ in A heißt *primär*, falls $1 \notin \mathfrak{q}$ und falls aus $xy \in \mathfrak{q}$ schon $x \in \mathfrak{q}$ oder $y^n \in \mathfrak{q}$ für ein $n \in \mathbb{N}_0$ folgt.

Das Ideal $\mathfrak{q}$ ist also genau dann primär, falls die nilpotenten Elemente in $A/\mathfrak{q}$ gerade die Nullteiler in $A/\mathfrak{q}$ sind. Die symmetrische Bedingung „$x^n \in \mathfrak{q}$ oder $y^n \in \mathfrak{q}$ für ein $n \in \mathbb{N}_0$“ führt zu einem echt allgemeineren Begriff, wie das Beispiel $\mathfrak{q} = (x^2, xy) \subset K[x, y]$ zeigt.

Beispiel 23.2. Jedes Primideal in A ist auch primär.

Beispiel 23.3. Sei $\phi\colon A \to B$ ein Homomorphismus kommutativer Ringe. Ist dann $\mathfrak{q}$ ein primäres Ideal in B, ist die Kontraktion $A \cap \mathfrak{q}$ primär in A, denn $A/(A \cap \mathfrak{q})$ ist ein Unterring von $B/\mathfrak{q}$.

Sei $\mathfrak{q}$ ein primäres Ideal in einem kommutativen Ring A.

Proposition 23.4. *Es ist $\sqrt{\mathfrak{q}}$ das kleinste Primideal $\mathfrak{p}$ mit $\mathfrak{p} \supset \mathfrak{q}$.*

Beweis.
1. Da $\sqrt{\mathfrak{q}} = \bigcap_{\mathfrak{p}' \supset \mathfrak{q}} \mathfrak{p}'$, wobei $\mathfrak{p}'$ für ein Primideal von A steht, reicht es zu zeigen, daß $\sqrt{\mathfrak{q}}$ ein Primideal ist.
2. Sei dazu $xy \in \sqrt{\mathfrak{q}}$. Dann ist $x^m y^m = (xy)^m \in \mathfrak{q}$ für ein $m \in \mathbb{N}_0$.
3. Da $\mathfrak{q}$ primär ist, folgt $x^m \in \mathfrak{q}$ oder $y^{nm} \in \mathfrak{q}$ für ein $n \in \mathbb{N}_0$.
4. Daraus folgt $x \in \sqrt{\mathfrak{q}}$ oder $y \in \sqrt{\mathfrak{q}}$. □

Definition 23.5. Ist $\mathfrak{p} = \sqrt{\mathfrak{q}}$, so heißt $\mathfrak{q}$ ein $\mathfrak{p}$-*primäres Ideal von A*.

Beispiel 23.6. Die primären Ideale in $\mathbb{Z}$ sind die Ideale der Form (0) und (p^n), wobei p eine Primzahl ist, denn diese sind die einzigen Ideale, deren Wurzel ein Primideal ist, und es ist klar, daß diese Ideale primär sind.

Beispiel 23.7. Sei $A := K[x, y]$ der Polynomring in zwei Variablen über einem Körper. Sei $\mathfrak{q} := (x, y^2)$. Dann ist $A/\mathfrak{q} \cong k[y]/(y^2)$, ein Ring, in dem alle Nullteiler Vielfache von y sind, also nilpotent sind. Damit ist $\mathfrak{q}$ ein primäres Ideal, und zwar mit Wurzel $\mathfrak{p} := (x, y)$. Da $\mathfrak{p}^2 \subsetneq \mathfrak{q} \subsetneq \mathfrak{p}$ sehen wir, daß ein primäres Ideal im allgemeinen keine Potenz eines Primideals sein muß.

Beispiel 23.8. Seien K ein Körper und $A := K[x, y, z]/(xy - z^2)$. Mit $\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}$ bezeichnen wir die Bilder von x, y, z in A. Es ist $\mathfrak{p} := (\bar{x}, \bar{z})$ ein Primideal in A, denn $A/\mathfrak{p} \cong K[y]$ ist ein Integritätsbereich. Wir haben $\bar{x}\bar{y} = \bar{z}^2 \in \mathfrak{p}^2$, aber $\bar{x} \notin \mathfrak{p}^2$ und $\bar{y} \notin \sqrt{\mathfrak{p}^2} = \mathfrak{p}$, also ist $\mathfrak{p}^2$ nicht primär.

Wir sehen also, daß Potenzen von Primidealen nicht notwendigerweise primär sind. Sei A ein kommutativer Ring.

Proposition 23.9. *Sei $\mathfrak{a}$ ein Ideal in A. Ist $\mathfrak{m} := \sqrt{\mathfrak{a}}$ ein maximales Ideal, so ist $\mathfrak{a}$ ein $\mathfrak{m}$-primäres Ideal.*

Beweis.
1. Das Bild von $\mathfrak{m}$ in $A/\mathfrak{a}$ ist das Nilradikal von $A/\mathfrak{a}$. Da jedes Primideal das Nilradikal enthält, besitzt $A/\mathfrak{a}$ damit genau ein Primideal.
2. Damit ist jedes Element in $A/\mathfrak{a}$ entweder eine Einheit oder nilpotent, und damit ist jeder Nullteiler in $A/\mathfrak{a}$ auch nilpotent. □

Beispiel 23.10. Ist $\mathfrak{m}$ ein maximales Ideal in A, so sind die Potenzen $\mathfrak{m}^n$ mit $n > 0$ alle $\mathfrak{m}$-primär.

23.2. Schnitte und Idealquotienten primärer Ideale

Hilfssatz 23.11. *Sei $\mathfrak{p}$ ein Primideal in einem kommutativen Ring A. Dann ist der Schnitt $\mathfrak{q} := \bigcap_{i=1}^{n} \mathfrak{q}_i$ endlich vieler $\mathfrak{p}$-primärer Ideale $\mathfrak{q}_1, \dots, \mathfrak{q}_n$ wieder $\mathfrak{p}$-primär.*

Beweis.
1. $\sqrt{\mathfrak{q}} = \sqrt{\bigcap_i \mathfrak{q}_i} = \bigcap_i \sqrt{\mathfrak{q}_i} = \mathfrak{p}$.
2. Sei $xy \in \mathfrak{q}$ mit $x \notin \mathfrak{q}$. Dann ist $xy \in \mathfrak{q}_i$ mit $x \notin \mathfrak{q}_i$ für ein i. Es folgt $y \in \mathfrak{p}$, da $\mathfrak{q}_i$ ein $\mathfrak{p}$-primäres Ideal ist. □

Hilfssatz 23.12. *Sei $\mathfrak{p}$ ein Primideal eines kommutativen Ringes A. Sei $\mathfrak{q}$ ein $\mathfrak{p}$-primäres Ideal und $x \in A$. Dann gilt:*

1. *Ist $x \in \mathfrak{q}$, so $(\mathfrak{q} : x) = (1)$.*
2. *Ist $x \notin \mathfrak{q}$, so ist $(\mathfrak{q} : x)$ ein $\mathfrak{p}$-primäres Ideal.*
3. *Ist $x \notin \mathfrak{p}$, so ist $(\mathfrak{q} : x) = \mathfrak{q}$.*

Beweis.
1. Die erste und die dritte Aussage folgt sofort aus den Definitionen.
2. Sei $x \notin \mathfrak{q}$. Für $y \in (\mathfrak{q} : x)$ folgt dann $xy \in \mathfrak{q}$, also $y \in \mathfrak{p}$. Damit ist $\mathfrak{q} \subset (\mathfrak{q} : x) \subset \mathfrak{p}$. Durch Wurzelziehen folgt $\sqrt{(\mathfrak{q} : x)} = \mathfrak{p}$.
3. Sei weiter $yz \in (\mathfrak{q} : x)$ mit $x \notin \mathfrak{q}$. Sei $y \notin \mathfrak{p}$. Aus $xyz \in \mathfrak{q}$ folgt dann $xz \in \mathfrak{q}$, also $z \in (\mathfrak{q} : x)$. □

23.3. Primärzerlegungen

Definition 23.13. Sei $\mathfrak{a}$ ein Ideal in einem kommutativen Ring A. Ein Ausdruck von $\mathfrak{a}$ als endlicher Schnitt $\mathfrak{a} = \bigcap_{i=1}^{n} \mathfrak{q}_i$ primärer Ideale $\mathfrak{q}_i$ heißt *Primärzerlegung von* $\mathfrak{a}$. Sind die $\sqrt{\mathfrak{q}_i}$ paarweise verschieden und gilt $\mathfrak{q}_i \not\supset \bigcap_{j\neq i} \mathfrak{q}_j$ für alle i, so heißt die Primärzerlegung *minimal.*

Bemerkung 23.14. Nach dem vorletzten Hilfssatz können wir jede Primärzerlegung eines Ideals zu einer minimalen reduzieren.

Bemerkung 23.15. Im allgemeinen muß nicht jedes Ideal eine Primärzerlegung besitzen. Im Falle, daß es eine hat, heißt es *zerlegbar*.

Satz 23.16 (Der erste Eindeutigkeitssatz)**.** *Sei* $\mathfrak{a}$ *ein zerlegbares Ideal in einem kommutativen Ring A. Sei* $\mathfrak{a} = \bigcap_{i=1}^{n} \mathfrak{q}_i$ *eine minimale Primärzerlegung von* $\mathfrak{a}$*. Sei* $\mathfrak{p}_i := \sqrt{\mathfrak{q}_i}$*. Dann sind die Ideale* $\mathfrak{p}_i$ *genau diejenigen Primideale von A, welche von der Form* $\sqrt{(\mathfrak{a} : x)}$ *mit* $x \in A$ *sind. Insbesondere sind die* $\mathfrak{p}_i$ *unabhängig von der Primärzerlegung von A. Sie heißen die zu* $\mathfrak{a}$ *assoziierten Primideale.*

Beweis.

1. $\sqrt{(\mathfrak{a} : x)} = \sqrt{(\bigcap_i \mathfrak{q}_i : x)} = \bigcap_i \sqrt{(\mathfrak{q}_i : x)} = \bigcap_{\mathfrak{q}_j \not\ni x} \mathfrak{p}_j$.
2. Ist $\mathfrak{p} := \sqrt{(\mathfrak{a} : x)}$ für ein $x \in A$ prim, folgt damit $\mathfrak{p} = \mathfrak{p}_j$ für ein j.
3. Umgekehrt folgt aus der Minimalität der Zerlegung, daß für jedes i ein $x \notin \mathfrak{q}_i$ mit $x \in \bigcap_{j\neq i} \mathfrak{q}_j$ existiert. Dafür gilt $\sqrt{(\mathfrak{a} : x)} = \mathfrak{p}_i$. □

Sei $\mathfrak{a}$ ein zerlegbares Ideal in einem kommutativen Ring A.

Bemerkung 23.17. Sei $\mathfrak{p}$ ein assoziiertes Primideal zu $\mathfrak{a}$. Aus dem letzten Beweis und dem letzten Hilfssatz folgt, daß ein $x \in A$ existiert, so daß $(\mathfrak{a} : x)$ ein $\mathfrak{p}$-primäres Ideal ist.

Bemerkung 23.18. Sehen wir $A/\mathfrak{a}$ als A-Modul an, ist der Eindeutigkeitssatz äquivalent dazu zu sagen, daß die zu $\mathfrak{a}$ assoziierten Primideale genau diejenigen Primideale sind, welche als Wurzeln von Annulatoren von Elementen von $A/\mathfrak{a}$ auftauchen.

23.4. Isolierte und minimale Primideale

Definition 23.19. Sei $\mathfrak{a}$ ein zerlegbares Ideal eines kommutativen Ringes A. Die minimalen Elemente der Menge der zu $\mathfrak{a}$ assoziierten Primideale heißen die *isolierten Primideale zu* $\mathfrak{a}$. Die übrigen zu $\mathfrak{a}$ assoziierten Primideale heißen die *eingebetteten Primideale zu* $\mathfrak{a}$.

Beispiel 23.20. Sei K ein Körper. Sei $A = K[x, y]$. Sei $\mathfrak{a} = (x^2, xy)$. Dann ist $\mathfrak{a} = \mathfrak{p}_1 \cap \mathfrak{p}_2^2$ mit $\mathfrak{p}_1 = (x)$ und $\mathfrak{p}_2 = (x, y)$. Da $\mathfrak{p}_2$ maximal ist, ist $\mathfrak{p}_2^2$ ein primäres Ideal. Damit sind $\mathfrak{p}_1$ und $\mathfrak{p}_2$ die zu $\mathfrak{a}$ assoziierten Ideale. In diesem Beispiel ist $\mathfrak{p}_1 \subset \mathfrak{p}_2$, weiter haben wir $\sqrt{\mathfrak{a}} = \mathfrak{p}_1 \cap \mathfrak{p}_2 = \mathfrak{p}_1$, allerdings ist $\mathfrak{a}$ selbst kein primäres Ideal. Es ist $\mathfrak{p}_2$ ein eingebettetes Primideal zu $\mathfrak{a}$.

Die Begriffe „isoliert“ und „eingebettet“ kommen aus der algebraischen Geometrie.

Proposition 23.21. *Sei $\mathfrak{a}$ ein zerlegbares Ideal eines kommutativen Ringes. Jedes Primideal $\mathfrak{p}$ mit $\mathfrak{p} \supset \mathfrak{a}$ enthält ein isoliertes Primideal zu $\mathfrak{a}$.*

Die isolierten Primideale zu $\mathfrak{a}$ sind damit genau die minimalen Elemente der Menge aller Primideale, welche $\mathfrak{a}$ umfassen.

Beweis. Sei $\mathfrak{a} = \bigcap\limits_{i=1}^{n} \mathfrak{q}_i$ eine Primärzerlegung von $\mathfrak{a}$. Aus $\mathfrak{p} \supset \bigcap\limits_{i} \mathfrak{q}_i$ folgt $\mathfrak{p} = \sqrt{\mathfrak{p}} \supset \bigcap\limits_{i} \sqrt{\mathfrak{q}_i}$. Damit muß $\mathfrak{p} \supset \sqrt{\mathfrak{q}_i}$ für ein i gelten. Damit umfaßt $\mathfrak{p}$ ein isoliertes Primideal zu $\mathfrak{a}$. □

Bemerkung 23.22. Sei K ein Körper. Im Ring $K[x,y]$ sind $(x^2, xy) = (x) \cap (x,y)^2$ und $(x) \cap (x^2, y)$ zwei verschiedene Primärzerlegungen von (x^2, xy). Damit sind primären Komponenten eines zerlegbaren Ideals im allgemeinen nicht eindeutig. In Kürze werden wir allerdings gewisse Eindeutigkeitseigenschaften kennenlernen.

24. Primärzerlegung II

24.1. Primärzerlegung und das Nullideal

Proposition 24.1. *Sei $\mathfrak{a}$ ein zerlegbares Ideal eines kommutativen Ringes A. Sei $\mathfrak{a} = \bigcap\limits_{i=1}^{n} \mathfrak{q}_i$ eine minimale Primärzerlegung. Sei $\mathfrak{p}_i := \sqrt{\mathfrak{q}_i}$. Dann gilt $\bigcup\limits_{i=1}^{n} \mathfrak{p}_i = \{x \in A \mid (\mathfrak{a} : x) \neq \mathfrak{a}\}$.*

Folgerung 24.2. *Ist das Nullideal in A zerlegbar, so ist die Menge D der Nullteiler von A die Vereinigung der zu (0) assoziierten Primideale.*

Beweis der Proposition. Aus der Zerlegbarkeit von $\mathfrak{a}$ folgt die Zerlegbarkeit von $(0) \subset A/\mathfrak{a}$, denn $(0) = \bigcap_{i \in I} \bar{\mathfrak{q}}_i$, wobei $\bar{\mathfrak{q}}_i$ das Bild von $\mathfrak{q}_i$ in $A/\mathfrak{a}$ ist, welches primär ist. Damit reicht es, die Folgerung zu beweisen. □

Beweis der Folgerung.

1. Zunächst ist $D = \bigcup\limits_{x \neq 0} \sqrt{(0 : x)}$. Auf der anderen Seite wissen wir aus dem Beweis des ersten Eindeutigkeitssatzes, daß $\sqrt{(0 : x)} = \bigcap\limits_{\mathfrak{q}_j \not\ni x} \mathfrak{p}_j \subset \mathfrak{p}_i$ für ein i. Damit gilt $D \subset \bigcup\limits_{i=1}^{n} \mathfrak{p}_i$.

2. Auf der anderen Seite ist jedes $\mathfrak{p}_i$ von der Form $\sqrt{(0 : x)}$ mit $x \neq 0$, also $\bigcup\limits_{i=1}^{n} \mathfrak{p}_i \subset D$. □

Bemerkung 24.3. Für einen kommutativen Ring A, in dem das Nullideal zerlegbar ist, gilt also:

1. Die Menge der Nullteiler von A ist die Vereinigung aller Primideale, die assoziiert zu (0) sind.

2. Die Menge der nilpotenten Elemente ist der Schnitt aller (isolierten) Primideale, die zu (0) assoziiert sind.

24.2. Primäre Ideale und Lokalisierung

Proposition 24.4. *Sei $\mathfrak{p}$ ein Primideal in einem kommutativen Ring A. Sei $\mathfrak{q}$ ein $\mathfrak{p}$-primäres Ideal. Sei $S \subset A$ multiplikativ abgeschlossen. Dann gilt:*

1. *Ist $S \cap \mathfrak{p} \neq \emptyset$, so folgt $S^{-1}\mathfrak{q} = (1)$.*
2. *Ist $S \cap \mathfrak{p} = \emptyset$, so ist $S^{-1}\mathfrak{q}$ ein $S^{-1}\mathfrak{p}$-primäres Ideal und für seine Kontraktion gilt $A \cap S^{-1}\mathfrak{q} = \mathfrak{q}$.*

Beweis.

1. Ist $s \in S \cap \mathfrak{p}$, so ist $s^n \in S \cap \mathfrak{q}$ für ein $n \in \mathbb{N}_0$. Damit enthält $S^{-1}\mathfrak{q}$ das Element $\frac{s^n}{1}$, welches eine Einheit in $S^{-1}A$ ist.
2. Ist $S \cap \mathfrak{p} = \emptyset$, so folgt aus $s \in S$ und $as \in \mathfrak{q}$ schon $a \in \mathfrak{q}$. Wegen $A \cap S^{-1}\mathfrak{q} = \bigcup_{s \in S} (\mathfrak{q} : s)$ folgt damit $A \cap S^{-1}\mathfrak{q} = \mathfrak{q}$. Außerdem ist $\sqrt{S^{-1}\mathfrak{q}} = S^{-1}\sqrt{\mathfrak{q}} = S^{-1}\mathfrak{p}$. Daß $S^{-1}\mathfrak{q}$ primär ist, ist schließlich einfach. □

Folgerung 24.5. *Sei A ein kommutativer Ring. Sei $S \subset A$ multiplikativ abgeschlossen. Durch $\mathfrak{r} = S^{-1}\mathfrak{q}$ ist eine bijektive, ordnungserhaltende Korrespondenz zwischen den primären Idealen $\mathfrak{q}$ von A mit $\sqrt{\mathfrak{q}} \cap S = \emptyset$ und den primären Idealen von $S^{-1}A$ gegeben.*

Beweis. Folgt aus der letzten Proposition zusammen mit der Tatsache, daß die Kontraktion eines primären Ideals ein primäres Ideal ist. □

24.3. Sättigung eines Ideals

Definition 24.6. Sei A ein kommutativer Ring. Sei $S \subset A$ multiplikativ abgeschlossen. Die *Sättigung $S(\mathfrak{a})$ eines Ideals $\mathfrak{a}$ von A bezüglich S* ist das Ideal $S(\mathfrak{a}) := A \cap S^{-1}\mathfrak{a}$, also die Kontraktion der Erweiterung des Ideals bezüglich der Lokalisierung $S^{-1}A$.

Proposition 24.7. *Sei $\mathfrak{a}$ ein zerlegbares Ideal in einem kommutativen Ring A. Sei $S \subset A$ multiplikativ abgeschlossen. Sei $\mathfrak{a} = \mathfrak{q}_1 \cap \cdots \cap \mathfrak{q}_n$ eine minimale Primärzerlegung von $\mathfrak{a}$. Sei $\mathfrak{p}_i := \sqrt{\mathfrak{q}_i}$. Weiter seien die $\mathfrak{q}_i$ so numeriert, daß $S \cap \mathfrak{p}_i = \emptyset \iff i \leq m$ für ein $0 \leq m \leq n$. Dann sind $S^{-1}\mathfrak{a} = \bigcap_{i=1}^{m} S^{-1}\mathfrak{q}_i$ und $S(\mathfrak{a}) = \bigcap_{i=1}^{m} \mathfrak{q}_i$ minimale Primärzerlegungen.*

Beweis.

1. $S^{-1}\mathfrak{a} = \bigcap_{i=1}^{n} S^{-1}\mathfrak{q}_i = \bigcap_{i=1}^{m} S^{-1}\mathfrak{q}_i$, und $S^{-1}\mathfrak{q}_i$ ist ein $S^{-1}\mathfrak{p}_i$-primäres Ideal für $i \leq m$.
2. Da die $\mathfrak{p}_i$ paarweise verschieden sind, gilt dies auch für die $S^{-1}\mathfrak{p}_i$ für $i \leq m$, so daß $\bigcap_{i=1}^{m} S^{-1}\mathfrak{q}_i$ minimal ist.
3. Kontraktion liefert die entsprechende Aussage für $S(\mathfrak{a})$. □

Sei $\mathfrak{a}$ ein zerlegbares Ideal in einem kommutativen Ring A.

Definition 24.8. Eine Menge $\mathfrak{S}$ von zu $\mathfrak{a}$ assoziierten Primidealen heißt *isoliert*, falls sie folgende Bedingung erfüllt: Ist $\mathfrak{p}'$ ein zu $\mathfrak{a}$ assoziiertes Primideal und ist $\mathfrak{p}' \subset \mathfrak{p}$ für ein $\mathfrak{p} \in \mathfrak{S}$, so folgt $\mathfrak{p}' \in \mathfrak{S}$.

Proposition 24.9. *Sei $\mathfrak{S}$ eine isolierte Menge von an $\mathfrak{a}$ assoziierten Primidealen. Dann ist $S := A \setminus \bigcup\limits_{\mathfrak{p} \in \mathfrak{S}} \mathfrak{p}$ multiplikativ abgeschlossen, und für jedes an $\mathfrak{a}$ assoziierte Primideal $\mathfrak{p}'$ gilt:*

1. *Ist $\mathfrak{p}' \in \mathfrak{S}$, so gilt $\mathfrak{p}' \cap S = \emptyset$.*
2. *Ist $\mathfrak{p}' \notin \mathfrak{S}$, so ist $\mathfrak{p}' \cap S \neq \emptyset$.* □

Satz 24.10 (Der zweite Eindeutigkeitssatz)**.** *Sei $\mathfrak{a}$ ein zerlegbares Ideal in einem kommutativen Ring A. Sei $\mathfrak{a} = \bigcap\limits_{i=1}^{n} \mathfrak{q}_i$ eine minimale Primärzerlegung. Sei $\mathfrak{p}_i := \sqrt{\mathfrak{q}_i}$. Ist dann $\{\mathfrak{p}_1, \dots, \mathfrak{p}_m\}$ eine isolierte Menge von an $\mathfrak{a}$ assoziierten Primidealen, so ist $\bigcap\limits_{i=1}^{m} \mathfrak{q}_i$ unabhängig von der Zerlegung.*

Beweis. Sei $S := A \setminus \bigcup\limits_{i=1}^{m} \mathfrak{p}_i$. Dann ist $S(\mathfrak{a}) = \bigcap\limits_{i=1}^{m} \mathfrak{q}_i$, also unabhängig von der Zerlegung, da die $\mathfrak{p}_i$ nur von $\mathfrak{a}$ abhängen. □

Folgerung 24.11. *Sei $\mathfrak{a}$ ein zerlegbares Ideal in einem kommutativen Ring A. Sei $\mathfrak{a} = \bigcap\limits_{i=1}^{n} \mathfrak{q}_i$ eine minimale Primärzerlegung. Sei $\mathfrak{p}_i := \sqrt{\mathfrak{q}_i}$. Dann sind die $\mathfrak{q}_i$, für die $\mathfrak{p}_i$ ein isoliertes Primideal von $\mathfrak{a}$ ist, die isolierten primären Komponenten von $\mathfrak{a}$, eindeutig bestimmt.*

Bemerkung 24.12. Die eingebetteten primären Komponenten sind dagegen im allgemeinen nicht eindeutig durch das Ideal bestimmt. Später werden wir Beispiele sehen, in denen es unendlich viele Möglichkeiten für jede eingebettete Komponente gibt.

Teil V. Ganzheit und Bewertungen

25. Ganzheit

25.1. Ganze Elemente

Definition 25.1. Sei B ein kommutativer Ring. Sei $A \subset B$ ein Unterring. Ein Element $x \in B$ heißt *ganz über* A, falls es Nullstelle eines normierten Polynoms in $A[x]$ ist, falls also x eine Gleichung der Form $x^n + a_1 x^{n-1} + \cdots + a_n = 0$ mit $a_i \in A$ erfüllt.

Insbesondere ist jedes Element aus A ganz über A.

Beispiel 25.2. Betrachte die Ringerweiterung $\mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$. Sei eine rationale Zahl $x = \frac{r}{s}$ mit $r, s \in \mathbb{Z}$ und $(r, s) = (1)$ ganz über $\mathbb{Z}$. Dann existieren $a_i \in \mathbb{Z}$ mit $r^n + a_1 r^{n-1} s + \ldots + a_n s^n = 0$. Damit ist s Teiler von r^n, also $s = \pm 1$, also $x \in \mathbb{Z}$.

Proposition 25.3. *Sei $A \subset B$ eine Erweiterung kommutativer Ringe. Für ein Element $x \in B$ sind folgende Aussagen äquivalent:*

1. *Das Element x ist ganz über A.*
2. *Es ist $A[x] \subset B$ als A-Modul endlich erzeugt.*
3. *Es existiert ein Unterring C von B mit $A[x] \subset C$, so daß C als A-Modul endlich erzeugt ist.*
4. *Es existiert ein treuer $A[x]$-Modul M, welcher als A-Modul endlich erzeugt ist.*

Beweis.

1. Erfüllt x die Gleichung $x^n = -a_1 x^{n-1} - \cdots - a_n$ mit $a_i \in A$, so ist $A[x]$ als A-Modul von $1, x, \ldots, x^{n-1}$ erzeugt.
2. Ist $A[x]$ als A-Modul endlich erzeugt, so ist insbesondere $C = A[x]$ ein Unterring von B, welcher $A[x]$ umfaßt und als A-Modul endlich erzeugt ist.
3. Ist $C \subset B$ ein $A[x]$ umfassender Unterring, welcher als A-Modul endlich erzeugt ist, so ist insbesondere $M = C$ ein treuer $A[x]$-Modul, denn aus $yC = 0$ folgt insbesondere $y = y \cdot 1 = 0$, und M ist als A-Modul endlich erzeugt.
4. Sei M ein treuer $A[x]$-Modul, welcher als A-Modul endlich erzeugt ist. Sei $\phi\colon M \to M, m \mapsto xm$. Da M als A-Modul endlich erzeugt ist, existieren $a_i \in A$ mit $\phi^n + a_1 \phi^{n-1} + \ldots + a_n = 0$. Da M ein treuer $A[x]$-Modul ist, folgt daraus $x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_n = 0$. □

Folgerung 25.4. *Sei $A \subset B$ eine Erweiterung kommutativer Ringe. Seien $x_1, \ldots, x_n \in B$, welche jeweils ganz über A sind. Dann ist $A[x_1, \ldots, x_n]$ ein endlich erzeugter A-Modul.*

Beweis.

1. Der Fall $n = 1$ ist ein Spezialfall der Proposition.
2. Sei also $n > 1$. Wir setzen $A_r := A[x_1, \ldots, x_r]$. Nach Induktionsvoraussetzung ist A_{n-1} als A-Modul endlich erzeugt.
3. Da x_n insbesondere ganz über A_{n-1} ist, ist A_n als A_{n-1}-Modul endlich erzeugt.
4. Es folgt, daß A_n auch als A-Modul endlich erzeugt ist. □

Folgerung 25.5. *Sei $A \subset B$ eine Erweiterung kommutativer Ringe. Dann ist die Menge C der über A ganzen Elemente von B ein Unterring von B, welcher A enthält.*

Beweis. Seien $x, y \in C$. Dann ist nach der letzten Folgerung $A[x, y]$ ein endlich erzeugter A-Modul. Damit sind auch $xy, x + y \in A[x, y]$ nach der dritten Aussage der Proposition ganz über A. □

25.2. Ganzheit

Definition 25.6. Sei $A \subset B$ eine Erweiterung kommutativer Ringe.

1. Der Unterring C aller über A ganzen Elemente von B heißt der *ganze Abschluß von A in B*.

2. Ist $C = A$, so heißt A *ganz abgeschlossen in B*.

3. Ist $C = B$, so heißt B *ganz über A*.

Beispiel 25.7. Der Ring $\mathbb{Z}$ ist in $\mathbb{Q}$ ganz abgeschlossen.

Definition 25.8. Sei $\phi\colon A \to B$ ein Homomorphismus kommutativer Ringe, so daß B zu einer A-Algebra wird. Dann heißt ϕ ganz und B eine *ganze A-Algebra*, falls B ganz über dem Unterring $\phi(A)$ ist.

Damit haben wir oben also gezeigt: Eine A-Algebra B ist genau dann endlich über A, wenn sie endlich erzeugt und ganz über A ist.

Folgerung 25.9. *Seien $A \subset B \subset C$ Erweiterungen kommutativer Ringe. Ist dann B ganz über A und C ganz über B, so ist auch C ganz über A.*

Beweis.

1. Ist $x \in C$, so existieren $b_i \in B$ mit $x^n + b_1 x^{n-1} + \cdots + b_n = 0$. Da die b_i ganz über A sind, ist $B' = A[b_1, \dots, b_n]$ ein endlich erzeugter A-Modul.

2. Da x ganz über B' ist, ist $B'[x]$ ein endlich erzeugter B-Modul.

3. Es folgt, daß $B'[x]$ auch als A-Modul endlich erzeugt ist, so daß x nach der dritten Charakterisierung der Proposition endlich über A ist. □

Folgerung 25.10. *Sei $A \subset B$ eine Erweiterung kommutativer Ringe. Sei C der ganze Abschluß von A in B. Dann ist C in B ganz abgeschlossen.*

Beweis. Sei $x \in B$ ganz über C. Da ganze Abhängigkeit transitiv ist, ist x damit auch ganz über A. Damit ist $x \in C$. □

Proposition 25.11. *Sei $A \subset B$ eine ganze Erweiterung kommutativer Ringe. Dann gilt:*

1. *Für jedes Ideal $\mathfrak{b}$ von B ist $B/\mathfrak{b}$ ganz über $A/(A \cap \mathfrak{b})$.*

2. *Für jede multiplikativ abgeschlossene Teilmenge $S \subset A$ ist $S^{-1}B$ ganz über $S^{-1}A$.*

Beweis.

1. Eine Gleichung $x^n + a_1 x^{n-1} + \cdots + a_n = 0$ mit $a_i \in A$ für ein $x \in B$ können wir modulo $\mathfrak{b}$ reduzieren.

2. Sei $\frac{x}{s} \in S^{-1}B$. Dann liefert die obige Gleichung $(\frac{x}{s})^n + \frac{a_i}{s}(\frac{x}{s})^{n-1} + \cdots + \frac{a_n}{s^n} = 0$ eine Ganzheitsbedingung über $S^{-1}A$. □

25.3. Noethersche Normalisierung

Hilfssatz 25.12. *Sei M eine endliche Menge von Tupeln $m = (m_1, \ldots, m_n) \in \mathbb{N}_0^n$. Dann existieren natürliche Zahlen $w_1, \ldots, w_n \in \mathbb{N}$ mit $w_n = 1$, so daß für alle $m, m' \in M$ gilt: $m \neq m' \implies w(m) := \sum_{i=1}^{n} w_i m_i \neq w(m') = \sum_{i=1}^{n} w_i m'_i$.*

Beweis. 1. Wir führen den Beweis nach Induktion über n. Wir können $n > 1$ annehmen. Ein $m \in M$ schreiben wir als $m = (m_1, m_{\geq 2})$ mit $m_{\geq 2} = (m_2, \ldots, m_n)$.

2. Wir wenden die Induktionsvoraussetzung auf die vorkommenden $m_{\geq 2}$ an und erhalten $w_2, \ldots, w_n \in \mathbb{N}$ mit $w_n = 1$.

3. Wir wählen $w_1 \in \mathbb{N}$ so, daß $w_1 > \sum_{i=2}^{n} w_i m_i$ für alle $m \in M$. □

Hilfssatz 25.13. *Sei K ein Körper. Sei $f \in A := K[x_1, \ldots, x_n]$ mit $f \neq 0$. Dann existiert ein Ringautomorphismus $\phi\colon A \to A$ mit $\phi(x_n) = x_n$, so daß $\phi(f) = a_0 x_n^k + a_1 x_n^{k-1} + \cdots + a_k$ mit $a_0 \in K^\times$ und $a_1, \ldots, a_k \in K[x_1, \ldots, x_{n-1}]$.*

Beweis. 1. Es gibt eine endliche Menge M von Tupeln $m = (m_1, \ldots, m_n) \in \mathbb{N}_0^n$, so daß $f = \sum_{m \in M} a_m x_1^{m_1} \cdots x_n^{m_n}$ mit $a_m \in K^\times$. Wir wählen $w_1, \ldots, w_n \in \mathbb{N}$ zu M wie im letzten Hilfssatz.

2. Definiere $\phi\colon A \to A$ mit $\phi(x_i) = x_i + x_n^{w_i}$ für $i < n$. Damit ist $\phi(f) = f(x_1 + x_n^{w_1}, \ldots, x_{n-1} + x_n^{w_{n-1}}, x_n)$.

3. Sei $m \in M$ dasjenige Tupel, so daß $\sum_{i=1}^{n} w_i m_i$ maximal wird. Dann ist der Term maximalen Grades in x_n in $\phi(f)$ durch $a_m x_n^{\sum w_i m_i}$ gegeben, und es ist $a_m \in K^\times$. □

Proposition 25.14. *Seien K ein Körper und $\mathfrak{a} \neq (1)$ ein Ideal in $A := K[x_1, \ldots, x_n]$. Dann existieren ein Polynomring $B := K[y_1, \ldots, y_n]$ und ein endlicher, injektiver Homomorphismus $B \to A$ kommutativer K-Algebren und ein $0 \leq r \leq n$, so daß $B \cap \mathfrak{a} = (y_{r+1}, \ldots, y_n)$. Insbesondere folgt, daß $K[y_1, \ldots, y_r] \to A/\mathfrak{a}$ ein endlicher, injektiver Homomorphismus von K-Algebren ist.*

Beweis. 1. Wir wenden Induktion über n an. Wir können $n \geq 1$ und $\mathfrak{a} \neq (0)$ annehmen.

2. Sei $f \in \mathfrak{a} \setminus \{0\}$. Nach dem Hilfssatz können wir davon ausgehen, daß $f = 0$ eine Ganzheitsbedingung für x_n über $A' := K[x_1, \ldots, x_{n-1}]$ ist.

3. Nach Induktionsvoraussetzung (angewendet auf A' und das Ideal $A' \cap \mathfrak{a}$) existiert ein endlicher, injektiver Homomorphismus $B' := K[y_1, \ldots, y_{n-1}] \to A'$, so daß $B' \cap \mathfrak{a} = (y_{r+1}, \ldots, y_{n-1})$ für ein r.

4. Schließlich setzen wir $B = B'[y_n] \to A = A'[x_n], y_n \mapsto f$. □

26. Erster Cohen–Seidenbergscher Satz

26.1. Körpererweiterungen

Proposition 26.1. *Sei $A \subset B$ eine ganze Erweiterung von Integritätsbereichen. Dann ist B genau dann ein Körper, wenn A ein Körper ist.*

Beweis.

1. Sei A ein Körper. Sei $y \in B$ mit $y \neq 0$. Sei $y^n + a_1 y^{n-1} + \cdots + a_n = 0$ mit $a_i \in A$ eine Ganzheitsbedingung minimalen Grades. Da B ein Integritätsbereich ist, ist $a_n \neq 0$, also $y^{-1} = -a_n^{-1}(y^{n-1} + a_1 y^{n-2} + \cdots + a_{n-1}) \in B$. Damit ist B ein Körper.

2. Sei umgekehrt B ein Körper. Sei $x \in A$ mit $x \neq 0$. Dann ist $x^{-1} \in B$, also ganz über A, so daß eine Ganzheitsbedingung $x^{-n} + a_1 x^{-n+1} + \cdots + a_n = 0$ mit $a_i \in A$ existiert. Es folgt, daß $x^{-1} = -(a_1 + a_2 x + \cdots + a_n x^{n-1}) \in A$. Damit ist A ein Körper. □

Folgerung 26.2. *Sei $A \subset B$ eine ganze Erweiterung kommutativer Ringe. Sei $\mathfrak{q}$ ein Primideal in B und $\mathfrak{p} := A \cap \mathfrak{q}$. Dann ist $\mathfrak{q}$ genau dann ein maximales Ideal, wenn $\mathfrak{p}$ ein maximales Ideal ist.*

Beweis. Es ist $A/\mathfrak{p} \subset B/\mathfrak{q}$ eine ganze Erweiterung von Integritätsbereichen. Es ist $A/\mathfrak{p}$ genau dann ein Körper, wenn $\mathfrak{p}$ maximal ist. Ebenso ist $B/\mathfrak{q}$ genau dann ein Körper, wenn $\mathfrak{q}$ maximal ist. □

26.2. Primideale in ganzen Erweiterungen

Folgerung 26.3. *Sei $A \subset B$ eine ganze Erweiterung kommutativer Ringe. Seien $\mathfrak{q} \subset \mathfrak{q}'$ zwei Primideale in B mit $\mathfrak{p} := A \cap \mathfrak{q} = A \cap \mathfrak{q}'$. Dann gilt $\mathfrak{q} = \mathfrak{q}'$.*

Beweis.

1. Es ist $B_\mathfrak{p}$ ganz über $A_\mathfrak{p}$. Seien $\mathfrak{m} := A_\mathfrak{p}\mathfrak{p}$, $\mathfrak{n} := B_\mathfrak{p}\mathfrak{q}$ und $\mathfrak{n}' := B_\mathfrak{p}\mathfrak{q}'$.

2. Dann ist $\mathfrak{m}$ das maximale Ideal in $A_\mathfrak{p}$. Weiter gilt $\mathfrak{n} \subset \mathfrak{n}'$ und $A_\mathfrak{p} \cap \mathfrak{n} = A_\mathfrak{p} \cap \mathfrak{n}' = \mathfrak{m}$.

3. Aus der Maximalität von $\mathfrak{m}$ folgt, daß $\mathfrak{n}$ maximal ist, also $\mathfrak{n} = \mathfrak{n}'$. Es folgt $\mathfrak{q} = \mathfrak{q}'$. □

Satz 26.4. *Sei $A \subset B$ eine ganze Erweiterung kommutativer Ringe. Sei $\mathfrak{p}$ ein Primideal von A. Dann existiert ein Primideal $\mathfrak{q}$ von B mit $A \cap \mathfrak{q} = \mathfrak{p}$.*

Beweis.

1. Sei $\mathfrak{n}$ ein maximales Ideal von $B_\mathfrak{p}$. Da $B_\mathfrak{p}$ ganz über $A_\mathfrak{p}$ ist, ist $\mathfrak{m} := A_\mathfrak{p} \cap \mathfrak{n}$ ein maximales Ideal von $A_\mathfrak{p}$ und damit das einzige maximale Ideal in $A_\mathfrak{p}$.

2. Sei $\mathfrak{q} := B \cap \mathfrak{n}$. Dann ist $\mathfrak{q}$ ein Primideal in B. Weiter ist $A \cap \mathfrak{q} = A \cap (A_\mathfrak{p} \cap \mathfrak{n}) = A \cap \mathfrak{m} = \mathfrak{p}$. □

Satz 26.5 („Going-up“)**.** *Sei $A \subset B$ eine ganze Erweiterung kommutativer Ringe. Sei $\mathfrak{p}_1 \subset \cdots \subset \mathfrak{p}_n$ eine Kette von Primidealen in A und $\mathfrak{q}\colon \mathfrak{q}_1 \subset \cdots \subset \mathfrak{q}_m$, $m \leq n$, eine Kette von Primidealen in B mit $\mathfrak{p}_i = A \cap \mathfrak{q}_i$ für $i \leq m$. Dann kann die Kette $\mathfrak{q}$ zu einer Kette $\mathfrak{q}_1 \subset \cdots \subset \mathfrak{q}_n$ mit $A \cap \mathfrak{q}_i = \mathfrak{p}_i$ erweitert werden.*

Beweis. 1. Es reicht, den Fall $m = 1$, $n = 2$ zu behandeln. Seien $\bar{A} \coloneqq A/\mathfrak{p}_1$ und $\bar{B} \coloneqq B/\mathfrak{q}_1$. Dann ist $\bar{B}$ ganz über $\bar{A}$.

2. Damit existiert ein Primideal $\bar{\mathfrak{q}}_2$ von $\bar{B}$ mit $\bar{A} \cap \bar{\mathfrak{q}}_2 = \bar{\mathfrak{p}}_2 \coloneqq \bar{A}\mathfrak{p}_2$.

3. Damit ist $\mathfrak{q}_2 \coloneqq B \cap \bar{\mathfrak{q}}_2$ ein Primideal von B mit den gewünschten Eigenschaften. □

27. Der zweite Cohen–Seidenbergsche Satz

27.1. Ganz abgeschlossene Integritätsbereiche

Proposition 27.1. *Sei $A \subset B$ eine Erweiterung kommutativer Ringe. Sei C der ganze Abschluß von A in B. Sei $S \subset A$ multiplikativ abgeschlossen. Dann ist $S^{-1}C$ der ganze Abschluß von $S^{-1}A$ in $S^{-1}B$.*

Beweis. 1. Wir haben schon gesehen, daß $S^{-1}C$ ganz über $S^{-1}A$ ist.

2. Sei umgekehrt $\frac{b}{s} \in S^{-1}B$ ganz über $S^{-1}A$, das heißt, wir haben eine Gleichung der Form $(\frac{b}{s})^n + \frac{a_1}{s_1}(\frac{b}{s})^{n-1} + \cdots + \frac{a_n}{s_n} = 0$ mit $a_i \in A, s_i \in S$.

3. Sei $t \coloneqq s_1 \cdots s_n$. Multiplizieren wir die Ganzheitsbedingung mit $(st)^n$ erhalten wir eine Ganzheitsbedingung für bt über A.

4. Damit ist $bt \in C$, also $\frac{b}{s} = \frac{bt}{st} \in S^{-1}C$. □

Definition 27.2. Ein Integritätsbereich heißt *ganz abgeschlossen*, falls er in seinem Quotientenkörper ganz abgeschlossen ist.

Beispiel 27.3. Der Ring $\mathbb{Z}$ der ganzen Zahlen ist ganz abgeschlossen.

Ganz ähnlich wird gezeigt:

Beispiel 27.4. Ein Polynomring $K[x_1, \ldots, x_n]$ in mehreren Variablen über einem Körper ist ganz abgeschlossen.

Proposition 27.5. *Sei A ein Integritätsbereich. Die folgenden Eigenschaften sind äquivalent:*

1. *Es ist A ganz abgeschlossen.*

2. *Für jedes Primideal $\mathfrak{p}$ in A ist $A_\mathfrak{p}$ ganz abgeschlossen.*

3. *Für jedes maximale Ideal $\mathfrak{m}$ in A ist $A_\mathfrak{m}$ ganz abgeschlossen.*

Beweis. Seien K der Quotientenkörper von A und C der ganze Abschluß von A in K. Dann ist A genau dann ganz abgeschlossen, wenn $\phi\colon A \to C, x \mapsto x$ surjektiv ist. Es ist Surjektivität eine lokale Eigenschaft und Bilden des ganzen Abschlusses mit Lokalisierung verträglich. □

27.2. Ganzheit über Idealen

Definition 27.6. Sei $A \subset B$ eine Erweiterung kommutativer Ringe. Sei $\mathfrak{a}$ ein Ideal von A.

1. Ein Element $x \in B$ heißt *ganz über* $\mathfrak{a}$, falls x eine Gleichung der Form $x^n + a_1 x^{n-1} + \cdots + a_n = 0$ mit $a_i \in \mathfrak{a}$ erfüllt.

2. Der *ganze Abschluß von* $\mathfrak{a}$ *in* B ist die Menge aller $x \in B$, die ganz über $\mathfrak{a}$ sind.

Hilfssatz 27.7. *Sei $A \subset B$ eine Erweiterung kommutativer Ringe. Sei C der ganze Abschluß von A in B. Sei $\mathfrak{a}$ ein Ideal von A. Dann ist der ganze Abschluß von $\mathfrak{a}$ in B das Wurzelideal $\sqrt{C\mathfrak{a}}$.*

Beweis. 1. Sei $x \in B$ mit $x^n + a_1 x^{n-1} + \cdots + a_n = 0$ für gewisse $a_i \in \mathfrak{a}$. Es folgt $x \in C$ und damit $x^n \in C\mathfrak{a}$, also $x \in \sqrt{C\mathfrak{a}}$.

2. Sei umgekehrt $x \in \sqrt{C\mathfrak{a}}$, also $x^n = \sum_i a_i x_i$ für $a_i \in \mathfrak{a}$ und $x_i \in C$. Es ist $M := A[x_1, \ldots, x_n]$ ein endlich erzeugter A-Modul mit $x^n M \subset \mathfrak{a}M$. Damit erfüllt die Multiplikation mit x^n auf M eine Ganzheitsbedingung über $\mathfrak{a}$. Also ist x^n und damit auch x ganz über $\mathfrak{a}$. □

Proposition 27.8. *Seien $A \subset B$ eine Erweiterung von Integritätsbereichen, und sei A ganz abgeschlossen mit Quotientenkörper K. Sei weiter $x \in B$ ganz über einem Ideal $\mathfrak{a}$ von A. Dann ist x algebraisch über K und für sein Minimalpolynom $f \in K[t]$ gilt $f \in \sqrt{\mathfrak{a}}[t]$.*

Beweis. Da x ganz über $\mathfrak{a}$ ist, ist x insbesondere algebraisch über K. Sei L ein Zerfällungskörper von f, und seien $x_1, \ldots, x_n$ die Nullstellen (mit Vielfachheit) von f. Jedes x_i erfüllt dieselbe Ganzheitsbedingung wie x, daher sind die x_i ganz über $\mathfrak{a}$. Die Koeffizienten von f sind Polynome in den x_i, also ebenfalls ganz über $\mathfrak{a}$. Da A ganz abgeschlossen ist, müssen sie daher in $\sqrt{\mathfrak{a}}$ liegen. □

27.3. Der zweite Cohen–Seidenbergsche Satz

Satz 27.9 („Going-down“). *Sei $A \subset B$ eine ganze Erweiterung von Integritätsbereichen, und sei A ganz abgeschlossen. Dann gilt: Seien $\mathfrak{p}_1 \supset \cdots \supset \mathfrak{p}_n$ eine Kette von Primidealen in A und $\mathfrak{q}\colon \mathfrak{q}_1 \supset \cdots \supset \mathfrak{q}_m$, $m \leq n$ eine Kette von Primidealen von B mit $\mathfrak{p}_i = A \cap \mathfrak{q}_i$ für $i \leq m$. Dann kann die Kette $\mathfrak{q}$ zu einer Kette $\mathfrak{q}_1 \supset \cdots \supset \mathfrak{q}_n$ mit $\mathfrak{p}_i = A \cap \mathfrak{q}_i$ erweitert werden.*

Beweis. 1. Es reicht, den Fall $m = 1$, $n = 2$ zu behandeln. Damit ist zu zeigen, daß $\mathfrak{p}_2$ die Kontraktion eines Primideals in $B_{\mathfrak{q}_1}$ ist, das heißt, daß $A \cap B_{\mathfrak{q}_1}\mathfrak{p}_2 = \mathfrak{p}_2$.

2. Jedes $x \in B_{\mathfrak{q}_1}\mathfrak{p}_2$ ist von der Form $x = \frac{y}{s}$ mit $y \in B\mathfrak{p}_2$ und $s \in B \setminus \mathfrak{q}_1$. Dann ist y ganz über $\mathfrak{p}_2$, die Ganzheitsbedingung minimalen Grades von y über dem Quotientenkörper K von A ist also von der Form $y^r + u_1 y^{r-1} + \cdots + u_r = 0$ mit $u_i \in \mathfrak{p}_2$.

3. Sei zusätzlich $x \in A$. Dann ist $s = yx^{-1}$ mit $x^{-1} \in K$. Damit ist $s^r + v_1 s^{r-1} + \cdots + v_r = 0$ mit $v_i = u_i x^{-i}$ die Ganzheitsbedingung minimalen Grades für s über K. Wir halten $x^i v_i = u_i \in \mathfrak{p}_2$ fest.

4. Da s ganz über (1) in A ist, folgt $v_i \in A$. Angenommen, $x \notin \mathfrak{p}_2$. Da $\mathfrak{p}_2$ prim ist, muß dann $v_i \in \mathfrak{p}_2$ gelten.

5. Daraus folgt wiederum, daß $s^r \in B\mathfrak{p}_2 \subset B\mathfrak{p}_1 \subset \mathfrak{q}_1$, also $s \in \mathfrak{q}_1$, ein Widerspruch. □

Proposition 27.10. *Sei A ein ganz abgeschlossener Integritätsbereich mit Quotientenkörper K. Sei L eine endliche separable Körpererweiterung von K und B der ganze Abschluß von A in L. Dann existiert eine Basis $v_1, \ldots, v_n$ von L über K so daß $B \subset \sum_{j=1}^{n} Av_j$.*

Beweis. 1. Ist $v \in L$, erfüllt v eine Gleichung $a_0 v^r + a_1 v^{r-1} + \cdots + a_n = 0$ mit $a_i \in A, a_0 \neq 0$. Durch Multiplizieren dieser Gleichung mit a_0^{r-1} sehen wir, daß $a_0 v$ ganz über A und damit in B ist. Damit können wir eine beliebige Basis von L über K so umnormieren, daß wir eine Basis $(u_1, \ldots, u_n)$ mit $u_i \in B$ erhalten.

2. Da L über K separabel ist, existieren $v_1, \ldots, v_n \in L$ mit $\operatorname{tr}_{L/K}(u_i v_j) = \delta_{ij}$.

3. Sei $x \in B$, etwa $x = \sum_j x_j v_j$ mit $x_j \in K$. Weiter ist $xu_i \in B$, also $\operatorname{tr}_{L/K}(xu_i) \in A$, da die Spur eines Elementes ein Vielfaches eines Koeffizienten seines Minimalpolynomes ist.

4. Es gilt $\operatorname{tr}_{L/K}(xu_i) = \sum_j x_j \operatorname{tr}_{L/K}(u_i v_j) = x_i$, also $x_i \in A$. Folglich ist $B \subset \sum_j Av_j$. □

28. Bewertungsringe

28.1. Definition und erste Eigenschaften von Bewertungsringen

Definition 28.1. Sei B ein Integritätsbereich mit Quotientenkörper K. Dann heißt B ein *Bewertungsring für K*, falls $x \in B$ oder $x^{-1} \in B$ (oder beides) für alle $x \in K^\times$.

Beispiel 28.2. Seien K ein Körper und B ein Bewertungsring für K. Ist dann B' ein Unterring von K mit $B \subset B'$, so ist B' ein Bewertungsring für K.

Proposition 28.3. *Sei B ein Bewertungsring. Dann ist B ein lokaler Ring.*

Beweis. 1. Sei $\mathfrak{m} := B \setminus B^\times$. Ist K der Quotientenkörper von B, so gilt damit für $x \in K$, daß $x \in \mathfrak{m}$ genau dann, wenn $x = 0$ oder $x^{-1} \notin B$.

2. Ist $a \in B$ und $x \in \mathfrak{m}$, so ist $ax \in \mathfrak{m}$, da ansonsten $(ax)^{-1} \in B$ und damit $x^{-1} = a(ax)^{-1} \in B$.

3. Sind $x, y \in \mathfrak{m}$, so gilt $xy^{-1} \in B$ oder $x^{-1}y \in B$. Ohne Einschränkung sei $xy^{-1} \in B$, also $x + y = (1 + xy^{-1})y \in B\mathfrak{m} \subset \mathfrak{m}$.

4. Damit ist $\mathfrak{m}$ ein Ideal in B, und B daher ein lokaler Ring. □

Proposition 28.4. *Sei B ein Bewertungsring. Dann ist B ganz abgeschlossen.*

Beweis. Sei $x \in K$ ein ganzes Element im Quotientenkörper K von B, also $x^n + b_1 x^{n-1} + \cdots + b_n = 0$ für gewisse $b_i \in B$. Falls $x \in B$, ist nichts zu zeigen. Ansonsten ist $x^{-1} \in B$ und damit $x = -(b_1 + b_2 x^{-1} + \cdots + b_n x^{1-n}) \in B$. □

28.2. Existenz von Bewertungsringen

Seien K ein Körper und L ein algebraisch abgeschlossener Körper. Wir wollen einen Ringhomomorphismus $\phi\colon A \to L$ von einem Unterring $A \subset K$ *nicht fortsetzbar in K* nennen, falls für Unterringe A' von K mit $A \subset A'$ und einem Ringhomomorphismus $\phi'\colon A' \to L$ mit $\phi'|_A = \phi$ schon $A = A'$ gilt.

Bemerkung 28.5. Aus dem Zornschen Lemma folgt, daß zu jedem Ringhomomorphismus $\phi\colon A \to L$ ein Unterring B von K mit $A \subset B$ und ein Ringhomomorphismus $\psi\colon B \to K$ mit $\psi|_A = \phi$ existiert, so daß ψ nicht fortsetzbar ist.

Hilfssatz 28.6. *Seien K und L Körper. Sei $B \subset K$ ein Unterring. Ist dann $\psi\colon B \to L$ ein nicht in K fortsetzbarer Ringhomomorphismus, so ist B ein lokaler Ring mit maximalem Ideal $\mathfrak{m} = \ker \psi$.*

Beweis.
1. Da $\psi(B) \cong B/\ker\psi$ als Unterring der Körpers L ein Integritätsbereich ist, ist $\ker\psi$ ein Primideal.
2. Nach der universellen Eigenschaft der Lokalisierung faktorisiert ψ über einen Homomorphismus $\psi_{\mathfrak{m}}\colon B_{\mathfrak{m}} \to L$.
3. Da $\psi\colon B \to L$ nicht fortsetzbar ist, folgt $B = B_{\mathfrak{m}}$, also ist B ein lokaler Ring mit maximalem Ideal $\mathfrak{m}$. □

Hilfssatz 28.7. *Seien K und L Körper. Sei $B \subset K$ ein Unterring. Sei $\psi\colon B \to L$ ein nicht in K fortsetzbarer Ringhomomorphismus. Sei $\mathfrak{m}$ das maximale Ideal von B. Sei weiter $x \in K^\times$. Dann gilt $\mathfrak{m}[x] \neq B[x]$ oder $\mathfrak{m}[x^{-1}] \neq B[x^{-1}]$.*

Beweis.
1. Angenommen, $\mathfrak{m}[x] = B[x]$ und $\mathfrak{m}[x^{-1}] = B[x^{-1}]$. Dann gibt es Gleichungen $u_0 + u_1 x + \cdots + u_m x^m = 1$ und $v_0 + v_1 x^{-1} + \cdots + v_n x^{-n} = 1$ mit $u_i, v_j \in \mathfrak{m}$. Seien weiter m, n minimal gewählt und ohne Einschränkung $m \geq n$.
2. Aus $(1 - v_0)x^n = v_1 x^{n-1} + \cdots + v_n$ und $(1 - v_0) \in B^\times$ folgt $x^n = w_1 x^{n-1} + \cdots + w_n$ für gewisse $w_j \in \mathfrak{m}$.
3. Indem wir $x^m = w_1 x^{m-1} + \cdots + w_n x^{m-n}$ in $u_0 + u_1 x + \cdots + u_m x^m = 1$ substituieren, erhalten wir, daß m nicht minimal gewählt ist. Widerspruch. □

Satz 28.8. *Seien K ein Körper und L ein algebraisch abgeschlossener Körper. Sei $B \subset K$ ein Unterring. Ist dann $\psi\colon B \to L$ ein nicht in K fortsetzbarer Ringhomomorphismus, so ist B ein Bewertungsring für K.*

Beweis. 1. Mit $\mathfrak{m}$ bezeichnen wir das maximale Ideal von B. Sei $x \in K^\times$. Wir haben $x \in B$ oder $x^{-1} \in B$ zu zeigen. Nach dem letzten Hilfssatz können wir ohne Einschränkung annehmen, daß $\mathfrak{m}[x] \neq (1) = B' \coloneqq B[x]$.

2. Damit ist $\mathfrak{m}[x]$ in einem maximalen Ideal $\mathfrak{m}'$ von B' enthalten. Da $\mathfrak{m}' \cap B \subsetneq B$ folgt $\mathfrak{m}' \cap B = \mathfrak{m}$.

3. Die Einbettung $B \to B'$ induziert damit eine Körpereinbettung $k \coloneqq B/\mathfrak{m} \to k' \coloneqq B'/\mathfrak{m}'$. Sei $\bar{x}$ das Bild von x in k'. Damit $k' = k[\bar{x}]$. Damit ist $k[\bar{x}]$ ein Körper, $\bar{x}$ also algebraisch über k und k' damit eine endlich algebraische Körpererweiterung von k.

4. Da $\mathfrak{m} = \ker\psi$, induziert ψ einen Homomorphismus $\bar{\psi}\colon k \to L$ von Körpern. Da L algebraisch abgeschlossen ist, können wir diesen zu einem Homomorphismus $\bar{\psi}'\colon k' \to L$ fortsetzen. Verknüpfung mit $B' \to k'$ liefert eine Fortsetzung von ψ. Also $B = B'$ und damit $x \in B$. □

Folgerung 28.9. *Sei $A \subset K$ ein Unterring eines Körpers. Dann ist der ganze Abschluß $\bar{A}$ von A in K der Schnitt aller Bewertungsringe B von K mit $B \supset A$.*

Beweis. 1. Sei B ein Bewertungsring von K mit $B \supset A$. Da B ganz abgeschlossen ist, folgt $B \supset \bar{A}$.

2. Sei umgekehrt $x \notin \bar{A}$. Dann ist $x \notin A' \coloneqq A[x^{-1}] \subset K$. Damit ist x^{-1} keine Einheit in A', also in einem maximalen Ideal $\mathfrak{m}'$ von A' enthalten.

3. Sei L ein algebraischer Abschluß des Körpers $k' \coloneqq A'/\mathfrak{m}'$. Der Homomorphismus $\phi\colon A \hookrightarrow A' \twoheadrightarrow k' \hookrightarrow L$ kann zu einem Bewertungsring B von K fortgesetzt werden. Da $\phi(x^{-1}) = 0$ ist folglich $x \notin B$. □

Proposition 28.10. *Sei $A \subset B$ eine endlich erzeugte Erweiterung von Integritätsbereichen. Sei $v \in B \setminus \{0\}$. Dann existiert ein $u \in A \setminus \{0\}$ mit folgender Eigenschaft: Jeder Homomorphismus $\phi\colon A \to L$ in einen algebraisch abgeschlossenen Körper mit $\phi(u) \neq 0$ kann zu einem Homomorphismus $\psi\colon B \to L$ mit $\psi(v) \neq 0$ fortgesetzt werden.*

Beweis. Mit Induktion über die Anzahl der Erzeuger von B über A können wir davon ausgehen, daß B von einem Element x erzeugt wird. Dann können zwei Fälle vorliegen: Entweder ist x über A transzendent, das heißt kein nicht verschwindendes Polynom über A besitzt x als Nullstelle. Oder x ist über A algebraisch, das heißt es gibt eine nicht triviale polynomielle Gleichung für x über dem Quotientenkörper von A.

Transzendenter Fall. 1. Sei x transzendent über A.

2. Es existieren $a_i \in A$ mit $v = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_n$. Wähle $u = a_0$.

3. Ist $\phi\colon A \to L$ ein Homomorphismus mit $\phi(u) \neq 0$, so existiert ein $y \in L$ mit $\phi(a_0)y^n + \phi(a_1)y^{n-1} + \cdots + \phi(a_n) \neq 0$, da L unendlich viele Elemente besitzt.

4. Definiere $\psi\colon B \to L$ durch $\psi(x) = y$.

Algebraischer Fall. 1. Sei x algebraisch über A. Da v ein Polynom in x ist, ist damit auch v^{-1} algebraisch über x. Damit existieren Gleichungen $a_0x^m + a_1x^{m-1} + \cdots + a_m = 0$ und $a'_0v^{-n} + a'_1v^{1-n} + \cdots + a'_n = 0$ mit $a_i, a'_j \in A$ und $u \coloneqq a_0a'_0 \neq 0$.

2. Sei $\phi\colon A \to L$ mit $\phi(u) \neq 0$. Dann kann ϕ zunächst zu einem Homomorphismus $A[u^{-1}] \to L$ fortgesetzt werden und danach zu einem Homomorphismus $\chi\colon C \to L$, wobei C ein Bewertungsring mit $C \supset A[u^{-1}]$ ist.

3. Aus der ersten der obigen Gleichungen folgt, daß x ganz über $A[u^{-1}]$ ist, daß also $x \in C$, so daß sogar $C \supset B$, insbesondere also $v \in C$.

4. Analog ist $v^{-1} \in C$, also ist v eine Einheit in C, also ist $\chi(v) \neq 0$. Definiere $\psi \coloneqq \chi|_B\colon B \to L$. □

Sei K ein Körper.

Folgerung 28.11. *Ist eine endlich erzeugte K-Algebra B ein Körper, so ist B eine endliche algebraische Erweiterung von K.*

Beweis. Sei L ein algebraischer Abschluß von K. Nach der Proposition läßt sich die Körpererweiterung $K \subset L$ zu einer Körpererweiterung $B \subset L$ fortsetzen. Damit ist B algebraisch über K und als endlich erzeugte Algebra damit auch endlich. □

Folgerung 28.12 (Schwacher Hilbertscher Nullstellensatz)**.** *Ist $\mathfrak{m}$ ein maximales Ideal einer endlich erzeugten K-Algebra A, so ist $A/\mathfrak{m}$ eine endliche algebraische Erweiterung von K. Insbesondere ist $A/\mathfrak{m} \cong K$, falls K algebraisch abgeschlossen ist.* □

Teil VI. Kettenbedingungen

29. Kettenbedingungen I

29.1. Kettenbedingungen

Proposition 29.1. *Sei X eine teilweise geordnete Menge. Dann sind folgende beide Bedingungen an X äquivalent:*

1. *Jede aufsteigende Folge $x_1 \leq x_2 \leq \cdots$ in X ist stationär, das heißt es existiert ein n mit $x_n = x_{n+1} = \cdots$.*

2. *Jede nicht leere Teilmenge von X besitzt ein maximales Element.*

Beweis. 1. Angenommen, es gibt eine nicht leere Teilmenge ohne maximales Element. Dann können wir induktiv eine unendliche strikt aufsteigende Folge von Elementen in X konstruieren.

2. Besitzt jede nicht leere Teilmenge ein maximales Element, so auch die Menge $(x_m)_{m\in\mathbb{N}}$. □

Sei A ein Ring. Sei M ein A-Modul.

Definition 29.2. Ist jede bezüglich der Inklusion aufsteigende Folge $N_1 \subset N_2 \subset \cdots$ von Untermoduln von M stationär, heißt M *noethersch*.

Definition 29.3. Ist jede bezüglich der Inklusion absteigende Folge $N_1 \supset N_2 \supset \cdots$ von Untermoduln von M stationär, heißt N *artinsch*.

Beispiel 29.4. Jede endliche abelsche Gruppe ist als $\mathbb{Z}$-Modul sowohl noethersch als auch artinsch.

Beispiel 29.5. Der Ring $\mathbb{Z}$ der ganzen Zahlen ist als $\mathbb{Z}$-Modul noethersch, aber nicht artinsch, denn wir haben $(a) \supsetneq (a^2) \supsetneq \cdots$ für $a \in \mathbb{Z} \setminus \{0, \pm 1\}$.

Sei p eine Primzahl. Sei G die Gruppe der Elemente von $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ mit p-Potenzordnung.

Beispiel 29.6. Es besitzt G genau eine Untergruppe G_n der Ordnung p^n für alle $n \geq 0$ und $G_0 \subsetneq G_1 \subsetneq \cdots$, so daß G nicht noethersch ist. Auf der anderen Seite sind die einzigen echten Untergruppen von G die G_n, so daß G artinsch ist.

Beispiel 29.7. Sei H die Gruppe aller rationalen Zahlen, in deren gekürzter Bruchdarstellung der Nenner eine p-Potenz ist. Dann ist H weder noethersch noch artinsch, denn es gibt eine exakte Sequenz $0 \to \mathbb{Z} \to H \to G \to 0$ und $\mathbb{Z}$ ist nicht artinsch und G ist nicht noethersch.

Sei K ein Körper.

Beispiel 29.8. Der Polynomring $K[x]$ ist als Modul über sich selbst noethersch, das heißt, er erfüllt die Kettenbedingung für seine Ideale. Auf der anderen Seite ist er nicht artinsch.

Beispiel 29.9. Der Polynomring $K[x_1, x_2, \ldots]$ in unendlich vielen Variablen ist weder noethersch noch artinsch: Die Folgen $(x_1) \subsetneq (x_1, x_2) \subsetneq \cdots$ ist streng aufsteigend, die Folge $(x_1) \supsetneq (x_1^2) \supsetneq \cdots$ ist streng absteigend.

Proposition 29.10. *Sei A ein Ring. Ein A-Modul M ist genau dann noethersch, wenn alle seine Untermoduln endlich erzeugt sind.*

Beweis. 1. Sei N ein Untermodul eines noetherschen A-Moduls. Dann gibt es einen maximalen endlich erzeugten Untermodul N_0 von N. Aus der Maximalität folgt $N_0 = N_0 + Ax$ für alle $x \in N$, also $N_0 = N$.

2. Sei umgekehrt jeder Untermodul von M endlich erzeugt, und sei $M_1 \subset M_2 \subset \cdots$ eine aufsteigende Kette von Untermoduln von M. Dann ist $N := \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} M_i$ ein endlich erzeugter Untermodul. Alle Erzeuger sind schon in einem M_n enthalten, also $M_n = N$, und damit ist die Kette stationär. □

Diese Proposition ist der Grund dafür, warum noethersche Moduln so wichtig sind. Es stellt sich heraus, daß dies in der Praxis häufig die richtige Endlichkeitsbedingung ist.

Proposition 29.11. *Sei A ein Ring. Sei $0 \to M' \to M \to M'' \to 0$ eine exakte Sequenz von A-Moduln. Dann ist M genau dann noethersch, wenn M' und M'' noethersch sind.*

Beweis.
1. Jede Kette von Untermoduln in M' bzw. M'' liefert eine Kette von Untermoduln in M. Ist sie dort stationär, so ist sie auch in M' bzw. M'' stationär.
2. Ist (M_n) eine Kette von Untermoduln in M und ist ihr Urbild in M' und ihr Bild in M'' stationär, so ist sie selbst stationär. □

Bemerkung 29.12. Eine entsprechende Aussage gilt auch für artinsche anstelle noetherscher Moduln.

Folgerung 29.13. *Sei A ein Ring. Sind dann $M_1, \ldots, M_n$ noethersche A-Moduln, so ist auch $\bigoplus_{i=1}^{n} M_i$ ein noetherscher A-Modul.*

Beweis. Wende Induktion und die Proposition auf die exakte Sequenz

$$0 \to M_1 \to \bigoplus_{i=1}^{n} M_i \to \bigoplus_{i=2}^{n} M_i \to 0$$

an. □

Bemerkung 29.14. Eine entsprechende Aussage gilt auch für artinsche anstelle noetherscher Moduln.

29.2. Noethersche und artinsche Ringe

Definition 29.15. Ein Ring A heißt *noethersch*, falls A als Modul über sich selbst noethersch ist.

Definition 29.16. Ein Ring A heißt *artinsch*, falls A als Modul über sich selbst artinsch ist.

Bemerkung 29.17. Eine Ring A ist also genau dann noethersch bzw. artinsch, wenn jede Kette aufsteigender bzw. absteigender Ideale in A stationär ist.

Beispiel 29.18. Jeder Körper ist sowohl ein noetherscher und artinscher Ring. Dasselbe gilt für die Ringe $\mathbb{Z}/(n)$ mit $n > 0$.

Beispiel 29.19. Der Ring $\mathbb{Z}$ der ganzen Zahlen ist noethersch, aber nicht artinsch.

Beispiel 29.20. Jeder Hauptidealbereich ist noethersch, denn alle seine Ideale sind endlich erzeugt.

Beispiel 29.21. Sei K ein Körper. Der Polynomring $K[x_1, x_2, \dots]$ in unendlich vielen Variablen ist nicht noethersch. Als Integritätsbereich ist er aber in einem Körper enthalten. Damit sehen wir, daß ein Unterring eines noetherschen Ringes im allgemeinen nicht wieder noethersch sein muß.

Beispiel 29.22. Sei X ein kompakter Hausdorffraum, und sei $F_1 \supsetneq F_2 \supsetneq \cdots$ eine streng absteigende Folge abgeschlossener Teilmengen. Sei $\mathcal{C}(X)$ der Ring der stetigen reellwertigen Funktionen auf X. Dann definieren die $\mathfrak{a}_n := \{f \in \mathcal{C}(X) \mid f|_{F_n} = 0\}$ eine streng aufsteigende Folge von Idealen in $\mathcal{C}(X)$, es ist $\mathcal{C}(X)$ also nicht noethersch.

Proposition 29.23. *Sei A ein noetherscher Ring. Ist dann M ein endlich erzeugter A-Modul, so ist M noethersch.*

Beweis. Es ist M ein Quotient des A-Moduls A^n, und Quotienten und Summen noetherscher Moduln sind wieder noethersch. □

Bemerkung 29.24. Eine entsprechende Aussage gilt auch für artinsche anstelle von noetherschen Ringen.

Proposition 29.25. *Sei $\mathfrak{a}$ ein Ideal eines noetherschen Ringes A. Dann ist auch $A/\mathfrak{a}$ ein noetherscher Ring.*

Beweis. Da Quotienten noetherscher Moduln noethersch sind, ist $A/\mathfrak{a}$ ein noetherscher A-Modul. Damit ist $A/\mathfrak{a}$ aber auch noethersch über sich selbst. □

Bemerkung 29.26. Eine entsprechende Aussage gilt auch für artinsche anstelle von noetherschen Ringen.

30. Kettenbedingungen II

30.1. Kompositionsreihen und Länge eines Moduls

Sei A ein Ring.

Definition 30.1. Sei M ein A-Modul. Eine *Untermodulkette von M* ist eine Kette von Untermoduln von M der Form $M_\bullet\colon M = M_0 \supsetneq M_1 \supsetneq \cdots \supsetneq M_n = 0$. Es heißt n die *Länge von $M_\bullet$*.

Definition 30.2. Ein A-Modul M heißt *einfach*, falls er genau zwei Untermoduln besitzt (0 und sich selbst).

Der Nullmodul ist nach dieser Definition also nicht einfach.

Definition 30.3. Sei M ein A-Modul. Eine Untermodulkette $M_\bullet$ von M heißt eine *Kompositionsreihe*, falls jeder Quotient M_i/M_{i+1} ein einfacher A-Modul ist.

Eine Kompositionsreihe ist also eine maximale Untermodulkette.

Definition 30.4. Sei A ein Ring und M ein A-Modul. Die *Länge $\ell(M)$ von M* ist das Infimum über die Längen aller Kompositionsreihen von M.

Es ist also $\ell(M) = \infty$ genau dann, wenn M keine Kompositionsreihe besitzt.

Hilfssatz 30.5. *Sei A ein Ring und M ein A-Modul endlicher Länge. Für jeden echten Untermodul N von M gilt $\ell(N) < \ell(M)$.*

Beweis.
1. Sei $M_\bullet$ eine Kompositionsreihe von M minimaler Länge n. Sei $N_i := N \cap M_i$. Dann ist $N_i/N_{i+1} \subset M_i/M_{i+1}$.
2. Da M_i/M_{i+1} einfach ist, ist $N_i/N_{i+1} = M_i/M_{i+1}$ oder $N_i = N_{i+1}$. Indem wir also wiederholte Moduln herausnehmen, erhalten wir eine Kompositionsreihe von N und insbesondere $\ell(N) \leq \ell(M)$.
3. Angenommen, $\ell(N) = \ell(M)$. Dann ist $N_i/N_{i+1} = M_i/M_{i+1}$, also $M_{n-1} = N_{n-1}, M_{n-2} = N_{n-2}, \ldots, M_0 = N_0$ und damit $M = N$. □

Hilfssatz 30.6. *Sei A ein Ring. Sei M ein A-Modul endlicher Länge. Die Länge einer jeden Untermodulkette von M ist höchstens $\ell(M)$.*

Beweis. Ist $M = M_0 \supsetneq M_1 \supsetneq \cdots \supsetneq M_k = 0$ eine Untermodulkette der Länge k, so haben wir nach dem letzten Hilfssatz, daß $\ell(M) > \ell(M_1) > \cdots > \ell(M_k)$, also $\ell(M) \geq k$. □

Proposition 30.7. *Sei A ein Ring. Sei M ein A-Modul, welcher eine Kompositionsreihe der Länge n besitze. Dann hat jede Kompositionsreihe die Länge n, und jede Untermodulkette von M läßt sich zu einer Kompositionsreihe erweitern.*

Beweis.
1. Sei $M_\bullet$ eine Kompositionsreihe von M der Länge k. Nach dem letzten Hilfssatz wissen wir, daß $k \leq \ell(M) \leq n$. Nach Definition von $\ell(M)$ folgt daraus $k = \ell(M) \leq n$.
2. Sei $M_\bullet$ eine beliebige Untermodulfolge von M der Länge k. Ist $k < \ell(M)$, so ist $M_\bullet$ keine Kompositionsreihe, also nicht maximal, also kann $M_\bullet$ zu einer Folge der Länge $k+1$ erweitert werden.
3. Ist $k = \ell(M)$, so muß $M_\bullet$ schon eine Kompositionsreihe sein, denn ansonsten könnte $M_\bullet$ zu einer Folge der Länge $\ell(M) + 1$ erweitert werden. □

30.2. Moduln endlicher Länge

Proposition 30.8. *Sei A ein kommutativer Ring. Ein A-Modul M besitzt genau dann eine Kompositionsreihe, wenn M noethersch und artinsch ist.*

Beweis.
1. Besitzt M eine Kompositionsreihe, so sind alle streng monotonen Ketten von Untermoduln endlich und damit M sowohl noethersch als auch artinsch.

2. Sei M noethersch und artinsch. Da $M_0 := M$ noethersch ist, existiert ein maximaler echter Untermodul $M_1 \subsetneq M_0$. Analog besitzt M_1 einen maximalen echten Untermodul $M_2 \subsetneq M_1$, usw. Wir erhalten eine streng absteigende Kette $M_0 \supsetneq M_1 \supsetneq \cdots$, welche endlich sein muß, da M artinsch ist. Dies ist damit eine Kompositionsreihe von M. □

Folglich definieren wir:
Sei A ein Ring.

Definition 30.9. Ist ein A-Modul M noethersch und artinsch, so heißt M *von endlicher Länge.*

Bemerkung 30.10 (Jordan–Hölderscher Satz). Sind $M_\bullet$ und $M'_\bullet$ zwei Kompositionsreihen eines A-Moduls M endlicher Länge n, so existiert ein $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ mit $M_{i-1}/M_i \cong M'_{\sigma(i)-1}/M'_{\sigma(i)}$.

Proposition 30.11. *Sei A ein Ring. Die Länge ist eine additive Funktion auf der Klasse aller A-Moduln endlicher Länge.*

Beweis. 1. Sei $0 \to M' \xrightarrow{\phi} M \xrightarrow{\psi} M'' \to 0$ eine exakte Sequenz von A-Moduln endlicher Länge. Wir müssen $\ell(M') + \ell(M'') = \ell(M)$ zeigen.

2. Sei $M'_0 \supsetneq M'_1 \supsetneq \cdots \supsetneq M'_m$ eine Kompositionsreihe in M' und $M''_0 \supsetneq M''_1 \supsetneq \cdots \supsetneq M''_n$ eine Kompositionsreihe in M''. Dann ist $\psi^{-1}(M''_0) \supsetneq \cdots \supsetneq \psi^{-1}(M''_n) = \phi(M'_0) \supsetneq \cdots \supsetneq \phi(M'_m)$ eine Kompositionsreihe von M. □

Proposition 30.12. *Für einen Vektorraum V über einem Körper K sind folgende Aussagen äquivalent.*

1. *Es ist V endlich-dimensional.*

2. *Es hat V endliche Länge.*

3. *Es ist V noethersch.*

4. *Es ist V artinsch.*

In diesen Fällen gilt außerdem $\ell(V) = \dim V$.

Beweis. 1. Besitzt V eine Basis $(e_1, \ldots, e_n)$, so bilden die Unterräume $U_i := \langle e_{i+1}, \ldots, e_n \rangle$ eine Kompositionsreihe von V.

2. Nach Definition ist V noethersch und artinsch, wenn V von endlicher Länge ist.

3. Sei V ein unendlich-dimensionaler Vektorraum, das heißt V besitzt eine unendliche Familie $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ linear unabhängiger Elemente. Dann bilden die Unterräume $U_i := \langle v_1, \ldots, v_i \rangle$ eine nicht stationäre aufsteigende Kette und die Unterräume $W_i := \langle v_{i+1}, v_{i+2}, \ldots \rangle$ eine nicht stationäre absteigende Kette. □

Folgerung 30.13. *Seien $\mathfrak{m}_1, \ldots, \mathfrak{m}_n$ maximale Ideale in einem kommutativen Ring A, so daß $\mathfrak{m}_1 \cdots \mathfrak{m}_n = (0)$. Dann ist A genau dann noethersch, wenn A artinsch ist.*

Beweis.

1. Der Ring A besitzt die Idealkette $A \supset \mathfrak{m}_1 \supset \mathfrak{m}_1\mathfrak{m}_2 \supset \cdots \supset \mathfrak{m}_1 \cdots \mathfrak{m}_n = (0)$, und jeder Faktor $(\mathfrak{m}_1 \cdots \mathfrak{m}_{i-1})/(\mathfrak{m}_1 \cdots \mathfrak{m}_i)$ ist ein Vektorraum über dem Körper $A/\mathfrak{m}_i$.

2. Damit ist jeder Faktor genau dann artinsch, wenn er noethersch ist.

3. Es ist A genau dann noethersch bzw. artinsch, wenn jeder Faktor noethersch bzw. artinsch ist. □

Teil VII. Noethersche Ringe

31. Noethersche Ringe

31.1. Elementare Eigenschaften noetherscher Ringe

Wir erinnern an folgende Möglichkeiten, einen Ring A als noethersch zu charakterisieren:

1. Jede nicht leere Menge von Idealen von A besitzt ein maximales Element.

2. Jede aufsteigende Kette von Idealen in A ist stationär.

3. Jedes Ideal in A ist endlich erzeugt.

Proposition 31.1. *Sei $\phi\colon A \to B$ ein Homomorphismus von Ringen. Ist A noethersch, so ist auch $\phi(A)$ noethersch.*

Beweis. Nach dem Homomorphiesatz ist $\phi(A) \cong A/\ker\phi$, und Quotienten noetherscher Ringe sind noethersch. □

Proposition 31.2. *Sei $A \subset B$ eine endliche Erweiterung kommutativer Ringe. Sei A noethersch. Dann ist auch B noethersch.*

Beweis. Da B als A-Modul endlich erzeugt ist und A ein noetherscher Ring ist, ist B als A-Modul noethersch. Damit ist B auch als Modul über sich selbst noethersch. □

Beispiel 31.3. Der Ring $\mathbb{Z}[i]$ der ganzen Gaußschen Zahlen eine endliche Erweiterung von $\mathbb{Z}$ und damit noethersch.

Bemerkung 31.4. Allgemeiner ist ganze Abschluß von $\mathbb{Z}$ in einer beliebigen endlichen algebraischen Erweiterung von $\mathbb{Q}$ ein noetherscher Ring.

Sei A ein noetherscher kommutativer Ring.

Proposition 31.5. *Sei $S \subset A$ multiplikativ abgeschlossen. Dann ist $S^{-1}A$ noethersch.*

Beweis. 1. Jedes Ideal in $S^{-1}A$ ist von der Form $S^{-1}\mathfrak{a}$, wobei $\mathfrak{a}$ ein Ideal in A ist.

2. Erzeugen $x_1, \dots, x_n$ das Ideal $\mathfrak{a}$, so wird $S^{-1}\mathfrak{a}$ von $\frac{x_1}{1}, \dots, \frac{x_n}{1}$ erzeugt. □

Folgerung 31.6. *Die Halme $A_\mathfrak{p}$ von A sind noethersch.* □

31.2. Der Hilbertsche Basissatz

Satz 31.7 (Hilbertscher Basissatz)**.** *Ist A ein noetherscher kommutativer Ring, so ist auch der Polynomring $A[x]$ noethersch.*

Beweis. 1. Sei $\mathfrak{a}$ ein Ideal in $A[x]$. Die führenden Koeffizienten der Polynome in $\mathfrak{a}$ erzeugen ein Ideal $\mathfrak{l}$ in A, welches nach Voraussetzung von endlich vielen Elementen $a_1, \dots, a_n$ erzeugt ist.

2. Zu jedem a_i wählen wir ein Polynom $f_i \in \mathfrak{a}$ mit Leitmonom $a_i x^{r_i}$. Sei r das Maximum der r_i. Die f_i erzeugen ein Ideal $\mathfrak{a}' \subset \mathfrak{a}$.

3. Sei $f \in \mathfrak{a}$ ein Polynom mit Leitmonom ax^m. Ist $m \geq r$, so existieren $u_i \in A$ mit $a = \sum_i u_i a_i$. Dann ist $f - \sum_i u_i f_i x^{m-r_i} \in \mathfrak{a}$ ein Polynom echt kleineren Grades als f. Indem wir so fortfahren, können wir $f = g + h$ mit $h \in \mathfrak{a}'$ schreiben, wobei $\deg g < r$.

4. Ist M der von $1, x, \dots, x^{r-1}$ erzeugte A-Modul, so haben wir $\mathfrak{a} = (\mathfrak{a} \cap M) + \mathfrak{a}'$ gezeigt.

5. Es ist $\mathfrak{a} \cap M$ als Untermodul eines noetherschen Moduls endlich erzeugt, etwa von $g_1, \dots, g_m$. Damit ist $\mathfrak{a}$ von $g_1, \dots, g_m, f_1, \dots, f_n$ erzeugt. □

Folgerung 31.8. *Ist A ein noetherscher kommutativer Ring, so ist auch der Polynomring $A[x_1, \dots, x_n]$ in endlich vielen Variablen noethersch.*

Beweis. Folgt aus dem Hilbertschen Basissatz mittels Induktion über n. □

Folgerung 31.9. *Sei A ein noetherscher Ring. Dann ist jede endlich erzeugte kommutative A-Algebra B noethersch.*

Beweis. Es ist B ein Bild eines Polynomringes der Form $A[x_1, \dots, x_n]$ unter einem Ringhomomorphismus. □

Proposition 31.10. *Seien $A \subset B \subset C$ Erweiterungen kommutativer Ringe. Seien A noethersch und C endlich erzeugt als A-Algebra. Sei weiter C endlich als B-Algebra. Dann ist B endlich erzeugt als A-Algebra.*

Bemerkung 31.11. In der Situation der Proposition ist es wegen Proposition 25.3 auf Seite 65 äquivalent zu fordern, daß C ganz als B-Algebra ist.

Beweis. 1. Seien $x_1, \dots, x_m$ Erzeuger von C als A-Algebra. Seien weiter $y_1, \dots, y_n$ Erzeuger von C als B-Modul. Damit existieren $b_i^j \in B$ mit $x_i = \sum_j b_i^j y_j$ und $b_{ij}^k \in B$ mit $y_i y_j = \sum_k b_{ij}^k y_k$. Sei B_0 die von den b_i^j und b_{ij}^k erzeugte A-Unteralgebra von B. Da A noethersch ist, ist auch B_0 noethersch.

2. Jedes Element in C ist ein Polynom in den x_i mit Koeffizienten in A. Durch wiederholtes Einsetzen der Ausdrücke für x_i und $y_i y_j$ erhalten wir, daß jedes Element in C eine Linearkombination der y_j mit Koeffizienten in B_0 ist, und damit ist C eine endliche B_0-Algebra.

3. Da B_0 noethersch ist, ist damit C ein noetherscher B_0-Modul. Da B ein Untermodul von C ist, ist B als B_0-Modul endlich erzeugt.

4. Schließlich ist B_0 als A-Algebra endlich erzeugt, also ist auch B als A-Algebra endlich erzeugt. □

32. Primärzerlegung in noetherschen Ringen

32.1. Irreduzible Ideale

Sei A ein kommutativer Ring.

Definition 32.1. Ein Ideal $\mathfrak{a} \neq (1)$ in A heißt *irreduzibel*, falls für je zwei weitere Ideale $\mathfrak{b}, \mathfrak{c}$ von A gilt: $\mathfrak{a} = \mathfrak{b} \cap \mathfrak{c} \implies (\mathfrak{a} = \mathfrak{b} \vee \mathfrak{a} = \mathfrak{c})$.

Hilfssatz 32.2. *Ist A noethersch, so ist jedes Ideal $\mathfrak{a}$ ein endlicher Schnitt irreduzibler Ideale.*

Beweis. Angenommen, es gibt ein Ideal, welches sich nicht als endlicher Schnitt irreduzibler Ideale schreiben läßt. Dann gibt es auch ein solches maximales $\mathfrak{a}$. Da $\mathfrak{a}$ selbst nicht irreduzibel sein kann, existieren Ideale $\mathfrak{b}, \mathfrak{c}$ mit $\mathfrak{a} = \mathfrak{b} \cap \mathfrak{c}$, aber $\mathfrak{a} \subsetneq \mathfrak{b}, \mathfrak{c}$. Damit sind $\mathfrak{b}, \mathfrak{c}$ jeweils Schnitte endlich vieler irreduzibler Ideale, also auch $\mathfrak{a}$. Widerspruch. □

Hilfssatz 32.3. *Sei $\mathfrak{a}$ ein irreduzibles Ideal in einem noetherschen kommutativen Ring A. Dann ist $\mathfrak{a}$ ein Primärideal.*

Beweis. 1. Indem wir von A zu $A/\mathfrak{a}$ übergehen, können wir uns auf den Fall beschränken, daß das Nullideal primär ist, wenn es irreduzibel ist.

2. Sei also $xy = 0$ mit $y \neq 0$. Die Kette $\operatorname{ann}(x) \subset \operatorname{ann}(x^2) \subset \cdots$ ist stationär, also ist $\operatorname{ann}(x^n) = \operatorname{ann}(x^{n+1})$ für ein n.

3. Sei $a \in (x^n) \cap (y)$. Dann ist $a = bx^n$ für ein $b \in A$ und $ax = bx^{n+1} = 0$. Insbesondere $b \in \operatorname{ann}(x^{n+1}) = \operatorname{ann}(x^n)$, also $a = bx^n = 0$. Folglich $(x^n) \cap (y) = (0)$.

4. Ist (0) irreduzibel, so folgt wegen $(y) \neq (0)$ damit $(x^n) = 0$, also $x^n = 0$. □

32.2. Existenz der Primärzerlegung in noetherschen Ringen

Sei A ein noetherscher kommutativer Ring.

Satz 32.4. *In A ist jedes Ideal zerlegbar.* □

Proposition 32.5. *Jedes Ideal $\mathfrak{a}$ in A enthält eine Potenz seines Wurzelideals.*

Beweis.

1. Seien $x_1, \ldots, x_k$ Erzeuger von $\sqrt{\mathfrak{a}}$. Dann gilt $x_i^{n_i} \in \mathfrak{a}$ für gewisse n_i. Sei $m := \sum_i (n_i - 1) + 1$.
2. Es wird $\sqrt{\mathfrak{a}}^m$ von Produkten $x_1^{r_1} \cdots x_k^{r_k}$ mit $\sum_i r_i = m$ erzeugt. Nach Definition von m gilt $r_i \geq n_i$ für mindestens ein i und damit $x_1^{r_1} \cdots x_k^{r_k} \in \mathfrak{a}$. □

Sei A ein noetherscher kommutativer Ring.

Folgerung 32.6. *Das Nilradikal in A ist nilpotent.*

Beweis. Eine Potenz von $\sqrt{(0)}$ ist in (0) enthalten. □

Folgerung 32.7. *Für ein maximales Ideal $\mathfrak{m}$ und ein weiteres Ideal $\mathfrak{q}$ eines noetherschen kommutativen Ringes A sind äquivalent:*

1. *Es ist $\mathfrak{q}$ ein $\mathfrak{m}$-primäres Ideal.*
2. *Es ist $\sqrt{\mathfrak{q}} = \mathfrak{m}$.*
3. *Es ist $\mathfrak{m}^n \subset \mathfrak{q} \subset \mathfrak{m}$ für $n \gg 0$.*

Beweis. Die Äquivalenz der ersten beiden Aussagen gilt in beliebigen kommutativen Ringen. Daß aus der zweiten die dritte folgt, ist die Aussage der Proposition. Die zweite folgt aus der dritten so: $\mathfrak{m} = \sqrt{\mathfrak{m}^n} \subset \sqrt{\mathfrak{q}} \subset \sqrt{\mathfrak{m}} = \mathfrak{m}$. □

Proposition 32.8. *Sei $\mathfrak{a}$ ein Ideal in einem noetherschen kommutativen Ring A. Dann sind die zu $\mathfrak{a}$ assoziierten Primideale genau die Primideale in A von der Form $(\mathfrak{a} : x)$ mit $x \in A$.*

Beweis. Es reicht, die Aussage für $A/\mathfrak{a}$ und das Nullideal zu beweisen, da die eigentliche Aussage dann durch Kontraktion nach A folgt. Wir zeigen also, daß in einem noetherschen Ring die zu (0) assoziierten Primideale gerade die Primideale der Form $\operatorname{ann}(x) = (0 : x)$ mit $x \in A$ sind.

Fortsetzung.

1. Sei $\bigcap_{i=1}^{n} \mathfrak{q}_i = (0)$ eine minimale Primärzerlegung. Sei $\mathfrak{p}_i := \sqrt{\mathfrak{q}_i}$. Sei $\mathfrak{a}_i = \bigcap_{j \neq i} \mathfrak{q}_j \neq (0)$. Wir hatten schon einmal $\sqrt{\operatorname{ann}(x)} = \mathfrak{p}_i$ für alle $x \in \mathfrak{a}_i \setminus \{0\}$ gezeigt, also $\operatorname{ann}(x) \subset \mathfrak{p}_i$.
2. Da $\mathfrak{p}_i = \sqrt{\mathfrak{q}_i}$, ist $\mathfrak{p}_i^m \subset \mathfrak{q}_i$ für $m \gg 0$, also $\mathfrak{a}_i \mathfrak{p}_i^m \subset \mathfrak{a}_i \cap \mathfrak{p}_i^m \subset \mathfrak{a}_i \cap \mathfrak{q}_i = (0)$. Sei m jetzt die kleinste natürliche Zahl mit $\mathfrak{a}_i \mathfrak{p}_i^m = (0)$ und $x \in \mathfrak{a}_i \mathfrak{p}_i^{m-1} \setminus \{0\}$.

3. Dann ist $\mathfrak{p}_i x = 0$, also $\operatorname{ann}(x) \supset \mathfrak{p}_i$, also $\operatorname{ann}(x) = \mathfrak{p}_i$.

4. Ist umgekehrt $\operatorname{ann}(x)$ ein Primideal, so haben wir schon gezeigt, daß $\operatorname{ann}(x) = \sqrt{\operatorname{ann}(x)}$ ein assoziiertes Primideal ist. □

Teil VIII. Artinsche Ringe

33. Artinsche Ringe

33.1. Elementare Eigenschaften Artinscher Ringe

Wir erinnern an folgende Möglichkeiten, einen Ring A als artinsch zu charakterisieren:

1. Jede nicht leere Menge von Idealen von A besitzt ein minimales Element.

2. Jede absteigende Kette von Idealen in A ist stationär.

Die anscheinende Symmetrie mit noetherschen Ringen ist irreführend. Und zwar werden wir sehen, daß jeder artinsche Ring notwendigerweise ein noetherscher Ring und zudem von besonders einfacher Gestalt ist.

Proposition 33.1. *Sei A ein artinscher kommutativer Ring. Dann ist jedes Primideal in A maximal.*

Beweis. Ist $\mathfrak{p}$ ein Primideal in A, so ist $B := A/\mathfrak{p}$ ein artinscher Integritätsbereich. Sei $x \in B \setminus \{0\}$. Dann ist $(x^n) = (x^{n+1})$ für ein $n \gg 0$, da B artinsch ist, also $x^n = x^{n+1}y$ für $y \in B$. Kürzen mit x^n liefert $1 = xy$, also ist $x \in B^\times$. Damit ist B ein Körper und $\mathfrak{p}$ ein maximales Ideal. □

Folgerung 33.2. *In einem artinschen kommutativen Ring ist das Nilradikal gleich dem Jacobsonschen Radikal.* □

Proposition 33.3. *Ein artinscher kommutativer Ringe hat nur endlich viele maximale Ideale.*

Beweis.
1. Die Menge aller endlichen Schnitte maximaler Ideale hat ein minimales Element, etwa $\mathfrak{m}_1 \cap \cdots \cap \mathfrak{m}_n$, wobei die $\mathfrak{m}_i$ maximale Ideale sind.

2. Für jedes weitere maximale Ideal $\mathfrak{m}$ haben wir damit $\mathfrak{m} \supset \mathfrak{m}_1 \cap \cdots \cap \mathfrak{m}_n$.

3. Da $\mathfrak{m}$ ein Primideal ist, folgt $\mathfrak{m} \supset \mathfrak{m}_i$ für ein i, aufgrund der Maximalität also $\mathfrak{m} = \mathfrak{m}_i$. □

Proposition 33.4. *In einem kommutativen artinschen Ring ist das Nilradikal $\mathfrak{n}$ nilpotent.*

Beweis. 1. Da der Ring artinsch ist, existiert ein $k \gg 0$ mit $\mathfrak{a} := \mathfrak{n}^k = \mathfrak{n}^{k+1} = \cdots$. Angenommen, $\mathfrak{a} \neq (0)$.

2. Die Menge der Ideale $\mathfrak{b}$ mit $\mathfrak{a}\mathfrak{b} \neq (0)$ ist nicht leer, da insbesondere $\mathfrak{a}$ ein solches Ideal ist, besitzt also ein minimales Element $\mathfrak{c}$.

3. Es existiert ein $x \in \mathfrak{c}$ mit $x\mathfrak{a} \neq (0)$. Weiter ist $(x) \subset \mathfrak{c}$, also $(x) = \mathfrak{c}$ aufgrund der Minimalität von $\mathfrak{c}$.

4. Weiter ist $(x\mathfrak{a})\mathfrak{a} = x\mathfrak{a}^2 = x\mathfrak{a} \neq (0)$ und sowieso $x\mathfrak{a} \subset (x)$, also $x\mathfrak{a} = (x)$ aufgrund der Minimalität von (x).

5. Damit ist $x = xy$ für ein $y \in \mathfrak{a}$, also $x = xy = xy^2 = \cdots = xy^n$. Da y insbesondere nilpotent ist, ist folglich $x = 0$, Widerspruch. □

33.2. Der Struktursatz für artinsche kommutative Ringe

Sei A ein kommutativer Ring.

Definition 33.5. Eine *Primidealkette in A* ist eine streng aufsteigende Kette $\mathfrak{p}_0 \subsetneq \mathfrak{p}_1 \subsetneq \cdots \subsetneq \mathfrak{p}_n$ von Primidealen in A. Es heißt n die *Länge* der Kette.

Definition 33.6. Die *Dimension* $\dim A$ *von A* ist das Supremum der Längen aller Primidealketten in A.

Beispiel 33.7. Es ist $\dim A \geq 0$ genau dann, wenn A nicht der Nullring ist.

Beispiel 33.8. Die Dimension eines Körpers ist 0.

Beispiel 33.9. Für den Ring der ganzen Zahlen gilt $\dim \mathbb{Z} = 1$.

Hilfssatz 33.10. *Seien* $\mathfrak{m}_1, \ldots, \mathfrak{m}_n$ *die maximalen Ideale eines artinschen kommutativen Ringes A. Dann ist* $\prod_{i=1}^n \mathfrak{m}_i^k = (0)$ *für* $k \gg 0$.

Beweis. 1. Da jedes Primideal in A maximal ist, gilt $\mathfrak{n} = \mathfrak{m}_1 \cap \cdots \cap \mathfrak{m}_n$ für das Nilradikal $\mathfrak{n}$ von A.

2. Da das Nilradikal in A nilpotent ist, gilt $\prod_{i=1}^n \mathfrak{m}_i^k \subset (\bigcap_{i=1}^n \mathfrak{m}_i)^k = \mathfrak{n}^k = (0)$ für $k \gg 0$. □

Satz 33.11. *Ein kommutativer Ring $A \neq 0$ ist genau dann artinsch, wenn er noethersch ist und* $\dim A = 0$ *gilt.*

Beweis. 1. Ist A artinsch, so sind alle Primideale maximal, also $\dim A = 0$. Weiter ist nach dem letzten Lemma das Nullideal Produkt von maximalen Idealen. Damit sind äquivalent, daß A artinsch und noethersch ist.

2. Sei A noethersch mit $\dim A = 0$. Da das Nullideal eine Primärzerlegung besitzt, gibt es nur endlich viele minimale Primideale. Wegen $\dim A = 0$ sind alle diese maximal.

3. Das Nilradikal ist also Schnitt endlich vieler maximaler Ideale. Da das Nilradikal in noetherschen Ringen nilpotent ist, ist das Nullideal Produkt endlich vieler maximaler Ideale. Damit sind äquivalent, daß A artinsch und noethersch ist. □

Beispiel 33.12. Ein kommutativer Ring mit genau einem Primideal muß nicht notwendigerweise noethersch (und damit auch nicht artinsch) sein: Sei etwa $A = K[x_1, x_2, \dots]$ der Polynomring in unendlich vielen Variablen über einem Körper K. Sei $\mathfrak{a} := (x_1, x_2^2, \dots)$. Dann besitzt $B := A/\mathfrak{a}$ genau ein Primideal, nämlich das Bild von $(x_1, x_2, \dots)$. Damit ist B ein lokaler Ring der Dimension 0. Allerdings ist B nicht noethersch, denn z.B. sein Primideal ist nicht endlich erzeugt.

Ist $(A, \mathfrak{m})$ ein artinscher lokaler Ring, so ist $\mathfrak{m}$ das einzige Primideal von A und damit gleich dem Nilradikal von A. Insbesondere ist jedes Element aus $\mathfrak{m}$ nilpotent, und $\mathfrak{m}$ selbst ist nilpotent. Jedes Element aus A ist damit entweder eine Einheit oder nilpotent.

Beispiel 33.13. Sei p ein Primzahl und $n \geq 1$. Dann ist $\mathbb{Z}/(p^n)$ ein artinscher lokaler Ring mit maximalem Ideal $\mathbb{Z}/(p^n)(p)$.

Proposition 33.14. *Sei $(A, \mathfrak{m})$ ein noetherscher lokaler Ring. Dann tritt genau einer der beiden folgenden Fälle ein:*

1. *Für alle $n \in \mathbb{N}_0$ ist $\mathfrak{m}^n \supsetneq \mathfrak{m}^{n+1}$.*

2. *Es ist $\mathfrak{m}^n = (0)$ für $n \gg 0$, in welchem Falle A artinsch ist.*

Beweis. Ist $\mathfrak{m}^n = \mathfrak{m}^{n+1}$, so folgt mit dem Nakayamaschen Lemma, daß $\mathfrak{m}^n = 0$. Insbesondere ist dann $\mathfrak{m}^n \subset \mathfrak{p}$ für ein Primideal $\mathfrak{p}$. Nach Wurzelziehen erhalten wir $\mathfrak{m} = \mathfrak{p}$, also besitzt A dann nur ein Primideal, ist also artinsch. □

Satz 33.15 (Struktursatz für artinsche kommutative Ringe)**.** *Ein artinscher kommutativer Ring ist (eindeutig bis auf Isomorphie der Faktoren) ein direktes Produkt artinscher lokaler Ringe.*

Beweis der Existenz. 1. Seien $\mathfrak{m}_1, \dots, \mathfrak{m}_n$ die verschiedenen maximalen Ideale eines artinschen Ringes A. Nach dem letzten Hilfssatz ist $\prod_{i=1}^{n} \mathfrak{m}_i^k = (0)$ für $k \gg 0$. Da die $\mathfrak{m}_i = \sqrt{\mathfrak{m}_i^k}$ paarweise koprim sind, sind auch die $\mathfrak{m}_i^k$ paarweise koprim.

2. Damit gilt $\bigcap_i \mathfrak{m}_i^k = \prod_i \mathfrak{m}_i^k = (0)$. Damit ist insbesondere der kanonische Homomorphismus $A \to \prod A/\mathfrak{m}_i^k$ ein Isomorphismus. Da die $A/\mathfrak{m}_i^k$ jeweils lokale artinsche Ringe sind, ist A direktes Produkt artinscher lokaler Ringe.

Beweis der Eindeutigkeit. 1. Sei umgekehrt $A \cong \prod_{i=1}^{n} A_i$ für einen kommutativen Ring A, wobei die A_i lokale artinsche kommutative Ringe sind. Seien $\pi_i \colon A \to A_i$ die Projektionen und $\mathfrak{a}_i := \ker \pi_i$. Die $\mathfrak{a}_i$ sind paarweise koprim mit $\bigcap_i \mathfrak{a}_i = (0)$.

2. Sei $\mathfrak{q}_i$ das einzige Primideal in A_i, und sei $\mathfrak{p}_i := A \cap \mathfrak{q}_i$. Dann ist $\mathfrak{p}_i$ ein maximales Primideal in A.

3. Da (0) in A_i ein $\mathfrak{q}_i$-primäres Ideal ist, ist $\mathfrak{a}_i$ in A ein $\mathfrak{p}_i$-primäres Ideal. Damit ist $\bigcap_i \mathfrak{a}_i = (0)$ eine Primärzerlegung.

4. Da die $\mathfrak{a}_i$ paarweise koprim sind, sind die $\mathfrak{p}_i$ ebenso paarweise koprim, also die zu (0) assoziierten isolierten Primideale.

5. Damit sind alle Primkomponenten von A isoliert, also nach dem zweiten Eindeutigkeitssatz durch A eindeutig bestimmt. Also sind die $A_i \cong A/\mathfrak{a}_i$ durch A eindeutig bestimmt. □

33.3. Artinsche lokale Ringe

Sei $(A, \mathfrak{m}, F)$ ein lokaler Ring. Dann ist die spezielle Faser $\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2$ von $\mathfrak{m}$ ein F-Vektorraum.

Definition 33.16. Der F-Vektorraum $\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2$ ist der *Zariskische Kotangentialraum von A*.

Ist $\mathfrak{m}$ endlich erzeugt (z.B. weil A noethersch ist), ist auch $\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2$ als F-Vektorraum endlich erzeugt. Es folgt, daß in diesem Falle $\dim_F \mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2 < \infty$.

Wir erinnern an die Tatsache, daß sich jede Basis des Zariskischen Kotangentialraums $\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2$ zu einem Erzeugendensystem von $\mathfrak{m}$ hochheben läßt.

Hilfssatz 33.17. *Sei $(A, \mathfrak{m})$ ein artinscher lokaler Ring, so daß $\mathfrak{m}$ ein Hauptideal ist. Dann ist jedes Ideal $\mathfrak{a}$ von A ein Hauptideal.*

Beweis. 1. Sei $\mathfrak{m} = (x)$ für ein $x \in A$. Wir können $\mathfrak{a} \neq (0)$ annehmen. Da $\mathfrak{m}$ auch das Nilradikal ist, ist $\mathfrak{m}$ nilpotent. Damit existiert ein $r \in \mathbb{N}_0$ mit $\mathfrak{a} \subset \mathfrak{m}^r$, aber $\mathfrak{a} \subsetneq \mathfrak{m}^{r+1}$.

2. Folglich existiert ein $a \in A$ mit $y := ax^r \in \mathfrak{a}$, aber $y \notin (x^{r+1})$. Es folgt $a \notin (x)$, also ist a eine Einheit in A.

3. Damit ist $x^r \in \mathfrak{a}$, also $\mathfrak{m}^r = (x^r) \subset \mathfrak{a}$, also $\mathfrak{a} = \mathfrak{m}^r = (x^r)$. Also ist $\mathfrak{a}$ ein Hauptideal. □

Proposition 33.18. *Für einen artinschen lokalen Ring $(A, \mathfrak{m}, F)$ sind folgende Aussagen äquivalent:*

1. *Jedes Ideal in A ist ein Hauptideal.*

2. *Das maximale Ideal $\mathfrak{m}$ ist ein Hauptideal.*

3. *Es ist $\dim_F \mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2 \leq 1$.*

Beweis. 1. Daß aus der ersten die zweite und aus der zweite die dritte Aussage folgt ist offensichtlich.

2. Ist $\dim_F \mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2 = 0$, also $\mathfrak{m} = \mathfrak{m}^2$, so folgt $\mathfrak{m} = 0$ nach dem Nakayamaschen Lemma. Damit ist A ein Körper und nichts weiter zu zeigen.

3. Ist $\dim_F \mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2 = 1$, so wird $\mathfrak{m}$ von einem Element $x \in A$ erzeugt. Dann schließen wir mit dem Hilfssatz. □

Sei K ein Körper.

Beispiel 33.19. Die Ringe $\mathbb{Z}/(p^n)$ und $K[x]/(f^n)$, wobei p eine Primzahl ist und f ein irreduzibles Polynom, sind artinsche lokale Ringe, deren maximales Ideal von einem Element (nämlich dem Bild von p beziehungsweise f) erzeugt wird.

Beispiel 33.20. Im artinschen lokalen Ring $K[x^2, x^3]/(x^4)$ ist das maximale Ideal $\mathfrak{m}$ von den zwei Elementen x^2 und x^3 modulo x^4 erzeugt. Damit ist $\mathfrak{m}^2 = (0)$, also $\dim_K \mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2 = 2$.

Teil IX. Diskrete Bewertungsringe und Dedekindsche Bereiche

34. Diskrete Bewertungsringe

34.1. Eindimensionale noethersche Integritätsbereiche

Proposition 34.1. *Sei A ein eindimensionaler noetherscher Integritätsbereich. Dann kann jedes Ideal $\mathfrak{a} \neq (0)$ von A eindeutig als Produkt primärer Ideale mit paarweise verschiedenen Wurzelidealen geschrieben werden.*

Beweis. 1. Da A noethersch ist, existiert eine minimale Primärzerlegung $\mathfrak{a} = \bigcap_{i=1}^{n} \mathfrak{q}_i$. Die $\mathfrak{p}_i := \sqrt{\mathfrak{q}_i}$ sind Primideale ungleich dem Nullideal, welches selbst ein Primideal ist. Wegen $\dim A = 1$ sind die $\mathfrak{p}_i$ paarweise verschiedene maximale Ideale.

2. Es folgt, daß die $\mathfrak{q}_i$ paarweise koprim sind, also $\mathfrak{a} = \bigcap_i \mathfrak{q}_i = \prod_i \mathfrak{q}_i$.

3. Ist umgekehrt $\mathfrak{a} = \prod_i \mathfrak{q}_i$ mit $\mathfrak{p}_i$-primären Idealen $\mathfrak{q}_i$, so folgt analog $\mathfrak{a} = \bigcap_i \mathfrak{q}_i$. Dies ist eine minimale Primärzerlegung von $\mathfrak{a}$, in dem die $\mathfrak{q}_i$ isolierte Komponenten sind. □

Bemerkung 34.2. Ist A ein eindimensionaler noetherscher Integritätsbereich, in dem jedes Primärideal Potenz eines Primideals ist, so folgt aus der Proposition, daß jedes nicht verschwindende Ideal in A eine eindeutige Faktorisierung in Primideale besitzt. Für jedes Primideal $\mathfrak{p} \neq (0)$ besitzt der Halm $A_\mathfrak{p}$ dann dieselben Eigenschaften, in $A_\mathfrak{p}$ kann jedes nicht verschwindende Ideal also als eindeutige Potenz des maximalen Ideals geschrieben werden.

34.2. Diskrete Bewertungsringe

Definition 34.3. Eine *diskrete Bewertung auf einem Körper K* ist eine surjektive Abbildung $\nu\colon K \twoheadrightarrow \mathbb{Z} \cup \{\infty\}$ mit folgenden Eigenschaften:

1. $\nu(x) = \infty \iff x = 0$ für alle $x \in K$.

2. $\nu(xy) = \nu(x) + \nu(y)$ für alle $x, y \in K$.

3. $\nu(x + y) \geq \min(\nu(x), \nu(y))$ für alle $x, y \in K$.

Die Menge aller $x \in K$ mit $\nu(x) \geq 0$ ist ein Unterring von K und heißt der *Bewertungsring von K (zu ν)*. Dieser ist in der Tat ein Bewertungsring.

Beispiel 34.4. Sei p eine Primzahl. Jedes $x \in \mathbb{Q}^\times$ kann eindeutig in der Form $x = p^a y$ geschrieben werden, wobei $a \in \mathbb{Z}$ ist und y ein Bruch ist, dessen Zähler und Nenner nicht durch p teilbar sind. Durch die Setzung $\nu(x) \coloneqq a$ wird eine diskrete Bewertung auf $\mathbb{Q}$ definiert, deren Bewertungsring der lokale Ring $\mathbb{Z}_{(p)}$ ist.

Beispiel 34.5. Seien F ein Körper und $K \coloneqq F(x)$ der Körper der rationalen Funktion über F in x. Sei $f \in F[x]$ ein irreduzibles Polynom. Jedes $g \in K^\times$ kann eindeutig in der Form $g = f^a h$ geschrieben werden, wobei $a \in \mathbb{Z}$ ist und h ein Bruch ist, dessen Zähler und Nenner nicht durch f teilbar sind. Durch die Setzung $\nu(g) \coloneqq a$ wird eine diskrete Bewertung auf K definiert, deren Bewertungsring der lokale Ring $F[x]_{(f)}$ ist.

Definition 34.6. Ein Integritätsbereich A heißt *diskreter Bewertungsring*, falls A der Bewertungsring einer diskreten Bewertung auf seinem Quotientenkörper K ist.

Ist A ein diskreter Bewertungsring zur Bewertung $\nu\colon K \to \mathbb{Z} \cup \{\infty\}$, so ist A insbesondere ein lokaler Ring mit maximalem Ideal $\mathfrak{m} \coloneqq \{x \in A \mid \nu(x) > 0\}$.

Proposition 34.7. *Sei A ein diskreter Bewertungsring mit Bewertung $\nu\colon K \to \mathbb{Z} \cup \{\infty\}$. Seien $x, y \in A$. Dann gilt $\nu(x) = \nu(y)$ genau dann, wenn $(x) = (y)$.*

Beweis. Aus $\nu(xy^{-1}) = 0$ folgt, daß xy^{-1} eine Einheit in A ist. Umgekehrt genauso. □

Sei A ein diskreter Bewertungsring mit Bewertung $\nu\colon K \to \mathbb{Z} \cup \{\infty\}$.

Proposition 34.8. *Jedes Ideal in A ist von der Form $\mathfrak{m}_k = \{x \in A \mid \nu(x) \geq k\}$ mit $k \in \mathbb{N}_0 \cup \{\infty\}$.*

Beweis. Zu einem Ideal $\mathfrak{a}$ sei $k \coloneqq \inf\{\nu(x) \mid x \in \mathfrak{a}\}$. Dann gilt $\mathfrak{a} = \mathfrak{m}_k$, denn ist $x \in \mathfrak{a}$, so ist auch $y \in \mathfrak{a}$, falls $\nu(y) \geq \nu(x)$. □

Folgerung 34.9. *Diskrete Bewertungsringe sind noethersche lokale Ringe.*

Beweis. Die einzigen Ideale in A bilden die absteigende Folge $(1) = \mathfrak{m}_0 \supset \mathfrak{m}_1 \supset \mathfrak{m}_2 \supset \cdots$. □

Proposition 34.10. *Sei A ein diskreter Bewertungsring. Dann ist A ein eindimensionaler noetherscher lokaler Integritätsbereich, in dem jedes (nicht verschwindende) Ideal eine Potenz des maximalen Ideals $\mathfrak{m}$ ist.*

Beweis. Da die Bewertung $\nu\colon K \to \mathbb{Z} \cup \{\infty\}$ von A surjektiv ist, existiert ein $x \in \mathfrak{m}$ mit $\nu(x) = 1$. Damit ist $\mathfrak{m} = (x)$, und alle weiteren Ideale sind von der Form $\mathfrak{m}_k = (x^k) = \mathfrak{m}^k$. □

34.3. Charakterisierungen diskreter Bewertungsringe

Proposition 34.11. *Sei $(A, \mathfrak{m}, F)$ ein eindimensionaler noetherscher lokaler Integritätsbereich. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:*

1. *A ist ein diskreter Bewertungsring.*
2. *A ist ganz abgeschlossen.*
3. *$\mathfrak{m}$ ist ein Hauptideal.*
4. $\dim_F \mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2 = 1$.
5. *Jedes (nicht verschwindende) Ideal von A ist eine Potenz von $\mathfrak{m}$.*
6. *Es existiert ein $x \in A$, so daß jedes (nicht verschwindende) Ideal von der Form (x^k) mit $k \geq 0$ ist.*

Beweis.
1. Bewertungsringe sind ganz abgeschlossen.
2. Sei A ganz abgeschlossen. Sei $a \in \mathfrak{m} \setminus \{0\}$. Dann ist $\mathfrak{a} := (a)$ ein $\mathfrak{m}$-primäres Ideal (da $\mathfrak{m}$ das einzige nicht verschwindende Primideal ist), also $\sqrt{(a)} = \mathfrak{m}$. Da A noethersch ist, existiert ein n mit $\mathfrak{m}^n \subset \mathfrak{a}$. Wir wählen n minimal. Wähle ein $b \in \mathfrak{m}^{n-1}$ mit $b \notin \mathfrak{a}$. Sei $x := \frac{a}{b}$. Damit ist $x^{-1} \notin A$, also nicht ganz über A. Damit ist $x^{-1}\mathfrak{m} \subsetneq \mathfrak{m}$, denn sonst wäre $\mathfrak{m}$ ein treuer $A[x^{-1}]$-Modul, der endlich erzeugt ist als A-Modul. Aber $x^{-1}\mathfrak{m} \subset A$ nach Konstruktion, also $x^{-1}\mathfrak{m} = A$, also $\mathfrak{m} = Ax = (x)$. Damit ist $\mathfrak{m}$ ein Hauptideal.
3. Sei $\mathfrak{m}$ ein Hauptideal. Dann ist $\dim_F \mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2 \leq 1$. Da $\mathfrak{m} \neq \mathfrak{m}^2$, da $\dim A > 0$ folgt $\dim_F \mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2 = 1$.

Fortsetzung des Beweises.
1. Sei $\dim_F \mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2 = 1$. Sei $\mathfrak{a}$ ein nicht verschwindendes Ideal von A. Wir können uns auf den Fall $\mathfrak{a} \neq (1)$ beschränken. Wir haben schon gesehen, daß $\mathfrak{m}^n \subset \mathfrak{a}$ für ein n. Es ist $A/\mathfrak{m}^n$ ein lokaler artinscher Ring, dessen Zariskischer Kotangentialraum höchstens eindimensional ist. Damit ist $(A/\mathfrak{m}^n)\mathfrak{a}$ notwendigerweise eine Potenz von $(A/\mathfrak{m}^n)\mathfrak{m}$, wie wir schon gezeigt haben. Folglich ist $\mathfrak{a}$ eine Potenz von $\mathfrak{m}$.

2. Sei jedes nicht verschwindende Ideal von A eine Potenz von $\mathfrak{m}$. Da $\dim A > 0$, ist $\mathfrak{m} \neq \mathfrak{m}^2$, also existiert ein $x \in \mathfrak{m} \setminus \mathfrak{m}^2$. Nach Voraussetzung ist $(x) = \mathfrak{m}^r$ für ein $r \geq 0$, also $r = 1$. Damit ist $(x) = \mathfrak{m}$ und $(x^k) = \mathfrak{m}^k$ für alle $k \geq 0$. Damit sind alle nicht verschwindenden Ideale von der Form (x^k).

Ende des Beweises. 1. Seien alle nicht verschwindenden Ideale von der Form (x^k) mit $x \in A$. Da $\mathfrak{m}$ maximal ist, folgt $\mathfrak{m} = (x)$. Da $\dim A > 0$, damit $(x^k) \neq (x^{k+1})$. Ist also $a \in A \setminus \{0\}$, so gilt $(a) = (x^k)$ für genau ein $k \in \mathbb{N}_0$. Durch die Setzung $\nu(a) \coloneqq k$ wird eine diskrete Bewertung auf dem Quotientenkörper von A mit Bewertungsring A definiert. Folglich ist A ein diskreter Bewertungsring. □

36. Dedekindsche Bereiche

36.1. Charakterisierung Dedekindscher Bereiche

Satz 36.1. *Für einen eindimensionalen noetherschen Integritätsbereich A sind folgende Aussagen äquivalent:*

1. *A ist ganz abgeschlossen.*
2. *Jedes Primärideal in A ist eine Potenz eines Primideals.*
3. *Für jedes Primideal $\mathfrak{p} \neq (0)$ von A ist der Halm $A_\mathfrak{p}$ ein diskreter Bewertungsring.*

Erfüllt A die drei äquivalenten Aussagen des Satzes, so heißt A ein *Dedekindscher Bereich*.

Beweis. 1. Daß ein Ring ganz abgeschlossen ist, ist eine lokale Eigenschaft. Damit folgt die Äquivalenz der ersten mit der dritten Aussage aus den Charakterisierungen diskreter Bewertungsringe.

2. Auch die zweite Aussage beschreibt eine lokale Eigenschaft, denn Primärideale und Idealpotenzen verhalten sich gut unter Lokalisierung. Damit folgt die Äquivalenz der zweiten mit der dritten Aussage ebenfalls aus den Charakterisierungen diskreter Bewertungsringe, denn in noetherschen eindimensionalen lokalen Ringen sind alle Ideale $\mathfrak{a} \neq (0)$ Primärideale. □

Folgerung 36.2. *In einem Dedekindschen Bereich läßt sich jedes nicht verschwindende Ideal als eindeutiges Produkt von Primidealen schreiben.*

Beweis. 1. Jeder Dedekindsche Bereich ist ein eindimensionaler noetherscher Integritätsbereich, in welchem sich jedes Ideal eindeutig als Produkt von Primäridealen schreiben läßt.

2. Die Primärideale in einem Dedekindschen Bereich sind alle (eindeutige) Potenzen von Primidealen. □

36.2. Beispiele Dedekindscher Bereiche

Beispiel 36.3. Sei A ein Hauptidealbereich, der kein Körper ist. Da jedes Ideal offensichtlich endlich erzeugt ist, ist A ein noetherscher Ring. Da in Hauptidealbereichen jedes nicht verschwindende Primideal maximal ist, gilt weiter $\dim A = 1$. Ist $\mathfrak{p} \neq (0)$ ein Primideal, so ist $A_\mathfrak{p}$ ein lokaler Hauptidealbereich, nach unseren Charakterisierungen diskreter Bewertungsbereiche also ein solcher. Damit ist A ein Dedekindscher Bereich, das heißt Hauptidealbereiche sind spezielle Dedekindsche Bereiche.

Satz 36.4. *Sei K ein Zahlkörper, das heißt eine endliche Erweiterung von $\mathbb{Q}$. Dann ist der Ring A der ganzen Zahlen in K, das heißt der ganze Abschluß von $\mathbb{Z}$ in K, ein Dedekindscher Bereich.*

Beweis.

1. Da $\mathbb{Q}$ die Charakteristik 0 hat, ist K eine separable Erweiterung von $\mathbb{Q}$. Damit existiert eine Basis $v_1, \ldots, v_n$ von K über $\mathbb{Q}$ mit $A \subset \sum_i \mathbb{Z}v_i$.
2. Damit ist A als $\mathbb{Z}$-Modul endlich erzeugt, also noethersch. Als ganzer Abschluß in K ist A selbst ganz abgeschlossen.
3. Es bleibt zu zeigen, daß jedes Primideal $\mathfrak{p} \neq (0)$ von A maximal ist: Zunächst ist $\mathbb{Z} \cap \mathfrak{p} \neq (0)$, da A ganz über $\mathbb{Z}$ ist. Damit ist $\mathbb{Z} \cap \mathfrak{p}$ maximal. Wieder weil A ganz über $\mathbb{Z}$ ist, ist damit auch $\mathfrak{p}$ maximal. □

37. Gebrochene Ideale

37.1. Gebrochene Ideale

Sei A ein Integritätsbereich mit Quotientenkörper K.

Definition 37.1. Ein A-Untermodul $\mathfrak{r}$ von K heißt *gebrochenes Ideal von A*, falls ein $x \in A \setminus \{0\}$ mit $x\mathfrak{r} \subset A$ existiert.

Beispiel 37.2. Ein ganzes (d.h. gewöhnliches) Ideal in A ist insbesondere ein gebrochenes Ideal.

Beispiel 37.3. Jedes $u \in K$ definiert ein gebrochenes Ideal $(u) := Au \subset K$, ein *gebrochenes Hauptideal von A*.

Sei A ein Integritätsbereich mit Quotientenkörper K.

Proposition 37.4. *Ist $\mathfrak{r}$ ein endlich erzeugter A-Untermodul von K, so ist $\mathfrak{r}$ ein gebrochenes Ideal.*

Beweis. Ist $\mathfrak{r}$ von $x_1, \ldots, x_n$ erzeugt, so können wir $x_i = \frac{y_i}{z}$ mit $y_i \in A$ mit einem $z \in A$ schreiben. Dann ist $z\mathfrak{r} \subset A$. □

Proposition 37.5. *Ist A noethersch, so ist jedes gebrochene Ideal $\mathfrak{r}$ als A-Modul endlich erzeugt.*

Beweis. Ist $x \in A \setminus \{0\}$, so daß $\mathfrak{a} := x\mathfrak{r}$ ein ganzes Ideal von A ist, so ist mit $\mathfrak{a}$ auch $\mathfrak{r} = x^{-1}\mathfrak{a}$ endlich erzeugt. □

37.2. Invertierbare Ideale

Definition 37.6. Sei A ein Integritätsbereich mit Quotientenkörper K. Ein A-Untermodul $\mathfrak{r}$ von K heißt *invertierbares Ideal*, falls ein A-Untermodul $\mathfrak{s}$ mit $\mathfrak{r}\mathfrak{s} = A$ existiert.

Ist $\mathfrak{r}$ ein A-Untermodul von K, so schreiben wir $(1 : \mathfrak{r})$ für den A-Modul derjenigen $x \in K$ mit $x\mathfrak{r} \subset A$. (Diese Schreibweise möge nicht zur Verwechslung mit dem gewöhnlichen Idealquotienten führen.)

Proposition 37.7. *Sei A ein Integritätsbereich mit Quotientenkörper K. Ist dann $\mathfrak{r}$ ein invertierbares Ideal von K, so existiert genau ein A-Untermodul $\mathfrak{s}$ mit $\mathfrak{r}\mathfrak{s} = (1)$, nämlich $(1 : \mathfrak{r})$.*

In diesem Falle schreiben wir $\mathfrak{r}^{-1} := (1 : \mathfrak{r})$.

Beweis. Sei $\mathfrak{s}$ mit $\mathfrak{r}\mathfrak{s} = (1)$. Dann gilt $\mathfrak{s} \subset (1 : \mathfrak{r}) = (1 : \mathfrak{r})\mathfrak{r}\mathfrak{s} \subset \mathfrak{s}$. □

Proposition 37.8. *Sei A ein Integritätsbereich. Jedes invertierbare Ideal $\mathfrak{r}$ von A ist als A-Modul endlich erzeugt, insbesondere also ein gebrochenes Ideal von A.*

Beweis. 1. Aus $\mathfrak{r}\mathfrak{r}^{-1} = (1)$ folgt die Existenz endlich vieler $x_i \in \mathfrak{r}, y_i \in \mathfrak{r}^{-1}$ mit $\sum_i x_i y_i = 1$.

2. Für jedes $x \in \mathfrak{r}$ gilt damit $x = \sum_i (y_i x) x_i$.

3. Wegen $y_i x \in A$ wird $\mathfrak{r}$ damit als A-Modul von $x_1, \ldots, x_n$ erzeugt. □

Sei A ein Integritätsbereich mit Quotientenkörper K.

Beispiel 37.9. Ist $u \in K^\times$, so ist das Hauptideal (u) ein invertierbares Ideal mit $(u)^{-1} = (u^{-1})$.

Bemerkung 37.10. Bezüglich der Idealmultiplikation bilden die invertierbaren Ideale eine Gruppe, deren neutrales Element durch (1) gegeben ist.

Proposition 37.11. *Sei A ein Integritätsbereich. Für ein gebrochenes Ideal $\mathfrak{r}$ von A sind dann folgende Aussagen äquivalent:*

1. *Es ist $\mathfrak{r}$ invertierbar.*

2. *Es ist $\mathfrak{r}$ endlich erzeugt, und für alle Primideale $\mathfrak{p}$ von A ist $\mathfrak{r}_\mathfrak{p}$ ein invertierbares Ideal von $A_\mathfrak{p}$.*

3. *Es ist $\mathfrak{r}$ endlich erzeugt, und für alle maximalen Ideale $\mathfrak{m}$ von A ist $\mathfrak{r}_\mathfrak{m}$ ein invertierbares Ideal von $A_\mathfrak{m}$.*

Beweis. 1. Es ist $A_\mathfrak{p} = (\mathfrak{r} \cdot (1 : \mathfrak{r}))_\mathfrak{p} = \mathfrak{r}_\mathfrak{p} \cdot (1 : \mathfrak{r}_\mathfrak{p})$, da $\mathfrak{r}$ als invertierbares Ideal endlich erzeugt ist. Damit folgt die zweite aus der ersten Aussage.

2. Die dritte Aussage folgt trivialerweise aus der zweiten Aussage.

3. Um aus der dritten Aussage, die erste zu folgern, betrachten wir $\mathfrak{a} = \mathfrak{r} \cdot (1 : \mathfrak{r})$, ein ganzes Ideal. Für jedes maximale Ideal $\mathfrak{m}$ haben wir $\mathfrak{a}_\mathfrak{m} = \mathfrak{r}_\mathfrak{m} \cdot (1 : \mathfrak{r}_\mathfrak{m}) = A_\mathfrak{m}$, wenn $\mathfrak{r}$ endlich erzeugt und $\mathfrak{r}_\mathfrak{m}$ invertierbar ist. Damit ist $\mathfrak{a} = (1)$ und damit $\mathfrak{r}$ invertierbar. □

37.3. Gebrochene Ideale in Dedekindschen Bereichen

Proposition 37.12. *Ein lokaler Integritätsbereich A, welcher kein Körper ist, ist genau dann ein diskreter Bewertungsring, wenn jedes nicht verschwindende gebrochene Ideal von A invertierbar ist.*

Beweis. Sei zunächst A ein diskreter Bewertungsring. Sei x ein Erzeuger des maximalen Ideals von A. Sei $\mathfrak{r} \neq (0)$ ein gebrochenes Ideal. Dann existiert ein $y \in A$ mit $y\mathfrak{r} \subset A$, also ist $y\mathfrak{r} = (x^r)$ für ein $r \in \mathbb{N}_0$. Damit folgt $\mathfrak{r} = (x^{r-s})$, wenn $(y) = (x^s)$. Also ist $\mathfrak{r}$ invertierbar.

Fortsetzung des Beweises. 1. Sei umgekehrt jedes nicht verschwindende gebrochene Ideal invertierbar. Damit ist insbesondere jedes nicht triviale ganze Ideal invertierbar, also auch endlich erzeugt, also ist A noethersch.

2. Damit reicht es zu zeigen, daß jedes nicht verschwindende Ideal eine Potenz des maximalen Ideals $\mathfrak{m}$ ist. Angenommen, dies ist falsch. Dann existiert ein maximales nicht verschwindendes Ideal $\mathfrak{a}$, welches keine Potenz von $\mathfrak{m}$ ist.

3. Da $\mathfrak{a} \subset \mathfrak{m}$ ist $\mathfrak{m}^{-1}\mathfrak{a}$ ein ganzes Ideal mit $\mathfrak{m}^{-1}\mathfrak{a} \supset \mathfrak{a}$.

4. Wäre $\mathfrak{m}^{-1}\mathfrak{a} = \mathfrak{a}$, dann auch $\mathfrak{a} = \mathfrak{m}\mathfrak{a}$, also $\mathfrak{a} = 0$ nach dem Nakayamaschen Lemma.

5. Daher ist $\mathfrak{m}^{-1}\mathfrak{a} \supsetneq \mathfrak{a}$, also ist $\mathfrak{m}^{-1}\mathfrak{a}$ aufgrund der Maximalität von $\mathfrak{a}$ eine Potenz von $\mathfrak{m}$, also auch $\mathfrak{a}$. Widerspruch. □

Satz 37.13. *Ein Integritätsbereich A, welcher kein Körper ist, ist genau dann ein Dedekindscher Bereich, wenn jedes nicht verschwindende gebrochene Ideal invertierbar ist.*

Beweis. 1. Sei A ein Dedekindscher Bereich. Ist $\mathfrak{r} \neq (0)$ ein gebrochenes Ideal, so ist $\mathfrak{r}$ endlich erzeugt, da A noethersch ist. Für jedes Primideal $\mathfrak{p} \neq (0)$ ist $\mathfrak{r}_\mathfrak{p} \neq (0)$ ein gebrochenes, also invertierbares Ideal im diskreten Bewertungsring $A_\mathfrak{p}$. Damit ist $\mathfrak{r}$ invertierbar.

2. Sei umgekehrt jedes nicht verschwindende gebrochene Ideal invertierbar. Wie im letzten Beweis folgt, daß A noethersch ist. Damit reicht es zu zeigen, daß $A_\mathfrak{p}$ für alle Primideal $\mathfrak{p} \neq (0)$ ein diskreter Bewertungsring ist. Dazu reicht es zu zeigen, daß jedes (ganze) Ideal $\mathfrak{b} \neq (0)$ in $A_\mathfrak{p}$ invertierbar ist.

3. Es ist aber $\mathfrak{a} = A \cap \mathfrak{b}$ invertierbar, und damit auch $\mathfrak{b} = \mathfrak{a}_\mathfrak{p}$. □

37.4. Anmerkungen zur Idealklassengruppe

Folgerung 37.14. *In einem Dedekindschen Bereich A bilden die nicht verschwindenden gebrochenen Ideale eine Gruppe bezüglich der Multiplikation, die* Idealgruppe von A*.*

Bemerkung 37.15. In diesem Zusammenhang können wir den Satz über die eindeutige Faktorisierbarkeit von nicht verschwindenden Idealen in Dedekindschen Bereichen in Primideale auch so formulieren: Die Idealgruppe eines Dedekindschen Bereiches ist eine freie abelsche Gruppe, welche durch die nicht verschwindenden Primideale von A erzeugt wird.

Sei A ein Dedekindscher Bereich mit Quotientenkörper K, dessen Idealgruppe $\mathrm{I}(A)$ sei. Wir haben einen Gruppenhomomorphismus $K^\times \to \mathrm{I}(A), u \mapsto (u)$, dessen Bild die gebrochenen Hauptideale sind.

Definition 37.16. Die Faktorgruppe $\mathrm{C}(A) := \mathrm{I}(A)/K^\times$ heißt die *Idealklassengruppe von A*.

Bemerkung 37.17. Im Kern von $K^\times \to \mathrm{I}(A)$ liegen genau die $u \in K^\times$ mit $(u) = (1)$, also die Einheiten $u \in A^\times$. Wir erhalten damit eine exakte Sequenz

$$1 \to A^\times \to K^\times \to \mathrm{I}(A) \to \mathrm{C}(A) \to 1$$

(multiplikativ geschriebener) abelscher Gruppen.

Seien K ein Zahlkörper und A sein Ring ganzer Zahlen, ein Dedekindscher Bereich.

Bemerkung 37.18. In der algebraischen Zahlentheorie wird gezeigt, daß $\mathrm{C}(A)$ eine endliche Gruppe ist, ihre Ordnung heißt die *Klassenzahl von K*. Es ist genau dann $[\mathrm{C}(A) : 1] = 1$, wenn jedes invertierbare Ideal in A ein gebrochenes Hauptideal ist. Und dies ist genau dann der Fall, wenn A ein faktorieller Ring ist.

Bemerkung 37.19. Es ist $A^\times$ eine endlich erzeugte abelsche Gruppe. Die Elemente endlicher Ordnung sind gerade die Einheitswurzeln $\boldsymbol{\mu}(K)$ von K. Der Rang der freien abelschen Gruppe $A^\times/\boldsymbol{\mu}(K)$ ist $r_1 + r_2 - 1$, wobei r_1 die Anzahl der reellen und $2r_2$ die Anzahl der echt komplexen Einbettungen von K in $\mathbb{C}$ ist.

Beispiel 37.20. Der Zahlkörper $\mathbb{Q}(\sqrt{-1})$ besitzt nur zwei echt komplexe Einbettungen. Sein Ring $\mathbb{Z}[i]$ ganzer Zahlen besitzt damit nur endlich viele Einheiten, nämlich alle Einheitswurzeln: $\pm 1, \pm i$.

Beispiel 37.21. Der Zahlkörper $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$ besitzt nur zwei reelle Einbettungen. Sein Ring $\mathbb{Z}[\sqrt{2}]$ ganzer Zahlen hat damit unendlich viele Einheiten, und zwar $\pm(1 + \sqrt{2})^n$ mit $n \in \mathbb{Z}$.

Teil X. Vervollständigungen

38. Vervollständigungen I

38.1. Topologische Gruppen

Definition 38.1. Sei G eine (additiv geschriebene) Gruppe, deren zugrundeliegende Menge von Elementen ein topologischer Raum ist. Dann heißt G eine *topologische Gruppe*, falls die Addition $G \times G \to G, (g, h) \mapsto g + h$ und die Negation $G \to G, g \mapsto -g$ stetige Abbildungen sind.

Beispiel 38.2. Jede Gruppe ist bezüglich der diskreten Topologie eine topologische.

Proposition 38.3. *Sei G eine topologische Gruppe, so daß $\{0\} \subset G$ abgeschlossen ist. Dann ist G hausdorffsch.*

Beweis. Die Diagonale $\{(g, g) \mid g \in G\} \subset G \times G$ ist als Urbild von $\{0\}$ unter der stetigen Abbildung $G \times G \to G, (x, y) \mapsto x - y$ abgeschlossen. □

Beispiel 38.4. Sei H eine Untergruppe einer topologischen Gruppe G. Dann ist H mit der Teilraumtopologie eine topologische Gruppe.

Beispiel 38.5. Seien G ein topologische Gruppe und N ein Normalteiler in G. Versehen mit der Quotiententopologie ist G/N eine topologische Gruppe.

Bemerkung 38.6. Sei G eine topologische Gruppe. Für jedes $a \in G$ ist die Verschiebung $\tau_a \colon G \to G, g \mapsto a + g$ eine stetige Abbildung mit Inverse τ_{-a}. Damit ist τ_a ein Homöomorphismus. Ist also $U \subset G$ eine offene Umgebung von 0, so ist $a + U$ eine offene Umgebung von a. Umgekehrt ist jede offene Umgebung von a von dieser Form. Damit definieren die offenen Umgebungen um 0 die Topologie auf G.

Hilfssatz 38.7. *Sei G eine topologische Gruppe. Sei H der Schnitt aller (offenen) Umgebungen U von 0 in G. Dann gilt:*

1. *Es ist H ein Normalteiler in G.*
2. *Es ist H der topologische Abschluß von $\{0\}$.*
3. *Die Faktorgruppe G/H ist hausdorffsch.*
4. *Es ist G genau dann hausdorffsch, wenn $H = 0$.*

Beweis.

1. Aus der Stetigkeit der Gruppenoperationen folgt, daß H ein Normalteiler ist.
2. Es ist $\pm x \in H$ genau dann, wenn $0 \in \mp x + U$ für alle U, wenn also $\mp x \in \overline{\{0\}}$.

3. Damit sind insbesondere auch die Nebenklassen von H abgeschlossen, also sind Punkte in G/H abgeschlossen, also ist G/H hausdorffsch.

4. Schließlich ist $G \cong G/H$, wenn $H = 0$ ist, insbesondere also hausdorffsch. Umgekehrt folgt aus G hausdorffsch, daß $H = 0$, da $\{0\}$ dann abgeschlossen ist. □

38.2. Vervollständigungen topologischer Gruppen

Der Einfachheit halber setzen ab sofort voraus, daß alle unsere topologischen Gruppen G das erste Abzählbarkeitsaxiom erfüllen, daß also eine Folge $U_0 \supset U_1 \supset \cdots$ von Umgebungen von $0 \in G$ existiert, so daß für jede Umgebung U von 0 gilt, daß $U_n \subset U$ für $n \gg 0$. Eine solche Folge heißt *Umgebungsbasis von* 0.

Definition 38.8. Sei G eine topologische Gruppe. Eine *Cauchy-Folge* $(g_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ *in* G ist eine Folge von Elementen in G, so daß für alle (offenen) Umgebungen U von $0 \in G$ ein $N \in \mathbb{N}_0$ mit $g_n - g_m \in U$ für $n, m \geq N$ existiert.

Sei G eine topologische Gruppe.

Definition 38.9. Zwei Cauchy-Folgen $(g_n), (h_n)$ in G heißen *äquivalent*, wenn $\lim\limits_{n\to\infty}(g_n - h_n) = 0$.

Mit $\hat{G}$ bezeichnen wir die Menge aller Äquivalenzklassen von Cauchy-Folgen in G. Sind $(g_n), (h_n)$ beliebige Cauchy-Folgen, so ist auch $(g_n + h_n)$ eine Cauchy-Folge, deren Äquivalenzklasse nur von den Klassen von (g_n) und (h_n) abhängt. Dies definiert eine Addition auf $\hat{G}$, welche $\hat{G}$ eindeutig zu einer Gruppe macht.

Definition 38.10. Die Gruppe $\hat{G}$ heißt die *Vervollständigung von* G.

Bemerkung 38.11. Ist G abelsch, so auch $\hat{G}$.

Sei G eine topologische Gruppe.

Bemerkung 38.12. Für jede offene Umgebung U von $0 \in G$ definieren wir $\hat{U} \subset \hat{G}$ als die Menge der Äquivalenzklassen von Cauchy-Folgen (g_n) in G mit $g_n \in U$ für $n \gg 0$. Alle Teilmengen der Form $a + \hat{U}$ mit $a \in \hat{G}$ bilden dann die Basis einer Topologie auf $\hat{G}$. Mit dieser Definition wird $\hat{G}$ zu einer topologischen Gruppe.

Ist U eine mit der Teilraumtopologie versehene Untergruppe, so stimmt $\hat{U}$ mit der Vervollständigung von U überein.

Beispiel 38.13. Betrachten wir $\mathbb{Q}$ mit der gewöhnlichen Topologie als topologische Gruppe, so ist $\hat{\mathbb{Q}} = \mathbb{R}$.

Sei G eine topologische Gruppe. Jedes Element $g \in G$ definiert die konstante Cauchy-Folge $(g)_{n\in\mathbb{N}_0}$. Dies definiert eine kanonische Abbildung $\phi\colon G \to \hat{G}$, welche ein Gruppenhomomorphismus ist.

Beispiel 38.14. Die kanonische Abbildung $G \to \hat{G}$ ist stetig, und ihr Bild ist dicht in $\hat{G}$.

Proposition 38.15. *Es ist* $\ker\phi = \overline{\{0\}}$*, und damit ist* ϕ *genau dann injektiv, wenn* G *hausdorffsch ist.*

Beweis. Es ist $g \in \ker\phi$, wenn $g = \lim_n g = 0$, wenn also $g \in \overline{\{0\}}$. □

Sei $\phi\colon G \to H$ ein stetiger Homomorphismus topologischer Gruppen. Ist dann (g_n) eine Cauchy-Folge in G, so ist $\phi(g_n)$ eine Cauchy-Folge in H, deren Äquivalenzklasse nur von der Klasse von (g_n) abhängt. Damit definiert ϕ eine kanonische Abbildung $\hat{\phi}\colon \hat{G} \to \hat{H}$.

Proposition 38.16. *Es ist* $\hat{\phi}\colon \hat{G} \to \hat{H}$ *ein stetiger Gruppenhomomorphismus. Ist* $\psi\colon H \to K$ *ein weiterer stetiger Homomorphismus topologischer Gruppen, so ist* $\widehat{\psi \circ \phi} = \hat{\psi} \circ \hat{\phi}\colon \hat{G} \to \hat{K}$. □

38.3. Inverse Limiten

Definition 38.17. Eine Sequenz von Gruppen und Gruppenhomomorphismen der Form $\cdots \xrightarrow{\theta_3} A_2 \xrightarrow{\theta_2} A_1 \xrightarrow{\theta_1} A_0$ heißt ein *inverses System (von Gruppen)*.

Beispiel 38.18. Sei p ein Primzahl. Dann ist $\cdots \to \mathbb{Z}/(p^2) \twoheadrightarrow \mathbb{Z}/(p) \twoheadrightarrow 0$, wobei die Abbildungen die kanonischen sind, ein inverses System abelscher Gruppen.

Definition 38.19. Sei $A_\bullet\colon \cdots \xrightarrow{\theta_2} A_1 \xrightarrow{\theta_1} A_0$ ein inverses System von Gruppen. Eine Folge $(\xi_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ von Elementen $\xi_n \in A_n$ heißt *kohärent (in* $A_\bullet$*)*, wenn $\theta_n(\xi_n) = \xi_{n-1}$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

Die Menge der kohärenten Systeme bezeichnen wir mit $\varprojlim_n A_n$.

Sei $A_\bullet\colon \cdots \to A_1 \to A_0$ ein inverses System von Gruppen. Sind $(\xi_n), (\eta_n)$ zwei kohärente Folgen, so ist auch $(\xi_n) + (\eta_n) := (\xi_n + \eta_n)$ eine kohärente Folge. Dies definiert eine Addition auf der Menge $\varprojlim_n A_n$ der kohärenten Folgen. Mit dieser Definition wird $\varprojlim_n A_n$ zu einer Gruppe.

Definition 38.20. Die Gruppe $\varprojlim_n A_n$ heißt der *inverse Limes des Systems* $A_\bullet$.

Die kanonischen Abbildungen $\varprojlim_n A_n \to A_i, (\xi_n) \mapsto \xi_i$ sind für alle i Gruppenhomomorphismen.

Bemerkung 38.21. Sind die A_n abelsche Gruppen, so ist auch $\varprojlim_n A_n$ abelsch.

Bemerkung 38.22. Sei $\cdots \to A_1 \to A_0$ ein *inverses System topologischer Gruppen*, das heißt die A_i sind topologische Gruppen und die Homomorphismen $A_n \to A_{n-1}$ sind außerdem stetig. Die Menge $\prod_n A_n$ aller Folgen versehen wir mit der Produkttopologie. Damit können wir der Menge $\varprojlim_n A_n \subset \prod_n A_n$ der kohärenten Folgen die Teilraumtopologie geben. Mit dieser Setzung wird $\varprojlim_n A_n$ zu einer topologischen Gruppe.

Beispiel 38.23. Ist $\cdots \to A_1 \to A_0$ ein inverses System von Gruppen, so fassen wir es als System topologischer Gruppen auf, indem die A_n mit der diskreten Topologie versehen werden. Die Topologie des inversen Limes $\varprojlim_n A_n$ ist i.a. nicht diskret.

38.4. Topologische Gruppen mit neutralen Umgebungsbasen aus Normalteilern

Proposition 38.24. *Sei G eine topologische Gruppe. Sei $G_0 \supset G_1 \supset \cdots$ eine Umgebungsbasis von 0 aus Normalteilern. Dann sind die G_n sowohl offen als auch abgeschlossen in G.*

Beweis.

1. Ist $g \in G_n$, so ist $g + G_n$ eine Umgebung von g. Da $g + G_n \subset G_n$ folgt, daß G_n offen ist.

2. Damit ist auch $\bigcup_{h \notin G_n} (h + G_n)$ offen. Das Komplement, nämlich G_n, ist damit abgeschlossen. □

Beispiel 38.25. Sei G eine Gruppe. Sei $G_0 \supset G_1 \supset \cdots$ eine Folge von Normalteilern in G. Dann gibt es genau eine Topologie auf G, so daß $G_0 \supset G_1 \supset \cdots$ eine Umgebungsbasis von 0 ist und mit der G zu einer topologischen Gruppe wird.

Beispiel 38.26. Für jede Primzahl p wird $\mathbb{Z}$ mit der Umgebungsbasis $(1) \supset (p) \supset (p^2) \supset \cdots$ zu einer topologischen Gruppe. Die zugehörige Topologie nennen wir die *p-adische Topologie auf $\mathbb{Z}$.*

1. Sei G eine topologische Gruppe mit einer Umgebungsbasis $G_0 \supset G_1 \supset \cdots$ von 0 aus Normalteilern. Wir setzen $A_n \coloneqq G/G_n$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$.

2. Vermöge der kanonischen Homomorphismen $A_n = G/G_n \twoheadrightarrow A_{n-1} = G/G_{n-1}$ wird $A_\bullet \colon \cdots \to A_2 \to A_1 \to A_0$ zu einem inversen System topologischer Gruppen.

3. Ist dann (x_ν) eine Cauchy-Folge in G, so hängt die Äquivalenzklasse $\xi_n \in A_n$ von x_ν modulo G_n für $\nu \gg 0$ nicht von ν ab.

4. Die Folge (ξ_n) ist offensichtlich eine kohärente Folge in $A_\bullet$. Wir erhalten also eine kanonische Abbildung $\hat{G} \to \varprojlim_n A_n$, $[x_\nu] \mapsto (\xi_n)$, welche ein Gruppenhomomorphismus ist.

Proposition 38.27. *Sei G eine topologische Gruppe mit einer Umgebungsbasis $G_0 \supset G_1 \supset \cdots$. Der kanonische Gruppenhomomorphismus $\hat{G} \to \varprojlim_n G/G_n$ ist ein Isomorphismus topologischer Gruppen, das heißt ein Gruppenisomorphismus, welcher gleichzeitig ein Homöomorphismus ist.*

Beweis. Wir geben die Umkehrabbildung an: Ist $(\xi_n) \in \varprojlim_n G/G_n$ eine kohärente Folge, so definieren wir (x_ν), indem wir für jedes ν ein x_ν mit $\xi_\nu = x_\nu + G_\nu$ wählen. □

39. Vervollständigungen II

39.1. Exaktheitseigenschaften inverser Limiten

Definition 39.1. Ein inverses System $\cdots \to A_1 \to A_0$ von Gruppen heißt *surjektives System*, falls die Gruppenhomomorphismen $A_n \to A_{n-1}$ surjektiv sind.

Beispiel 39.2. Sei G eine topologische Gruppe mit einer Umgebungsbasis $G_0 \supset G_1 \supset \cdots$ von 0 aus Normalteilern. Dann ist das inverse System $\cdots \to G/G_n \to \cdots \to G/G_1 \to G/G_0$ ein surjektives.

Definition 39.3. Seien $A_\bullet\colon \cdots \xrightarrow{\alpha_1} A_1 \xrightarrow{\alpha_0} A_0$ und $B_\bullet\colon \cdots \xrightarrow{\beta_1} B_1 \xrightarrow{\beta_0} B_0$ inverse Systeme topologischer Gruppen. Eine Familie $(\phi_n\colon A_n \to B_n)_n$ stetiger Gruppenhomomorphismen ist ein *Homomorphismus inverser Systeme*, wenn $\beta_n \circ \phi_n = \phi_{n-1} \circ \alpha_n\colon A_n \to B_{n-1}$ für alle $n \geq 1$.

Beispiel 39.4. Sind $\phi_\bullet\colon A_\bullet \to B_\bullet$ und $\psi_\bullet\colon B_\bullet \to C_\bullet$ zwei Homomorphismen inverser Systeme, so ist ihre *Verknüpfung* $\psi_\bullet \circ \phi_\bullet := (\psi_n \circ \phi_n)\colon A_\bullet \to C_\bullet$ wieder ein Homomorphismus inverser Systeme.

Beispiel 39.5. Ist $A_\bullet$ ein inverses System, so ist $\mathrm{id}_{A_\bullet} := (\mathrm{id}_{A_n})\colon A_\bullet \to A_\bullet$ ein Homomorphismus inverser Systeme.

Sei $\phi_\bullet\colon A_\bullet \to B_\bullet$ ein Homomorphismus inverser Systeme. Dann definiert

$$\varprojlim_n \phi_n\colon \varprojlim_n A_n \to \varprojlim_n B_n, (\xi_n)_n \mapsto (\phi_n(\xi_n))_n$$

einen stetigen Gruppenhomomorphismus.

Beispiel 39.6. Ist $\psi_\bullet\colon B_\bullet \to C_\bullet$ ein weiterer Homomorphismus inverser Systeme, so ist $(\varprojlim_n \psi_n) \circ (\varprojlim_n \phi_n) = \varprojlim_n (\psi_n \circ \phi_n)\colon \varprojlim_n A_n \to \varprojlim_n C_n$.

Beispiel 39.7. Es ist $\varprojlim_n \mathrm{id}_{A_n} = \mathrm{id}_{\varprojlim A_n}$.

Definition 39.8. Eine Sequenz $\cdots \to A_\bullet^{i-1} \xrightarrow{\phi_\bullet^{i-1}} A_\bullet^i \xrightarrow{\phi_\bullet^i} A_\bullet^{i+1} \to \cdots$ inverser Systeme abelscher Gruppen $A_\bullet^i$ heißt *exakt bei* $A_\bullet^i$, falls die induzierten Sequenzen $A_n^{i-1} \xrightarrow{\phi_n^{i-1}} A_n^i \xrightarrow{\phi_n^i} A_n^{i+1} \to \cdots$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$ exakt sind.

Den Begriff der kurzen exakten Sequenz inverser Systeme abelscher Gruppen definieren wir auf die offensichtliche Art und Weise.

Bemerkung 39.9. Ist $\cdots \to A_\bullet^{i-1} \xrightarrow{\phi_\bullet^{i-1}} A_\bullet^i \xrightarrow{\phi_\bullet^i} A_\bullet^{i+1} \to \cdots$ eine exakte Sequenz inverser Systeme abelscher Gruppen, so ist die induzierte Sequenz $\cdots \to \varprojlim_n A_n^{i-1} \to \varprojlim_n A_n^i \to \varprojlim_n A_n^{i+1} \to \cdots$ abelscher Gruppen im allgemeinen nicht mehr exakt.

Proposition 39.10. *Sei* $0 \to A_\bullet \to B_\bullet \to C_\bullet \to 0$ *eine exakte Sequenz inverser Systeme abelscher Gruppen. Dann ist die induzierte Sequenz* $0 \to \varprojlim_n A_n \to \varprojlim_n B_n \to \varprojlim_n C_n$ *exakt.*

Beweis. 1. Sei $A_\bullet\colon \cdots \xrightarrow{\alpha_2} A_1 \xrightarrow{\alpha_1} A_0$. Sei $A := \prod_n A_n$. Setze $d^A\colon A \to A, (a_n)_n \mapsto (a_n - \alpha_{n+1}(a_{n+1}))_n$. Dann ist $\ker d^A = \varprojlim_n A_n$.

2. Definiere B, C und d^B, d^C analog. Dann ist

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & A & \longrightarrow & B & \longrightarrow & C & \longrightarrow & 0 \\ & & \Big\downarrow{\scriptstyle d^A} & & \Big\downarrow{\scriptstyle d^B} & & \Big\downarrow{\scriptstyle d^C} & & \\ 0 & \longrightarrow & A & \longrightarrow & B & \longrightarrow & C & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

ein kommutatives Diagram mit exakten Reihen.

3. Nach dem Schlangenlemma ist $0 \to \ker d^A \to \ker d^B \to \ker d^C \to \varprojlim_n{}^1 A_n$ mit $\varprojlim_n{}^1 A_n := \operatorname{coker} d^A$ exakt. □

Proposition 39.11. *Sei* $0 \to A_\bullet \to B_\bullet \to C_\bullet \to 0$ *eine exakte Sequenz inverser Systeme abelscher Gruppen. Sei weiter* $A_\bullet$ *ein surjektives System. Dann ist die induzierte Sequenz* $0 \to \varprojlim_n A_n \to \varprojlim_n B_n \to \varprojlim_n C_n \to 0$ *exakt.*

Beweis. Sei $A_\bullet\colon \cdots \xrightarrow{\alpha_2} A_1 \xrightarrow{\alpha_1} A_0$. Es ist zu zeigen, daß $\varprojlim_n{}^1 A_n = 0$, daß also d^A surjektiv ist. Dies folgt aus der Tatsache, daß sich die Gleichungen $\eta_n - \alpha_{n+1}(\eta_{n+1}) = \xi_n$ induktiv für $\eta_n \in A_n$ lösen lassen, wenn die $\xi_n \in A$ gegeben sind. □

39.2. Vollständige topologische Gruppen

Folgerung 39.12. *Sei* $0 \to G' \xrightarrow{\iota} G \xrightarrow{\pi} G'' \to 0$ *eine exakte Sequenz abelscher Gruppen. Definiere eine Folge* $G_0 \supset G_1 \supset \cdots$ *von Untergruppen von* G *eine Topologie auf* G*. Versehen wir* G' *und* G'' *mit den durch die Folgen* $\iota^{-1}G_0 \supset \iota^{-1}G_1 \supset \cdots$ *bzw.* $\pi(G_0) \supset \pi(G_1) \supset \cdots$ *definierten Topologien, so ist die induzierte Sequenz* $0 \to \hat{G}' \to \hat{G} \to \hat{G}'' \to 0$ *exakt.*

Beweis. Die Sequenzen $0 \to G'/\iota^{-1}(G_n) \to G/G_n \to G/\pi(G_n) \to 0$ sind exakt und bilden eine exakte Sequenz surjektiver Systeme. Damit ist ihr inverser Limes $0 \to \hat{G}' \to \hat{G} \to \hat{G}'' \to 0$ exakt. □

Folgerung 39.13. *Sei* G *eine abelsche topologische Gruppe. Sei* $G_0 \supset G_1 \supset \cdots$ *eine Umgebungsbasis von* 0 *aus Untergruppen. Für jedes* n *induziert der kanonische Homomorphismus* $G \to \hat{G}$ *dann einen Isomorphismus* $G/G_n \to \hat{G}/\hat{G}_n$*.*

Beweis. Es ist $0 \to G_n \to G \to G/G_n \to 0$ eine exakte Sequenz. Versehen wir G_n mit der Teilraumtopologie und G/G_n mit der diskreten Topologie, können wir die vorherige Proposition anwenden und erhalten die exakte Sequenz $0 \to \hat{G_n} \to \hat{G} \to \widehat{G/G_n} = G/G_n \to 0$. □

Definition 39.14. Eine topologische Gruppe heißt *vollständig*, wenn der kanonische Homomorphismus $G \to \hat{G}$ ein Isomorphismus ist.

Bemerkung 39.15. Eine vollständige topologische Gruppe ist also insbesondere hausdorffsch.

Proposition 39.16. *Sei G eine abelsche topologische Gruppe. Sei $G_0 \supset G_1 \supset \cdots$ eine Umgebungsbasis von 0 aus Untergruppen. Dann ist die Vervollständigung $\hat{G}$ vollständig.*

Beweis. Es ist $\hat{G} \cong \varprojlim_n G/G_n \cong \varprojlim_n \hat{G}/\hat{G}_n \cong \hat{\hat{G}}$. □

39.3. Topologische Ringe und Moduln

Definition 39.17. Ein *topologischer Ring* ist ein Ring A, dessen additive Gruppe eine topologische Gruppe ist, so daß die Multiplikation $A \times A \to A, (x, y) \mapsto xy$ eine stetige Abbildung ist.

Beispiel 39.18. Sei $\mathfrak{a}$ ein Ideal eines Ringes A. Dann gibt es genau eine Topologie auf der additiven Gruppe von A, so daß $(1) \supset \mathfrak{a} \supset \mathfrak{a}^2 \supset \cdots$ zu einer Umgebungsbasis von 0 wird, die $\mathfrak{a}$-*adische Topologie*. Da die $\mathfrak{a}^n$ Ideale sind, läßt sich zeigen, daß A damit zu einem topologischen Ring wird.

Bemerkung 39.19. Die Vervollständigung $\hat{A}$ eines topologischen Ringes A als topologische Gruppe ist wieder in kanonischer Weise ein Ring. Außerdem ist die kanonische Abbildung $A \to \hat{A}$ ein stetiger Ringhomomorphismus.

Sei $\mathfrak{a}$ ein Ideal eines Ringes A. Wir versehen A mit der $\mathfrak{a}$-adischen Topologie.

Beispiel 39.20. Es ist A genau dann hausdorffsch, wenn $\bigcap_n \mathfrak{a}^n = (0)$.

Mit $\hat{A} = \hat{A}_{\mathfrak{a}}$ bezeichnen wir die Vervollständigung von A.

Definition 39.21. Der Ring $\hat{A}_{\mathfrak{a}}$ heißt die $\mathfrak{a}$-*adische Vervollständigung von A*.

Sei A ein topologischer Ring.

Definition 39.22. Ein *topologischer A-Modul M* ist ein A-Modul M, dessen additive Gruppe eine topologische Gruppe ist, so daß die Multiplikation $A \times M \to M, (a, x) \mapsto ax$ eine stetige Abbildung ist.

Bemerkung 39.23. Die Vervollständigung $\hat{M}$ eines topologischen A-Moduls M als topologische Gruppe ist in kanonischer Weise ein $\hat{A}$-Modul. Außerdem ist die kanonische Abbildung $M \to \hat{M}$ ein stetiger Homomorphismus $M \to \hat{M}^A$ von A-Moduln.

Sei $\mathfrak{a}$ ein Ideal eines Ringes A. Sei M ein A-Modul.

Beispiel 39.24. Sei $\mathfrak{a}$ ein Ideal eines Ringes A. Sei M ein A-Modul. Dann gibt es genau eine Topologie auf der additiven Gruppe von M, so daß $M \supset \mathfrak{a}M \supset \mathfrak{a}^2M \supset \cdots$ zu einer Umgebungsbasis von 0 wird, die $\mathfrak{a}$-*adische Topologie.* In der Tat wird M damit zu einem topologischen A-Modul, wenn A mit der $\mathfrak{a}$-adischen Topologie versehen wird.

Wir versehen A und M mit der $\mathfrak{a}$-adischen Topologie. Mit $\hat{M} = \hat{M}_{\mathfrak{a}}$ bezeichnen wir die Vervollständigung von M.

Definition 39.25. Der $\hat{A}_{\mathfrak{a}}$-Modul $\hat{M}_{\mathfrak{a}}$ heißt die $\mathfrak{a}$-*adische Vervollständigung von M.*

Sei $\mathfrak{a}$ ein Ideal eines Ringes A. Sei $\phi\colon M \to N$ ein Homomorphismus von A-Moduln. Dann gilt $\phi(\mathfrak{a}^nM) \subset \mathfrak{a}^n\phi(M) \subset \mathfrak{a}^nN$, es ist ϕ damit stetig bezüglich der $\mathfrak{a}$-adischen Topologien auf M und N. Damit definiert ϕ eine Abbildung $\hat{\phi} = \hat{\phi}_{\mathfrak{a}}\colon \hat{M}_{\mathfrak{a}} \to \hat{N}_{\mathfrak{a}}$.

Proposition 39.26. *Die Abbildung $\hat{\phi}_{\mathfrak{a}}\colon \hat{M}_{\mathfrak{a}} \to \hat{N}_{\mathfrak{a}}$ ist ein stetiger Homomorphismus topologischer $\hat{A}_{\mathfrak{a}}$-Moduln.* □

Beispiel 39.27. Sei K ein Körper. Vervollständigen wir $K[x]$ bezüglich der (x)-adischen Topologie, so erhalten wir $\widehat{K[x]}_{(x)} = K[\![x]\!]$ den Potenzreihenring über K als Vervollständigung.

Beispiel 39.28. Sei p eine Primzahl. Die Vervollständigung $\mathbb{Z}_p := \hat{\mathbb{Z}}_{(p)}$ heißt der *Ring der p-adischen Zahlen.* Elemente in $\mathbb{Z}$ können wir als Reihen $\sum_{n=0}^{\infty} a_np^n$ mit $0 \leq a_n < p$ darstellen. Es gilt $\lim_n p^n = 0$ in diesem Ring.

40. Filtrationen

40.1. Filtrationen

Sei A ein Ring. Sei M ein A-Modul.

Definition 40.1.
1. Eine (unendliche) Folge $M_\bullet\colon M = M_0 \supset M_1 \supset M_2 \supset \cdots$ von Untermoduln von M heißt eine *Filtration von M.*
2. Sei $\mathfrak{a}$ ein Ideal von A. Die Filtration $M_\bullet$ heißt eine $\mathfrak{a}$-*Filtration*, falls $\mathfrak{a}M_n \subset M_{n+1}$ für alle n.
3. Eine $\mathfrak{a}$-Filtration $M_\bullet$ heißt *stabil*, falls $\mathfrak{a}M_n = M_{n+1}$ für $n \gg 0$.

Beispiel 40.2. Für jedes Ideal $\mathfrak{a}$ von A ist $M \supset \mathfrak{a}M \supset \mathfrak{a}^2M \supset \cdots$ eine stabile $\mathfrak{a}$-Filtration von M, die $\mathfrak{a}$-*adische Filtration von M.*

Hilfssatz 40.3. *Sei $\mathfrak{a}$ ein Ideal eines Ringes A. Sei M ein A-Modul. Je zwei stabile $\mathfrak{a}$-adische Filtrationen $M_\bullet$ und $M'_\bullet$ von M haben eine beschränkte Differenz, das heißt es existiert ein $n_0 \in \mathbb{N}_0$ mit $M_{n+n_0} \subset M'_n$ und $M'_{n+n_0} \subset M_n$ für alle $n \geq 0$.*

Damit sind zwei stabile $\mathfrak{a}$-adische Filtrationen Umgebungsbasen von 0 ein- und derselben Topologie auf M.

Beweis. Für $n_0 \gg 0$ gilt $M'_{n+n_0} = \mathfrak{a}^nM'_{n_0} \subset \mathfrak{a}^nM = \mathfrak{a}^nM_0 \subset \mathfrak{a}^{n-1}M_1 \subset \cdots \subset M_n$. □

41. Gewichtete Ringe und Moduln I

41.1. Definition gewichteter Ringe und Moduln

Definition 41.1. Ein *gewichteter Ring* ist ein Ring A zusammen mit einer Familie $(A_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ von Untergruppen der additiven Gruppe von A, so daß $\bigoplus_{n\in\mathbb{N}_0} A_n \to A, (a_n) \mapsto \sum_n a_n$ ein Gruppenisomorphismus ist und $A_m A_n \subset A_{n+m}$ für alle $m, n \in \mathbb{N}_0$.

Aus der Definition folgt insbesondere, daß A_0 ein Unterring von A ist und daß jedes A_n ein A_0-Modul ist.

Beispiel 41.2. Sei K ein Körper. Sei $A \coloneqq K[X_1, \ldots, X_r]$ der Polynomring in r Variablen. Für alle $n \in \mathbb{N}_0$ sei A_n die Untergruppe der homogenen Polynome vom Grad n (inklusive des Nullpolynoms). Mit dieser Setzung wird A zu einem kommutativen gewichteten Ring.

Sei A ein gewichteter Ring. Die Menge $A_+ \coloneqq \sum_{n>0} A_n$ ist ein Ideal von A.

Notation 41.3. Wir nennen A_+ das *irrelevante Ideal von A*.

Proposition 41.4. *Es ist $A_0 \to A/A_+, x \mapsto [x]_{A_+}$ ein Ringisomorphismus.* □

Definition 41.5. Sei A ein gewichteter Ring. Ein *gewichteter A-Modul* ist ein A-Modul M zusammen mit einer Familie $(M_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ von Untergruppen der additiven Gruppe von M, so daß $\bigoplus_n M_n \to M, (m_n) \mapsto \sum_n m_n$ ein Gruppenisomorphismus ist und $A_m M_n \subset M_{m+n}$ für alle $m, n \in \mathbb{N}_0$.

Aus der Definition folgt insbesondere, daß jedes M_n ein A_0-Modul ist.

Definition 41.6. Sei A ein gewichteter Ring. Sei M ein gewichteter A-Modul. Sei $n \in \mathbb{N}_0$. Ein Element $x \in M$ heißt *homogen vom Gewicht n*, falls $x \in M_n$.

Offensichtlich kann jedes Element $x \in M$ eindeutig als Summe $x = \sum_n x_n$ geschrieben werden, wobei die x_n jeweils homogen vom Gewicht n sind und fast alle x_n verschwinden (d.h. die Summe ist endlich). Die nicht verschwindenden x_n heißen die *homogenen Komponenten von x*.

Definition 41.7. Sei A ein gewichteter Ring. Seien M, N zwei gewichtete A-Moduln. Ein *Homomorphismus $\phi\colon M \to N$ gewichteter A-Moduln* ist ein Homomorphismus $\phi\colon M \to N$ von A-Moduln mit $\phi(M_n) \subset N_n$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$.

Proposition 41.8. *Ein kommutativer gewichteter Ring ist genau dann noethersch, wenn A_0 noethersch ist und A als A_0-Algebra endlich erzeugt ist.*

Beweis.

1. Ist A_0 noethersch und A als A_0-Algebra endlich erzeugt, so ist A nach dem Hilbertschen Basissatz noethersch.

2. Sei umgekehrt A noethersch. Damit ist $A_0 \cong A/A_+$ als Quotient ebenfalls noethersch. Es bleibt, endlich viele Erzeuger von A als A_0-Algebra zu finden. Zunächst ist A_+ als Ideal von A endlich erzeugt, etwa von $x_1, \ldots, x_r$. Ohne Einschränkung seien die x_i jeweils homogen von den Gewichten $d_i > 0$.

3. Sei A' die von den x_i über A_0 erzeugte Unteralgebra von A. Wir zeigen per Induktion, daß $A_n \subset A'$ für alle n. Wir können $n > 0$ annehmen. Sei $y \in A_n$.

4. Da $y \in A_+$, existieren homogene $a_i \in A$ mit $y = \sum_i a_i x_i$. Die Gewichte der a_i sind echt kleiner als n. Nach Induktionsvoraussetzung ist daher $a_i \in A'$ und damit auch $y \in A'$. □

41.2. Reessche Ringe und Moduln

Sei $\mathfrak{a}$ ein Ideal in einem kommutativen Ring A. Mit $\mathrm{R}_{\mathfrak{a}}(t) = \mathrm{R}_{\mathfrak{a}}(A, t)$ bezeichnen wir die Teilmenge aller derjenigen Polynome $a_n t^n + a_{n-1} t^{n-1} + \cdots + a_0 \in A[t]$ mit $a_i \in \mathfrak{a}^i$. Durch die Setzung $\mathrm{R}_{\mathfrak{a}}(t)_n = \mathfrak{a}^n t^n$ wird $\mathrm{R}_{\mathfrak{a}}(t)$ zu einem kommutativen gewichteten Ring.

Definition 41.9. Der gewichtete Ring $\mathrm{R}_{\mathfrak{a}}(A, t)$ heißt der *Reessche Ring von A bezüglich $\mathfrak{a}$*.

Proposition 41.10. *Sei $\mathfrak{a}$ ein Ideal in einem kommutativen Ring A. Ist A noethersch, so ist auch der Reessche Ring $\mathrm{R}_{\mathfrak{a}}(A, t)$ noethersch.*

Beweis. 1. Ist A noethersch, so ist insbesondere das Ideal $\mathfrak{a}$ endlich erzeugt, etwa von $x_1, \ldots, x_r$.

2. Damit ist $\mathrm{R}_{\mathfrak{a}}(t)$ als A-Algebra von $x_1 t, \ldots, x_r t$ erzeugt. Nach dem Hilbertschen Basissatz ist $\mathrm{R}_{\mathfrak{a}}(t)$ damit auch noethersch. □

Sei $\mathfrak{a}$ ein Ideal in einem kommutativen Ring A. Sei M ein A-Modul zusammen mit einer $\mathfrak{a}$-Filtrierung $M_\bullet \colon M = M_0 \supset M_1 \supset \cdots$. Mit $\mathrm{R}(M_\bullet, t)$ bezeichnen wir die Teilmenge aller derjenigen Polynome $m_n t^n + m_{n-1} t^{n-1} + \cdots + m_0 \in M[t]$ mit $m_i \in M_i$. Durch die Setzung $\mathrm{R}(M_\bullet, t)_n := M_n t^n$ wird $\mathrm{R}(M_\bullet, t)$ wegen $\mathfrak{a}^m M_n \subset M_{m+n}$ zu einem gewichteten $\mathrm{R}_{\mathfrak{a}}(A, t)$-Modul.

Definition 41.11. Der $\mathrm{R}_{\mathfrak{a}}(A, t)$-Modul $\mathrm{R}(M_\bullet, t)$ heißt der *Reessche Modul zur Filtration $M_\bullet$*.

Notation 41.12. Im Falle der $\mathfrak{a}$-adischen Filtrierung $M_n = \mathfrak{a}^n M$ schreiben wir $\mathrm{R}_{\mathfrak{a}}(M, t) = \mathrm{R}(M_\bullet, t)$.

Proposition 41.13. *Sei $\mathfrak{a}$ ein Ideal in einem noetherschen kommutativen Ring A. Sei M ein endlich erzeugter A-Modul zusammen mit einer $\mathfrak{a}$-Filtration $M_\bullet$. Dann ist $\mathrm{R}(M_\bullet, t)$ genau dann ein endlich erzeugter $\mathrm{R}_{\mathfrak{a}}(A, t)$-Modul, wenn die Filtration $M_\bullet$ stabil ist.*

Beweis.
1. Die A-Moduln M_n sind endlich erzeugt. Damit ist auch $Q_n := \sum\limits_{r=0}^{n} M_r t^r \subset \mathrm{R}(M_\bullet, t)$ ein endlich erzeugter A-Modul.
2. Der von Q_n in $\mathrm{R}(M_\bullet, t)$ erzeugte $\mathrm{R}_\mathfrak{a}(t)$-Untermodul Q_n^* ist damit als $\mathrm{R}_\mathfrak{a}(t)$-Modul endlich erzeugt. Es ist $\mathrm{R}(M_\bullet, t) = \sum\limits_n Q_n^*$.
3. Da $\mathrm{R}_\mathfrak{a}(t)$ noethersch ist, ist $\mathrm{R}(M_\bullet, t)$ genau dann als $\mathrm{R}_\mathfrak{a}(t)$-Modul endlich erzeugt, wenn $\mathrm{R}(M_\bullet, t) = Q_{n_0}^*$ für ein $n_0 \in \mathbb{N}_0$, wenn also $M_{n_0+n} = \mathfrak{a}^n M_{n_0}$ für alle $n \geq 0$, wenn die Filtration also stabil ist. □

41.3. Das Artin–Reessche Lemma

Proposition 41.14. *Sei $\mathfrak{a}$ ein Ideal in einem noetherschen kommutativen Ring A. Sei M ein endlich erzeugter A-Modul zusammen mit einer stabilen $\mathfrak{a}$-Filtration $M_\bullet$. Für jeden Untermodul M' von M ist dann $M' \cap M_\bullet \colon M' = M' \cap M_0 \supset M' \cap M_1 \supset M' \cap M_2 \supset \cdots$ eine stabile $\mathfrak{a}$-Filtration von M'.*

Beweis.
1. Da $\mathfrak{a}(M' \cap M_n) \subset \mathfrak{a}M' \cap \mathfrak{a}M_n \subset M' \cap M_{n+1}$, ist $M' \cap M_\bullet$ eine $\mathfrak{a}$-Filtration.
2. Der Reessche Modul Q^* zur Filtration $M' \cap M_\bullet$ von M' ist ein gewichteter $\mathrm{R}_\mathfrak{a}(t)$-Modul, und zwar ein Untermodul des endlich erzeugten $\mathrm{R}_\mathfrak{a}(t)$-Moduls $\mathrm{R}(M_\bullet, t)$.
3. Da $\mathrm{R}_\mathfrak{a}(t)$ noethersch ist, ist damit auch Q^* endlich erzeugt. Nach dem letzten Hilfssatz ist damit $M' \cap M_\bullet$ eine stabile Filtration. □

Folgerung 41.15. *Sei $\mathfrak{a}$ ein Ideal in einem noetherschen kommutativen Ring A. Sei M ein endlich erzeugter A-Modul. Dann existiert für jeden Untermodul $M' \subset M$ ein $n_0 \in \mathbb{N}_0$, so daß*

$$(\mathfrak{a}^n M) \cap M' = \mathfrak{a}^{n-n_0}((\mathfrak{a}^{n_0} M) \cap M')$$

für alle $n \geq n_0$.

Beweis. Ist die Aussage der Proposition, wenn wir die $\mathfrak{a}$-adische Filtration auf M wählen. □

Satz 41.16. *Sei A ein noetherscher kommutativer Ring. Sei $\mathfrak{a}$ ein Ideal in A. Sei M ein endlich erzeugter A-Modul und M' ein Untermodul von M. Dann haben die Filtrationen $M' \supset \mathfrak{a}M' \supset \mathfrak{a}^2 M' \supset \cdots$ und $M' \supset (\mathfrak{a}M) \cap M' \supset (\mathfrak{a}^2 M) \cap M' \supset \cdots$ beschränkte Differenz.*

Insbesondere stimmt die $\mathfrak{a}$-adische Topologie auf M' mit der von der $\mathfrak{a}$-adischen Topologie auf M induzierten Teilraumtopologie überein.

Beweis. Nach dem Artin–Reesschen Lemma ist die zweite Filtration eine stabile. Die erste ist es trivialerweise. Damit haben sie beschränkte Differenz. □

42. Gewichtete Ringe und Moduln II

42.1. Exaktheit der Vervollständigung

Proposition 42.1. *Sei A ein noetherscher kommutativer Ring. Sei $0 \to M' \to M \to M'' \to 0$ eine exakte Sequenz endlich erzeugter A-Moduln. Für jedes $\mathfrak{a}$ von A ist dann die induzierte Sequenz $0 \to \hat{M}'_{\mathfrak{a}} \to \hat{M}_{\mathfrak{a}} \to \hat{M}''_{\mathfrak{a}} \to 0$ wieder exakt.*

Beweis.

1. Die $\mathfrak{a}$-adische Topologie auf M' ist nach dem letzten Satz die von der $\mathfrak{a}$-adischen Topologie auf M induzierte.
2. Da $\phi(\mathfrak{a}^n M) = \mathfrak{a}^n \phi(M) = \mathfrak{a}^n M''$ ist außerdem die $\mathfrak{a}$-adische Topologie auf M'' die von der $\mathfrak{a}$-adischen Topologie auf M induzierte.
3. Damit ist die Vervollständigung der exakten Sequenz bezüglich dieser Topologien wieder exakt. □

Bemerkung 42.2. Sei A ein kommutativer Ring. Sei $\mathfrak{a}$ ein Ideal von A. Durch den kanonischen Homomorphismus $A \to \hat{A}_{\mathfrak{a}}$ können wir die Vervollständigung in kanonischer Weise als A-Modul auffassen. Zu jedem A-Modul M können wir damit die Skalarerweiterung $M_{\hat{A}_{\mathfrak{a}}}$ definieren. Der kanonische Homomorphismus $M \to \hat{M}^A_{\mathfrak{a}}$ von A-Moduln definiert damit einen kanonischen $\hat{A}_{\mathfrak{a}}$-Modulhomomorphismus

$$M_{\hat{A}_{\mathfrak{a}}} = M \otimes_A \hat{A}_{\mathfrak{a}} \to \hat{M}_{\mathfrak{a}} \otimes_A \hat{A}_{\mathfrak{a}} \to \hat{M}_{\mathfrak{a}} \otimes_{\hat{A}_{\mathfrak{a}}} \hat{A}_{\mathfrak{a}} \to \hat{M}_{\mathfrak{a}}.$$

Für allgemeines A und M ist dieser kanonische Homomorphismus im allgemeinen weder injektiv noch surjektiv.

Proposition 42.3. *Sei $\mathfrak{a}$ ein Ideal in einem kommutativen Ring A. Ist M ein endlich erzeugter A-Modul, so ist die kanonische Abbildung $M_{\hat{A}_{\mathfrak{a}}} \to \hat{M}_{\mathfrak{a}}$ surjektiv. Ist A außerdem noethersch, so ist $M_{\hat{A}_{\mathfrak{a}}} \to \hat{M}_{\mathfrak{a}}$ ein Isomorphismus.*

Beweis.

1. Es ist leicht zu sehen, daß die $\mathfrak{a}$-adische Vervollständigung mit direkten Summen kommutiert. Für einen A-Modul der Form $F \cong A^n$ gilt daher $F_{\hat{A}} = F \otimes_A \hat{A} \cong \hat{F}$.
2. Da M endlich erzeugt ist, existiert eine exakte Sequenz der Form $0 \to N \to F \to M \to 0$ mit $F \cong A^n$.

Fortsetzung des Beweises.

1. Die erste Zeile des kommutativen Diagrams

$$\begin{tikzcd} & N_{\hat{A}} \arrow[r] \arrow[d, "\gamma"'] & F_{\hat{A}} \arrow[r] \arrow[d, "\beta"'] & M_{\hat{A}} \arrow[r] \arrow[d, "\alpha"'] & 0 \\ 0 \arrow[r] & \hat{N} \arrow[r] & \hat{F} \arrow[r, "\psi"] & \hat{M} \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

ist exakt aufgrund der Rechtsexaktheit des Tensorproduktes.

2. Es ist ψ surjektiv, da M die von F induzierte Topologie trägt. Da β surjektiv ist, folgt daraus die Surjektivität von α.

3. Ist zusätzlich A noethersch, so ist N endlich erzeugt. Wir haben schon gezeigt, daß γ damit surjektiv ist. Außerdem ist dann die untere Zeile nach der letzten Proposition exakt.

4. Eine Diagrammjagd zeigt, daß α dann auch injektiv sein muß. □

Sei A ein noetherscher kommutativer Ring.

Proposition 42.4. *Für jedes Ideal $\mathfrak{a}$ von A ist $\hat{A}_{\mathfrak{a}}$ eine flache A-Algebra.*

Beweis. 1. Für endlich erzeugte A-Moduln M ist der Funktor $M \mapsto \hat{A} \otimes_A M \cong \hat{M}$ exakt, da die Vervollständigung exakt ist.

2. Wir haben schon allgemein gezeigt, daß dies Flachheit, also die Exaktheit für auch nicht endlich erzeugte Moduln, impliziert. □

Bemerkung 42.5. Für nicht endlich erzeugte A-Moduln ist der Funktor $M \mapsto \hat{M}$ nicht exakt. Der gute Funktor ist daher $M \mapsto M_{\hat{A}}$.

42.2. Vervollständigungen von Ringen

Proposition 42.6. *Sei $\mathfrak{a}$ ein Ideal in einem noetherschen kommutativen Ring A. Dann gilt für alle $n \in \mathbb{N}_0$:*

1. $\hat{\mathfrak{a}}_{\mathfrak{a}} = \hat{A}_{\mathfrak{a}}\mathfrak{a} \cong \mathfrak{a}_{\hat{A}_{\mathfrak{a}}}$.

2. $\widehat{\mathfrak{a}^n}_{\mathfrak{a}} = \hat{\mathfrak{a}}_{\mathfrak{a}}^n$.

3. $\mathfrak{a}^n/\mathfrak{a}^{n+1} \cong \hat{\mathfrak{a}}_{\mathfrak{a}}^n/\hat{\mathfrak{a}}_{\mathfrak{a}}^{n+1}$.

Beweis. 1. Da A noethersch ist, ist $\mathfrak{a}$ endlich erzeugt, womit die Abbildung $\mathfrak{a}_{\hat{A}} = \mathfrak{a} \otimes_A \hat{A} \to \hat{\mathfrak{a}}$ ein Isomorphismus (mit Bild $\hat{A}\mathfrak{a}$) ist.

2. $\widehat{\mathfrak{a}^n} = \hat{A}\mathfrak{a}^n = (\hat{A}\mathfrak{a})^n = \hat{\mathfrak{a}}^n$.

3. $\mathfrak{a}^n/\mathfrak{a}^{n+1} = \ker(A/\mathfrak{a}^{n+1} \to A/\mathfrak{a}^n) \cong \ker(\hat{A}/\hat{\mathfrak{a}}^{n+1} \to \hat{A}/\hat{\mathfrak{a}}^n) = \hat{\mathfrak{a}}^n/\hat{\mathfrak{a}}^{n+1}$. □

Proposition 42.7. *Sei $\mathfrak{a}$ ein Ideal in einem noetherschen kommutativen Ring A. Dann liegt $\hat{\mathfrak{a}}_{\mathfrak{a}}$ im Jacobsonschen Radikal von $\hat{A}_{\mathfrak{a}}$.*

Beweis. 1. Da $\widehat{\mathfrak{a}^n} = \hat{\mathfrak{a}}^n$, ist $\hat{A}$ vollständig bezüglich der $\hat{\mathfrak{a}}$-adischen Topologie.

2. Für jedes $x \in \hat{\mathfrak{a}}$ konvergiert $(1-x)^{-1} = 1 + x + x^2 + \cdots$ damit in $\hat{A}$, so daß $1-x$ eine Einheit in $\hat{A}$ ist.

3. Damit liegt $\hat{\mathfrak{a}}$ im Jacobsonschen Radikal von $\hat{A}$. □

Proposition 42.8. *Sei $(A, \mathfrak{m}, F)$ ein noetherscher lokaler Ring. Dann ist $(\hat{A}_\mathfrak{m}, \hat{\mathfrak{m}}_\mathfrak{m}, F)$ ein lokaler Ring.*

Beweis. 1. Es ist $\hat{A}/\hat{\mathfrak{m}} = A/\mathfrak{m} = F$, also ein Körper. Damit ist $\hat{\mathfrak{m}}$ ein maximales Ideal.

2. Da $\hat{\mathfrak{m}}$ im Jacobsonschen Ideal liegt und maximal ist, ist es das einzige maximale Ideal. Damit ist $\hat{A}$ ein lokaler Ring. □

42.3. Der Krullsche Satz

Satz 42.9 (Krullscher Satz)**.** *Sei $\mathfrak{a}$ ein Ideal in einem noetherschen kommutativen Ring A. Sei M ein endlich erzeugter A-Modul. Der Kern $K := \bigcap_{n=1}^{\infty} \mathfrak{a}^n M$ des kanonischen Homomorphismus $M \to \hat{M}_\mathfrak{a}$ besteht genau aus den $x \in M$ mit $(1 + \mathfrak{a}) \cap \operatorname{ann}(x) \neq \emptyset$.*

Beweis. 1. Da K der Schnitt aller Umgebungen von 0 ist, ist die induzierte Topologie auf K die Klumpentopologie. Da die induzierte Topologie auch die $\mathfrak{a}$-adische ist, ist damit auch die $\mathfrak{a}$-adische Topologie auf K die Klumpentopologie, es ist also $\mathfrak{a}K = K$.

2. Damit existiert ein $y \in \mathfrak{a}$ mit $(1 - y)K = 0$.

3. Ist umgekehrt $(1 - y)x = 0$ für ein $y \in \mathfrak{a}$ und ein $x \in M$, so folgt $x = yx = y^2x = \cdots \in K$. □

Bemerkung 42.10. Sei $\mathfrak{a}$ ein Ideal in einem noetherschen kommutativen Ring A. Sei $S := 1 + \mathfrak{a}$. Dann ist S multiplikativ abgeschlossen. Nach dem Krullschen Satz stimmen die Kerne der beiden kanonischen Abbildungen $A \to \hat{A}_\mathfrak{a}$ und $A \to S^{-1}A$ überein. Für jedes $x \in \hat{\mathfrak{a}}_\mathfrak{a}$ gilt weiter $(1 - x)^{-1} = 1 + x + x^2 + \cdots$, so daß jedes Element in S unter $A \to \hat{A}_\mathfrak{a}$ zu einer Einheit wird. Die universelle Eigenschaft von $S^{-1}A$ impliziert damit, daß $S^{-1}A \to \hat{A}_\mathfrak{a}, \frac{a}{s} \mapsto s^{-1}a$ zu einem wohldefinierten (injektiven) Homomorphismus von Ringen wird. Wir können (und werden) also $S^{-1}A$ mit einem Unterring von $\hat{A}_\mathfrak{a}$ identifizieren.

Beispiel 42.11. Ohne die Voraussetzung, daß der Ring noethersch ist, ist der Krullsche Satz im allgemeinen falsch. Sei etwa A der Ring aller $\mathcal{C}^\infty$-Funktionen auf $\mathbb{R}$ und $\mathfrak{a}$ das Ideal der an 0 verschwindenden Funktionen (wegen $A/\mathfrak{a} \cong \mathbb{R}$ ist $\mathfrak{a}$ maximal). Aus der Existenz der Taylorreihenentwicklung folgt, daß $\mathfrak{a}$ von der identischen Funktion x erzeugt wird und daß $\bigcap_{n=0}^{\infty} \mathfrak{a}^n$ die Menge aller $f \in A$ ist, deren Taylorreihe in 0 trivial ist. Auf der anderen Seite ist $(1 + g)f = 0$ für ein $g \in \mathfrak{a}$ genau dann Null, wenn $f \in A$ einer ganzen Umgebung um 0 verschwindet. Damit liegt die Funktion $\exp(-x^{-2})$ im Kern von $A \to \hat{A}_\mathfrak{a}$ aber nicht im Kern von $A \to (1 + \mathfrak{a})^{-1}A$. Folglich ist A nicht noethersch.

Folgerung 42.12. *Sei A ein noetherscher Integritätsbereich. Für jedes echte Ideal $\mathfrak{a} \neq (1)$ von A gilt dann $\bigcap_{n=0}^{\infty} \mathfrak{a}^n = (0)$.*

Beweis. Nach dem Krullschen Satz ist $\bigcap\limits_{n=0}^{\infty} \mathfrak{a}^n$ der Kern von $A \to (1+\mathfrak{a})^{-1}A$. Dieser ist trivial, da A ein Integritätsbereich ist. □

Folgerung 42.13. *Sei A ein noetherscher kommutativer Ring. Sei $\mathfrak{a}$ ein Ideal von A, welches im Jacobsonschen Radikal von A enthalten ist. Für jeden endlich erzeugten A-Modul ist die $\mathfrak{a}$-adische Topologie auf M dann hausdorffsch.*

Es ist also $\bigcap\limits_{n=0}^{\infty} \mathfrak{a}^n M = (0)$.

Beweis. Jedes Element der Form $1+x$ ist eine Einheit, wenn x in Jacobsonschen Radikal von A liegt. □

Folgerung 42.14. *Sei $(A, \mathfrak{m})$ ein noetherscher lokaler Ring. Für jeden endlich erzeugten A-Modul ist die $\mathfrak{m}$-adische Topologie hausdorffsch. Insbesondere ist die $\mathfrak{m}$-adische Topologie auf A hausdorffsch.* □

Folgerung 42.15. *Sei $\mathfrak{p}$ ein Primideal in einem noetherschen kommutativen Ring A. Dann ist der Kern des kanonischen Homomorphismus $A \to A_{\mathfrak{p}}$ durch den Schnitt aller $\mathfrak{p}$-primären Ideale von A gegeben.*

Beweis.

1. Ist A lokal mit maximalem Ideal $\mathfrak{m}$, so sind alle $\mathfrak{m}$-primären Ideale alle zwischen $\mathfrak{m}$ und Idealen der Form $\mathfrak{m}^n$ liegende Ideale. Damit zeigt die letzte Folgerung, daß der Schnitt aller $\mathfrak{m}$-primären Ideale in einem lokalen Ring das Nullideal ist.

2. Ist A ein beliebiger kommutativer Ring erhalten wir, daß der Schnitt aller $\mathfrak{m} := A_{\mathfrak{p}}\mathfrak{p}$-primären Ideale des lokalen Ringes $A_{\mathfrak{p}}$ das Nullideal ist.

3. Aus der Tatsache, daß die $\mathfrak{p}$-primären Ideale von A gerade die Kontraktionen der $\mathfrak{m}$-primären Ideale von $A_{\mathfrak{p}}$ sind, erhalten wir die Behauptung. □

43. Der assoziierte gewichtete Ring

43.1. Definition und grundlegende Eigenschaften des assoziierten gewichteten Ringes

Definition 43.1. Sei $\mathfrak{a}$ ein Ideal in einem kommutativen Ring A. Dann heißt der gewichtete kommutative Ring

$$\mathrm{G}_{\mathfrak{a}}(t) = \mathrm{G}_{\mathfrak{a}}(A, t) := \mathrm{R}_{\mathfrak{a}}(A, t)/t^{-1}\,\mathrm{R}_{\mathfrak{a}}(A, t)_+ \cong \bigoplus_{n=0}^{\infty} \mathfrak{a}^n/\mathfrak{a}^{n+1} t^n$$

der *assoziierte gewichtete Ring zur $\mathfrak{a}$-adischen Filtrierung von A.*

Ist $x \in \mathfrak{a}^n$, so schreiben wir $\bar{x}$ für die Restklasse modulo $\mathfrak{a}^{n+1}$. Damit können wir die Multiplikation auf $\mathrm{G}_{\mathfrak{a}}(t)$ folgendermaßen beschreiben: Es ist $(\bar{x}t^m) \cdot (\bar{y}t^n) = \overline{xy}t^{m+n}$ für $x \in \mathfrak{a}^m, y \in \mathfrak{a}^n$.

Sei $\mathfrak{a}$ ein Ideal in einem kommutativen Ring. Sei M ein A-Modul zusammen mit einer $\mathfrak{a}$-Filtrierung $M_\bullet$.

Definition 43.2. Der gewichtete A-Modul

$$\mathrm{G}(M_\bullet, t) = \mathrm{R}(M_\bullet, t)/t^{-1}\,\mathrm{R}(M_\bullet, t)_+ \cong \bigoplus_{n=0}^{\infty} M_n/M_{n+1}t^n$$

heißt der *assoziierte gewichtete Modul zur Filtrierung* $M_\bullet$.

In kanonischer Weise ist $\mathrm{G}(M_\bullet, t)$ sogar ein $\mathrm{G}_{\mathfrak{a}}(t)$-Modul. Schreiben wir wieder $\bar{\cdot}$ für Restklasen, so ist die Multiplikation auf $\mathrm{G}(M_\bullet, t)$ durch $(\bar{a}t^m) \cdot (\bar{x}t^n) = \overline{ax}t^{m+n}$ für $a \in \mathfrak{a}^m, x \in M_n$ gegeben.

Notation 43.3. Ist $M_\bullet$ die $\mathfrak{a}$-adische Filtrierung auf M, so schreiben wir $\mathrm{G}_{\mathfrak{a}}(M, t) = \mathrm{G}(M_\bullet, t)$.

Sei $\mathfrak{a}$ ein Ideal in einem kommutativen Ring A. Seien M, N zwei A-Moduln jeweils zusammen mit einer $\mathfrak{a}$-Filtrierung $M_\bullet$ bzw. $N_\bullet$. Sei $\phi\colon M \to N$ ein filtrierter Homomorphismus von A-Moduln, das heißt $\phi(M_n) \subset N_n$ für alle n. Dann induziert ϕ einen Homomorphismus

$$\mathrm{G}(\phi)\colon\ \mathrm{G}(M_\bullet, t) \to \mathrm{G}(N_\bullet, t), \bar{x}t^n \mapsto \overline{\phi(x)}t^n,$$

wobei wieder $\bar{x} \in M_n/M_{n+1}$ das Bild eines $x \in M_n$ modulo M_{n+1} ist.

Proposition 43.4. *Sei A ein noetherscher kommutativer Ring. Für ein Ideal $\mathfrak{a}$ in A gilt:*

1. *Der Ring* $\mathrm{G}_{\mathfrak{a}}(A, t)$ *ist noethersch.*
2. *Es sind* $\mathrm{G}_{\mathfrak{a}}(A, t)$ *und* $\mathrm{G}_{\hat{\mathfrak{a}}_{\mathfrak{a}}}(\hat{A}_{\mathfrak{a}}, t)$ *als gewichtete Ringe isomorph.*
3. *Für jeden endlich erzeugten A-Modul M zusammen mit einer stabilen $\mathfrak{a}$-Filtrierung $M_\bullet$ ist* $\mathrm{G}(M_\bullet, t)$ *ein endlich erzeugter* $\mathrm{G}_{\mathfrak{a}}(A, t)$*-Modul.*

Beweis. 1. Da A noethersch ist, ist $\mathfrak{a}$ durch endlich viele $x_1, \ldots, x_n \in A$ erzeugt. Ist $\bar{x}_i$ das Bild von x_i in $\mathfrak{a}/\mathfrak{a}^2$, so ist $\mathrm{G}_{\mathfrak{a}}(t)$ als A-Algebra von $\bar{x}_1 t, \ldots, \bar{x}_n t$ erzeugt. Damit ist $\mathrm{G}_{\mathfrak{a}}(t)$ noethersch.

2. $\mathrm{G}_{\mathfrak{a}}(t) \cong \bigoplus_n \mathfrak{a}^n/\mathfrak{a}^{n+1}t^n \cong \bigoplus_n \hat{\mathfrak{a}}^n/\hat{\mathfrak{a}}^{n+1}t^n \cong \mathrm{G}_{\hat{\mathfrak{a}}}(t)$.

Beweis, daß $\mathrm{G}(M_\bullet, t)$ *endlich erzeugt ist.* 1. Sei jetzt M ein endlich erzeugter A-Modul und $M_\bullet$ eine stabile $\mathfrak{a}$-Filtrierung. Dann existiert ein $n_0 \in \mathbb{N}_0$ mit $M_{n_0+r} = \mathfrak{a}^r M_{n_0}$ für alle $r \geq 0$.

2. Folglich ist $\mathrm{G}(M_\bullet, t)$ als $\mathrm{G}_\mathfrak{a}(t)$-Modul durch $\bigoplus\limits_{n=0}^{n_0} M_n/M_{n+1}t^n$ erzeugt. Die M_n/M_{n+1} sind endlich erzeugte A-Moduln, da A noethersch ist und M_n Untermodul des endlich erzeugten Moduls M ist.

3. Da $\mathfrak{a} \subset \operatorname{ann} M_n/M_{n+1}$, ist M_n/M_{n+1} auch ein endlich erzeugter $A/\mathfrak{a}$-Modul. Damit ist $\bigoplus_{n=0}^{n_0} M_n/M_{n+1}t^n$ ein endlich erzeugter $A/\mathfrak{a}$-Modul.

4. Es folgt, daß $\mathrm{G}(M_\bullet, t)$ ein endlich erzeugter $\mathrm{G}_\mathfrak{a}(t)$-Modul ist. □

43.2. Endlichkeitseigenschaften der Vervollständigung

Hilfssatz 43.5. *Seien A und B zwei abelsche Gruppen (d.h. $\mathbb{Z}$-Moduln) jeweils zusammen mit einer Filtrierung $A_\bullet$ bzw. $B_\bullet$, welche jeweils eine Umgebungsbasis um 0 einer Topologie auf A bzw. B bilden. Ist dann $\phi\colon A \to B$ ein filtrierter Homomorphismus, so gilt:*

1. *Ist $\mathrm{G}(\phi)\colon\ \mathrm{G}(A_\bullet, t) \to \mathrm{G}(B_\bullet, t)$ injektiv, so ist auch $\hat{\phi}\colon \hat{A} \to \hat{B}$ injektiv.*

2. *Ist $\mathrm{G}(\phi)\colon\ \mathrm{G}(A_\bullet, t) \to \mathrm{G}(B_\bullet, t)$ surjektiv, so ist auch $\hat{\phi}\colon \hat{A} \to \hat{B}$ surjektiv.*

Beweis. 1. Die Reihen im folgenden Diagramm sind exakt:

$$\begin{array}{ccccccccc}
0 & \longrightarrow & A_n/A_{n+1} & \longrightarrow & A/A_{n+1} & \longrightarrow & A/A_n & \longrightarrow & 0 \\
 & & \big\downarrow{\scriptstyle \psi_n} & & \big\downarrow{\scriptstyle \phi_{n+1}} & & \big\downarrow{\scriptstyle \phi_n} & & \\
0 & \longrightarrow & B_n/B_{n+1} & \longrightarrow & B/B_{n+1} & \longrightarrow & B/B_n & \longrightarrow & 0.
\end{array}$$

Nach dem Schlangenlemma existiert damit eine exakte Sequenz $0 \to \ker\psi_n \to \ker\phi_{n+1} \to \ker\phi_n \to \operatorname{coker}\psi_n \to \operatorname{coker}\phi_{n+1} \to \operatorname{coker}\phi_n \to 0$.

2. Sind die ψ_n injektiv bzw. surjektiv, folgt durch Induktion nach n, daß die ϕ_n injektiv bzw. surjektiv sind. Im letzteren Fall ist außerdem $(\ker\phi_n)_n$ ein surjektives System.

3. Im ersten Fall ist $\hat{\phi}$ injektiv, da der inverse Limes linksexakt ist.

4. Im zweiten Falle ist $\hat{\phi}$ surjektiv, da in diesem Falle $\varprojlim\limits_n{}^1(\ker\phi_n) = 0$. □

Proposition 43.6. *Sei $\mathfrak{a}$ ein Ideal in einem kommutativen Ring A. Sei M ein A-Modul zusammen mit einer $\mathfrak{a}$-Filtrierung $M_\bullet$. Sei A vollständig bezüglich der $\mathfrak{a}$-adischen Topologie, und sei M in seiner Filtrationstopologie hausdorffsch, also $\bigcap\limits_n M_n = 0$. Sei schließlich $\mathrm{G}(M_\bullet, t)$ als $\mathrm{G}_\mathfrak{a}(A, t)$-Modul endlich erzeugt. Dann ist M ein endlich erzeugter A-Modul.*

Beweis. 1. Seien $x_1, \ldots, x_r$ mit $x_i \in M_{n(i)}$ für $n(i) \in \mathbb{N}_0$, so daß die Bilder $\bar{x}_i t^{n(i)} \in M_{n(i)}/M_{n(i)+1}$ den $\mathrm{G}_\mathfrak{a}(t)$-Modul $\mathrm{G}(M_\bullet)$ erzeugen.

2. Für jedes i sei F^i der A-Modul A zusammen mit der stabilen $\mathfrak{a}$-Filtrierung $F^i_\bullet$ mit $F^i_k = \mathfrak{a}^{k+n(i)}$. Seien $F := \bigoplus_{i=1}^r F^i, F_\bullet := \bigoplus_{i=1}^r F^i_\bullet$. Dann ist $\phi\colon F \to M, (a_1, \dots, a_r) \mapsto a_1x_1 + \cdots a_rx_r$ ein Homomorphismus filtrierter Gruppen.

3. Der induzierte Homomorphismus $\mathrm{G}(\phi)\colon \mathrm{G}(F_\bullet) \to \mathrm{G}(M_\bullet)$ ist nach Konstruktion surjektiv. Damit ist der Homomorphismus $\hat{\phi}\colon \hat{F} \to \hat{M}$ zwischen den Vervollständigungen surjektiv.

4. Da $F \cong A^r$ als topologische A-Moduln und A vollständig ist, ist auch $F \cong \hat{F}$. Damit ist $F \to \hat{F} \to \hat{M}$ surjektiv. Da $M \to \hat{M}$ aufgrund der Hausdorffeigenschaft von M injektiv ist, muß damit $\phi\colon F \to M$ surjektiv sein. Folglich ist M als A-Modul von den x_i erzeugt. □

Folgerung 43.7. *Sei $\mathfrak{a}$ ein Ideal in einem kommutativen Ring A. Sei M ein A-Modul zusammen mit einer $\mathfrak{a}$-Filtrierung $M_\bullet$. Sei A vollständig bezüglich der $\mathfrak{a}$-adischen Topologie, und sei M in seiner Filtrationstopologie hausdorffsch, also $\bigcap_n M_n = 0$. Sei schließlich $\mathrm{G}(M_\bullet, t)$ ein noetherscher $\mathrm{G}_{\mathfrak{a}}(t)$-Modul. Dann ist M ein noetherscher A-Modul.*

Beweis. 1. Es ist zu zeigen, daß jeder Untermodul M' von M endlich erzeugt ist. Es ist $M'_\bullet := M' \cap M_\bullet$ eine $\mathfrak{a}$-Filtration auf M', und die Einbettung $M' \to M$ induziert eine Einbettung $\mathrm{G}(M'_\bullet, t) \to \mathrm{G}(M_\bullet, t)$.

2. Da $\mathrm{G}(M_\bullet, t)$ noethersch ist, ist $\mathrm{G}(M'_\bullet, t)$ endlich erzeugt.

3. Wegen $\bigcap_n M'_n \subset \bigcap_n M_n = (0)$ ist M' schließlich hausdorffsch. Nach der Proposition ist M' damit endlich erzeugt. □

Satz 43.8. *Sei A ein noetherscher kommutativer Ring. Für jedes Ideal $\mathfrak{a}$ von A ist die Vervollständigung $\hat{A}_{\mathfrak{a}}$ noethersch.*

Beweis. Es ist $\mathrm{G}_{\mathfrak{a}}(t) \cong \mathrm{G}_{\hat{\mathfrak{a}}}(t)$, und diese Ringe sind noethersch. Damit können wir die letzte Folgerung auf den vollständigen Ring $\hat{A}$ und den $\hat{A}$-Modul $\hat{A}$ mit der $\hat{\mathfrak{a}}$-adischen Filtrierung anwenden (welche hausdorffsch ist) und erhalten, daß $\hat{A}$ ein noetherscher $\hat{A}$-Modul ist, also ein noetherscher Ring. □

Folgerung 43.9. *Für jeden noetherschen kommutativen Ring A ist der Potenzreihenring $A[\![X_1, \dots, X_n]\!]$ in n Variablen noethersch.*

Beweis. Nach dem Hilbertschen Basissatz ist $A[X_1, \dots, X_n]$ noethersch. Es ist $A[\![X_1, \dots, X_n]\!]$ die $(X_1, \dots, X_n)$-adische Vervollständigung von $A[X_1, \dots, X_n]$. □

Beispiel 43.10. Für jeden Körper K ist $K[\![X_1, \dots, X_n]\!]$ noethersch.

Teil XI. Dimensionstheorie

44. Hilbertfunktionen

44.1. Poincarésche Reihe

Sei $A = \bigoplus_{n \in \mathbb{N}_0} A_n$ ein noetherscher gewichteter kommutativer Ring. Wir haben gesehen, daß A_0 dann ein noetherscher Ring ist und daß A als A_0-Algebra endlich erzeugt ist.

Proposition 44.1. *Sei $M = \bigoplus_{n \in \mathbb{N}_0} M_n$ ein endlich erzeugter gewichteter A-Modul. Dann ist M_n für alle $n \in \mathbb{N}_0$ ein endlich erzeugter A_0-Modul.*

Beweis.

1. Es existieren endlich viele $x_1, \ldots, x_s \in A$, welche A als A_0-Algebra erzeugen. Wir können annehmen, daß die x_i homogen von Gewichten k_i sind.
2. Es existieren homogene Erzeuger $m_1, \ldots, m_t \in M$ von M als A-Modul. Seien die Gewichte der m_j durch r_j gegeben.
3. Damit wird M_n als A_0-Modul durch alle Terme der Form $g_j(x) m_j$ erzeugt, wobei $g_j(x)$ ein Monom in den x_i vom Totalgrad $n - r_j$ ist. □

Sei A ein noetherscher gewichteter kommutativer Ring. Sei λ eine ($\mathbb{Z}$-wertige) additive Funktion auf der Klasse aller endlich erzeugten A_0-Moduln. Mit den letzten Ergebnissen ist die Reihe

$$\lambda(M, t) := \sum_{n=0}^{\infty} \lambda(M_n) t^n \in \mathbb{Z}[\![t]\!]$$

für jeden endlich erzeugten gewichteten A-Modul M wohldefiniert.

Definition 44.2. Die Reihe $\lambda(M, t)$ heißt die *Poincarésche Reihe von M (zu λ)*.

44.2. Der Hilbert–Serresche Satz

Satz 44.3 (Hilbert–Serrescher Satz)**.** *Sei A ein noetherscher gewichteter kommutativer Ring. Sei M ein endlich erzeugter gewichteter A-Modul. Für jede additive Funktion λ auf der Klasse der endlich erzeugten A_0-Moduln ist dann $\lambda(M, t)$ eine rationale Funktion der Form $f / \prod_{i=1}^{s} (1 - t^{k_i})$ mit $f \in \mathbb{Z}[t]$ und $k_i \in \mathbb{N}$.*

Bemerkung 44.4. Wir werden im Beweis sehen, daß wir alle $k_i = 1$ wählen können, wenn A als A_0-Algebra von A_1 erzeugt wird.

Beweis.

1. Wir führen Induktion über die Anzahl s der Erzeuger von A als A_0-Algebra. Im Falle von $s = 0$ ist $A = A_0$ und damit ist M ein endlich erzeugter A_0-Modul. Folglich ist $M_n = 0$ für $n \gg 0$, also ist $\lambda(M, t)$ in diesem Falle ein Polynom.

2. Sei also $s > 0$. Seien $x_1, \dots, x_s$ homogene Erzeuger von A als A_0-Modul mit Gewichten k_i. Sei $\xi_s\colon M_n \to M_{n+k_s}, m \mapsto x_s m$. Sei $0 \to K_n \to M_n \xrightarrow{\xi_s} M_{n+k_s} \to L_{n+k_s} \to 0$ eine exakte Sequenz von A_0-Moduln. Es sind $K = \bigoplus_n K_n$ und $L = \bigoplus_n L_n$ endlich erzeugte A-Moduln.

3. Aus der Additivität von λ folgt $\lambda(K_n) - \lambda(M_n) + \lambda(M_{n+k_s}) - \lambda(L_{n+k_s}) = 0$, also $(1 - t^{k_s})\lambda(M, t) = \lambda(L, t) - t^{k_s}\lambda(K, t) + g$ für ein $g \in \mathbb{Z}[t]$.

4. Da x_s auf K und L trivial wirkt, können wir die Induktionsvoraussetzung auf $A_0[x_1, \dots, x_{s-1}]$ anwenden. □

Sei A ein noetherscher gewichteter kommutativer Ring. Sei M ein endlich erzeugter gewichteter A-Modul. Sei λ eine additive Funktion auf der Klasse der endlich erzeugten A_0-Moduln.

Definition 44.5. Die Polordnung von $\lambda(M, t)$ an $t = 1$ heißt die *Größe* $\mathrm{d}_\lambda(M)$ *von M (zu λ).*

Beispiel 44.6. Da A ein endlich erzeugter gewichteter Modul über sich selbst ist, ist inbesondere die Größe $\mathrm{d}_\lambda(A)$ von A definiert.

Proposition 44.7. *Sei A ein noetherscher gewichteter kommutativer Ring, der als A_0-Algebra von A_1 erzeugt wird. Sei M ein endlich erzeugter gewichteter A-Modul. Sei λ eine additive Funktion auf der Klasse der endlich erzeugten A-Moduln. Dann existiert ein Polynom $p \in \mathbb{Q}[n]$ vom Grad $\mathrm{d}_\lambda(M) - 1$ mit $\lambda(M_n) = p(n)$ für $n \gg 0$.*

Dem Nullpolynom sei hier der Grad -1 zugeordnet. Das Polynom p aus der Proposition heißt das *Hilbertpolynom von M (zu λ).* Dieses ist durch seine Eigenschaften eindeutig bestimmt.

Beweis. 1. Nach dem Hilbert–Serrschen Satz existiert ein $f = \sum_{k=0}^{N} a_k t^k \in \mathbb{Z}[t]$, so daß $\lambda(M_n)$ der Koeffizient von t^n in $f(t) \cdot (1-t)^{-s}$ ist. Durch Kürzen können wir erreichen, daß $s = \mathrm{d}_\lambda(M)$ und $f(1) \neq 0$.

2. Aus $(1-t)^{-s} = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{s+k-1}{s-1} t^k$ folgt $\lambda(M_n) = \sum_{k=0}^{N} a_k \binom{s+n-k-1}{s-1}$ für $n \geq N$.

3. Die rechte Seite ist ein Polynom in n mit führendem Term $f(1)n^{s-1}/(s-1)! \neq 0$. □

Bemerkung 44.8. Ein Polynom $p \in \mathbb{Q}[n]$, welches ganzzahlige Werte $p(n)$ für $n \gg 0$ annimmt, heißt auch *numerisches Polynom.*

Beispiel 44.9. Es gibt Polynome $p \in \mathbb{Q}[n]$ mit $p(n) \in \mathbb{Z}$ für alle $n \in \mathbb{Z}$, welche aber nicht in $\mathbb{Z}[n]$ liegen, etwa $p(n) = \frac{1}{2}x(x+1)$.

Proposition 44.10. *Sei A ein noetherscher gewichteter kommutativer Ring. Sei M ein endlich erzeugter gewichteter A-Modul. Sei λ eine additive Funktion auf der Klasse der endlich erzeugten A_0-Moduln. Ist dann $x \in A_k$, $k \in \mathbb{N}_0$, regulär in M, das heißt $xm = 0 \implies m = 0$ für alle $m \in M$, so gilt $\mathrm{d}_\lambda(M/xM) = \mathrm{d}_\lambda(M) - 1$.*

Beweis.
1. Es existieren exakte Sequenzen $0 \to M_n \xrightarrow{\xi} M_{n+k} \to (M/xM)_{n+k} \to 0$ mit $\xi\colon M_n \to M_{n+k}, m \mapsto xm$.
2. Es folgt $-\lambda(M_n) + \lambda(M_{m+k}) - \lambda((M/xM)_{n+k}) = 0$, also $(1 - t^k)\lambda(M, t) = \lambda(M/xM, t) + g$ für ein $g \in \mathbb{Z}[t]$.
3. Damit ist $\mathrm{d}_\lambda(M/xM) = \mathrm{d}_\lambda(M) - 1$. □

Beispiel 44.11. Sei A_0 ein artinscher Ring, z.B. ein Körper. Dann ist insbesondere die Länge ℓ von A_0-Moduln eine additive Funktion auf den endlich erzeugten A_0-Moduln. Sei $A = A_0[X_1, \ldots, X_s]$ der Polynomring mit der kanonischen Gewichtung. Dann ist A_n ein freier A_0-Modul mit einer Basis bestehend aus allen Monomen $X_1^{m_1} \cdots X_s^{m_s}$ vom Totalgrad n. Von diesen gibt es genau $\binom{s+n-1}{s-1}$, daher ist $\ell(A, t) = \frac{1}{(1-t)^s}$.

44.3. Das charakterische Polynom primärer Ideale

Hilfssatz 44.12. *Sei $(A, \mathfrak{m})$ ein noetherscher lokaler Ring. Sei $\mathfrak{q}$ ein $\mathfrak{m}$-primäres Ideal. Sei M ein endlich erzeugter A-Modul und $M_\bullet$ eine stabile $\mathfrak{q}$-Filtration. Dann ist M/M_n für alle $n \in \mathbb{N}_0$ von endlicher Länge mit $\ell(M/M_n) = \sum_{r=0}^{n-1} \ell(M_r/M_{r+1})$.*

Beweis.
1. Da A noethersch ist und $M_\bullet$ eine stabile Filtration eines endlich erzeugten Moduls über A, ist $\mathrm{G}_\mathfrak{q}(t) \cong \bigoplus_n \mathfrak{q}^n/\mathfrak{q}^{n+1}t^n$ noethersch und $\mathrm{G}(M_\bullet, t) \cong \bigoplus_n M_n/M_{n+1}t^n$ ist ein endlich erzeugter Modul über $\mathrm{G}_\mathfrak{q}(t)$.
2. Es ist $\mathrm{G}_\mathfrak{q}(t)_0 \cong A/\mathfrak{q}$ noethersch der Dimension 0 und damit artinsch.
3. Die $\mathrm{G}(M_\bullet, t)_n \cong M_n/M_{n+1}$ sind noethersche A-Moduln, deren Annihilator $\mathfrak{q}$ umfaßt, also sogar noethersche $A/\mathfrak{q}$-Moduln und damit von endlicher Länge.
4. Aus $\ell(M/M_{r+1}) - \ell(M/M_r) = \ell(M_r/M_{r+1})$ folgt die Endlichkeit der Länge von $\ell(M/M_n)$ und die angegebene Formel in Termen von $\ell(M_r/M_{r+1})$. □

Proposition 44.13. *Sei $(A, \mathfrak{m})$ ein noetherscher lokaler Ring. Sei $\mathfrak{q}$ ein $\mathfrak{m}$-primäres Ideal, welches von minimal s Elementen erzeugt wird. Sei M ein endlich erzeugter A-Modul zusammen mit einer stabilen $\mathfrak{q}$-Filtration. Dann existiert genau ein Polynom $g \in \mathbb{Q}[n]$ vom Grad höchstens s mit $\ell(M/M_n) = g(n)$ für $n \gg 0$. Grad und Leitkoeffizient von g hängen nur von M und $\mathfrak{q}$, aber nicht von der gewählten Filtrierung ab.*

Beweis der Existenz.
1. Seien $x_1, \ldots, x_s$ Erzeuger von $\mathfrak{q}$, deren Bilder in $\mathfrak{q}/\mathfrak{q}^2$ mit $\bar{x}_i$ bezeichnet seien. Dann wird $\mathrm{G}_\mathfrak{q}(t)$ von den s Elementen $\bar{x}_i t$ im Gewicht 1 als $\mathrm{G}_\mathfrak{q}(t)_0$-Algebra erzeugt, woraus $\ell(M_n/M_{n+1}) = f(n)$ für $n \gg 0$ für ein Polynom $f(n) \in \mathbb{Q}[n]$ vom Grad höchstens $s - 1$ folgt.

2. Wegen $\ell(M/M_{n+1}) - \ell(M/M_n) = f(n)$ für $n \gg 0$ ist damit $\ell(M/M_n)$ für $n \gg 0$ ein Polynom in n vom Grad höchstens s.

Beweis der Eindeutigkeit von Grad und Leitkoeffizient.

1. Ist $\tilde{M}_\bullet$ eine weitere stabile $\mathfrak{q}$-Filtration von M, so sei $\tilde{g} \in \mathbb{Q}[n]$ mit $\tilde{g}(n) = \ell(M/\tilde{M}_n)$ für $n \gg 0$. Da die Filtrationen beschränkte Differenz haben, existiert ein $n_0 \in \mathbb{N}_0$ mit $M_{n+n_0} \subset \tilde{M}_n$ und $\tilde{M}_{n+n_0} \subset M_n$ für alle $n \geq 0$.

2. Folglich ist $g(n+n_0) \geq \tilde{g}(n)$ und $\tilde{g}(n+n_0) \geq g(n)$ für $n \gg 0$. Da $g, \tilde{g}$ Polynome sind, folgt $\lim_{n\to\infty} g(n)/\tilde{g}(n) = 1$, womit $g, \tilde{g}$ denselben Grad und Leitkoeffizient haben. □

Sei $(A, \mathfrak{m})$ ein noetherscher lokaler Ring. Sei $\mathfrak{q}$ ein $\mathfrak{m}$-primäres Ideal, welches von minimal s Elementen erzeugt wird. Sei M ein endlich erzeugter A-Modul zusammen mit einer stabilen $\mathfrak{q}$-Filtration. Mit $\chi_{\mathfrak{q}}^{M_\bullet} \in \mathbb{Q}[n]$ bezeichnen wir dasjenige Polynom mit $\chi_{\mathfrak{q}}^{M}(n) = \ell(M/M_n)$ für $n \gg 0$.

Definition 44.14. Das Polynom $\chi_{\mathfrak{q}}^{M_\bullet}$ heißt das *charakteristische Polynom von* $\mathfrak{q}$ *über* $M_\bullet$.

Beispiel 44.15. Im Falle von $M = A$ zusammen mit der $\mathfrak{q}$-adischen Filtrierung schreiben wir $\chi_{\mathfrak{q}} = \chi_{\mathfrak{q}}^{M_\bullet}$ und nennen $\chi_{\mathfrak{q}}$ das *charakteristische Polynom von* $\mathfrak{q}$. Nach der letzten Proposition ist $\chi_{\mathfrak{q}}$ ein Polynom, dessen Grad höchstens s ist, wobei s die minimale Anzahl von Erzeugern von $\mathfrak{q}$ ist.

Proposition 44.16. *Sei* $(A, \mathfrak{m})$ *ein noetherscher lokaler Ring. Sei* $\mathfrak{q}$ *ein* $\mathfrak{m}$*-primäres Ideal. Dann ist* $\deg \chi_{\mathfrak{q}} = \deg \chi_{\mathfrak{m}}$.

Der Grad $\mathrm{d}(A)$ des charakteristischen Polynoms hängt also nicht vom gewählten $\mathfrak{m}$-primären Ideal ab.

Beweis. Es ist $\mathfrak{m} \supset \mathfrak{q} \supset \mathfrak{m}^r$ für ein r, also $\mathfrak{m}^n \supset \mathfrak{q}^n \supset \mathfrak{m}^{rn}$ für $n \geq 0$, also $\chi_{\mathfrak{m}}(n) \leq \chi_{\mathfrak{q}}(n) \leq \chi_{\mathfrak{m}}(rn)$ für alle $n \gg 0$. Es folgt $\deg \chi_{\mathfrak{m}} \leq \deg \chi_{\mathfrak{q}} \leq \deg \chi_{\mathfrak{m}}$. □

Bemerkung 44.17. Es ist insbesondere $\mathrm{d}(A) = \mathrm{d}_\ell(\mathrm{G}_{\mathfrak{m}}(A, t))$, die vorher definierte Größe eines noetherschen gewichteten homogenen Ringes (zur additiven Funktion der Länge).

45. Dimensionstheorie noetherscher lokaler Ringe

45.1. Die Größe regulärer Quotienten

Einem noetherschen lokalen Ring $(A, \mathfrak{m})$ können wir folgende Größen zuordnen:

1. Die minimale Anzahl $\delta(A)$ von Elementen $x_1, \ldots, x_{\delta(A)} \in A$, so daß $(x_1, \ldots, x_{\delta(A)})$ ein $\mathfrak{m}$-primäres Ideal ist.

2. Der Grad $\mathrm{d}(A)$ des charakteristischen Polynoms $\chi_{\mathfrak{m}}$ von A, also die Ordnung plus 1, mit der $\ell(A/\mathfrak{m}^n)$ für $n \gg 0$ wächst.

3. Die Dimension $\dim A$, also das Supremum der Längen aller Primidealketten in A.

Im folgenden zeigen wir, daß $\delta(A) \geq \mathrm{d}(A) \geq \dim A \geq \delta(A)$, daß also alle drei Größen übereinstimmen.

Proposition 45.1. *Es ist* $\delta(A) \geq \mathrm{d}(A)$. □

Proposition 45.2. *Sei* $(A, \mathfrak{m})$ *ein noetherscher lokaler Ring. Sei* $\mathfrak{q}$ *ein* $\mathfrak{m}$*-primäres Ideal. Sei* M *ein endlich erzeugter* A*-Modul. Seien* $x \in A$ *regulär in* M *und* $M'' := M/xM$*. Dann gilt:* $\deg \chi_{\mathfrak{q}}^{M''} \leq \deg \chi_{\mathfrak{q}}^{M} - 1$.

Beweis.

1. Da x regulär in M ist, ist $M \to N := xM, m \mapsto xm$ ein Isomorphismus von A-Moduln. Sei $N_n := N \cap \mathfrak{q}^n M$ für $n \in \mathbb{N}_0$. Es existieren exakte Sequenzen $0 \to N/N_n \to M/\mathfrak{q}^n M \to M''/\mathfrak{q}^n M'' \to 0$.

2. Sei $g(n) = \ell(N/N_n)$ für $n \gg 0$, so $g(n) - \chi_{\mathfrak{q}}^{M}(n) + \chi_{\mathfrak{q}}^{M''}(n) = 0$. Nach Artin–Rees ist (N_n) eine stabile $\mathfrak{q}$-Filtration von N, wir können daher $g \in \mathbb{Q}[n]$ annehmen. Da $N \cong M$ müssen Grad und Leitkoeffizient von g und $\chi_{\mathfrak{q}}^{M}$ übereinstimmen. □

Folgerung 45.3. *Sei* A *ein noetherscher lokaler Ring. Sei* $x \in A$ *ein reguläres Element. Dann ist* $\mathrm{d}(A/(x)) \leq \mathrm{d}(A) - 1$.

Beweis. Wir wenden die Proposition auf den A-Modul $M = A$ an. □

45.2. Die Dimension noetherscher lokaler Ringe

Proposition 45.4. *Sei* $(A, \mathfrak{m})$ *ein noetherscher lokaler Ring. Dann ist* $\mathrm{d}(A) \geq \dim A$.

Induktionsanfang. Der Beweis erfolge mit Induktion über $d := \mathrm{d}(A)$. Ist $d = 0$, so ist $\ell(A/\mathfrak{m}^n)$ für $n \gg 0$ konstant, also ist $\mathfrak{m}^n = \mathfrak{m}^{n+1}$ für $n \gg 0$, also ist A artinsch, also $\dim A = 0$.

Induktionsschritt.

1. Sei $d > 0$. Sei $\mathfrak{p}_0 \subsetneq \mathfrak{p}_1 \subsetneq \cdots \subsetneq \mathfrak{p}_r$ eine Primidealkette in A. Sei $x \in \mathfrak{p}_1 \setminus \mathfrak{p}_0$. Sei $A' := A/\mathfrak{p}_0$, und sei x' das Bild von $x \in A'$. Dann ist x' regulär, also $\mathrm{d}(A'/(x')) \leq \mathrm{d}(A') - 1$.

2. Sei $\mathfrak{m}'$ das maximale Ideal in A'. Dann ist $A'/(\mathfrak{m}')^n$ homomorphes Bild von $A/\mathfrak{m}^n$, also ist $\ell(A/\mathfrak{m}^n) \geq \ell(A'/(\mathfrak{m}')^n)$, also $\mathrm{d}(A) \geq \mathrm{d}(A')$, also $\mathrm{d}(A'/(x')) \leq d - 1$.

3. Nach Induktionsvoraussetzung ist die Länge einer Primidealkette in $A'/(x')$ damit höchstens $d - 1$. Das Bild der Kette $\mathfrak{p}_1 \subsetneq \cdots \subsetneq \mathfrak{p}_r$ in $A'/(x')$ ist eine Kette der Länge $r - 1$, also $r - 1 \leq d - 1$, also $r \leq d$, also $\dim A \leq d$. □

Folgerung 45.5. *Sei* A *ein noetherscher lokaler Ring. Dann ist* $\dim A < \infty$. □

Die Längen von Primidealketten in A sind also beschränkt.

Definition 45.6. Sei A ein kommutativer Ring. Die *Höhe* $\operatorname{ht} \mathfrak{p}$ *eines Primideals* $\mathfrak{p}$ von A ist das Supremum der Längen von Primidealketten der Form $\mathfrak{p}_0 \subsetneq \mathfrak{p}_1 \subsetneq \cdots \subsetneq \mathfrak{p}_r = \mathfrak{p}$.

Es ist also $\operatorname{ht}\mathfrak{p} = \dim A_{\mathfrak{p}}$.

Folgerung 45.7. *Ist A ein noetherscher kommutativer Ring, so hat jedes Primideal $\mathfrak{p}$ von A endliche Höhe.* □

Die Menge der Primideale in einem noetherschen kommutativen Ring erfüllt damit die absteigende Kettenbedingung.

Definition 45.8. Sei A ein kommutativer Ring. Die *Tiefe* $\operatorname{depth}\mathfrak{p}$ *eines Primideals* $\mathfrak{p}$ von A ist das Supremum der Längen von Primidealketten der Form $\mathfrak{p} = \mathfrak{p}_0 \subsetneq \mathfrak{p}_1 \subsetneq \cdots \subsetneq \mathfrak{p}_r$.

Es ist also $\operatorname{depth}\mathfrak{p} = \dim A/\mathfrak{p}$.

Bemerkung 45.9. Selbst wenn A noethersch ist, kann die Tiefe eines Primideals unendlich sein — außer A ist zudem lokal.

Proposition 45.10. *Sei $(A, \mathfrak{m})$ ein noetherscher lokaler Ring der Dimension d. Dann existiert ein von d Elementen $x_1, \ldots, x_d \in A$ erzeugtes $\mathfrak{m}$-primäres Ideal, also* $\dim A \geq \delta(A)$.

Beweis.

1. Wir konstruieren induktiv $x_1, \ldots, x_d \in A$, so daß jedes Primideal, welches $\mathfrak{a}_i \coloneqq (x_1, \ldots, x_i)$ enthält, mindestens Höhe i hat. Sei $i > 0$ und seien $x_1, \ldots, x_{i-1}$ schon konstruiert.
2. Seien $\mathfrak{p}_1, \ldots, \mathfrak{p}_s$ die minimalen Primideale mit $\mathfrak{p}_j \supset \mathfrak{a}_{i-1}$ und $\operatorname{ht}\mathfrak{p}_j = i - 1$. Dann ist $\mathfrak{m} \neq \mathfrak{p}_j$ für alle j, da $\operatorname{ht}\mathfrak{m} = d > i - 1 = \operatorname{ht}\mathfrak{p}_j$. Es folgt $\mathfrak{m} \neq \bigcup_{j=1}^{s} \mathfrak{p}_j$, also können wir ein $x_i \in \mathfrak{m}$ mit $x_i \notin \mathfrak{p}_j$ wählen.
3. Sei $\mathfrak{q}$ ein Primideal, welches $\mathfrak{a}_i$ enthält. Dann enthält $\mathfrak{q}$ ein minimales Primideal $\mathfrak{p}$ mit $\mathfrak{p} \supset \mathfrak{a}_{i-1}$. Ist $\mathfrak{p} = \mathfrak{p}_j$ für ein j, so folgt $\mathfrak{q} \supsetneq \mathfrak{p}$, also $\operatorname{ht}\mathfrak{q} \geq i$.
4. Ist dagegen $\mathfrak{p} \neq \mathfrak{p}_j$ für alle j, so ist $\operatorname{ht}\mathfrak{p} \geq i$, also $\operatorname{ht}\mathfrak{q} \geq i$.
5. Ist schließlich $\mathfrak{p}$ ein minimales Primideal mit $\mathfrak{p} \supset \mathfrak{a}_d$, so hat $\mathfrak{p}$ damit Höhe d, also $\mathfrak{p} = \mathfrak{m}$. Also ist $\mathfrak{a}_d$ ein $\mathfrak{m}$-primäres Ideal. □

45.3. Der Dimensionssatz

Satz 45.11 (Dimensionssatz)**.** *Sei $(A, \mathfrak{m})$ ein noetherscher lokaler Ring. Dann sind folgende Größen gleich:*

1. *Das maximale Länge* $\dim A$ *von Primidealketten in A.*
2. *Der Grad* $\mathrm{d}(A)$ *des charakteristischen Polynoms $\chi_{\mathfrak{m}}$ von A.*
3. *Die minimale Anzahl von Erzeugern $\mathfrak{m}$-primärer Ideale von A.* □

Beispiel 45.12. Sei K ein Körper. Sei $A \coloneqq K[X_1, \dots, X_n]_{\mathfrak{m}}$ der Polynomring in n Variablen über K lokalisiert am maximalen Ideal $\mathfrak{m} = (X_1, \dots, X_n)$. Dann ist $\mathrm{G}_{\mathfrak{m}}(A, t) \cong K[\bar{X}_1 t, \dots, \bar{X}_n t]$, wobei die $\bar{X}_i$ die Bilder der X_i in $\mathrm{G}_{\mathfrak{m}}(A, t)$ sind. Damit ist die Poincarésche Reihe von $\mathrm{G}_{\mathfrak{m}}(A, t)$ durch $(1 - t)^{-n}$ gegeben, also $\dim A = \mathrm{d}(A) = \mathrm{d}(\mathrm{G}_{\mathfrak{m}}(A, t)) = n$.

Folgerung 45.13. *Sei $(A, \mathfrak{m}, F)$ ein noetherscher lokaler Ring. Dann ist $\dim A \le \dim_F \mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2$.*

Beweis. Seien $x_1, \dots, x_s \in \mathfrak{m}$, so daß ihre Bilder in $\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2$ eine Basis über F bilden. Nach dem Nakayamaschen Lemma erzeugen die x_i damit das Ideal $\mathfrak{m}$. Also ist $\dim A = \delta(A) \le s = \dim_F \mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2$. □

Folgerung 45.14. *Sei A ein kommutativer noetherscher Ring. Seien $x_1, \dots, x_r \in A$. Ist dann $\mathfrak{p}$ ein minimales Primideal mit $\mathfrak{p} \supset (x_1, \dots, x_r)$, so gilt $\operatorname{ht} \mathfrak{p} \le r$.*

Beweis. Indem wir von A auf $A_{\mathfrak{p}}$ übergehen, können wir davon ausgehen, daß A ein lokaler Ring mit maximalem Ideal $\mathfrak{p}$ ist, in dem $(x_1, \dots, x_r)$ ein $\mathfrak{p}$-primäres Ideal ist. Damit ist $r \ge \delta(A) = \dim A = \operatorname{ht} \mathfrak{p}$. □

Folgerung 45.15. *Sei A ein kommutativer noetherscher Ring. Sei weiter $x \in A$ ein reguläres Element. Dann gilt für jedes minimale Primideal $\mathfrak{p}$ mit $\mathfrak{p} \supset (x)$, daß $\operatorname{ht} \mathfrak{p} = 1$.*

Beweis. Nach der letzten Folgerung ist $\operatorname{ht} \mathfrak{p} \le 1$. Wäre $\operatorname{ht} \mathfrak{p} = 0$, so wäre $\mathfrak{p}$ assoziiert zu (0). Damit besteht $\mathfrak{p}$ nur aus Nullteilern. Widerspruch. □

Folgerung 45.16. *Sei $(A, \mathfrak{m})$ ein noetherscher lokaler Ring. Sei $x \in \mathfrak{m}$ regulär. Dann ist $\dim A/(x) = \dim A - 1$.*

Beweis.

1. Sei $d \coloneqq \dim A/(x)$. Dann ist $d = \mathrm{d}(A/(x)) \le \mathrm{d}(A) - 1 \le \dim A - 1$.
2. Seien auf der anderen Seite $x_1, \dots, x_d \in \mathfrak{m}$, deren Bilder in $A/(x)$ ein $\mathfrak{m}/(x)$-primäres Ideal erzeugen. Dann ist $(x, x_1, \dots, x_d)$ ein $\mathfrak{m}$-primäres Ideal in A, also $d + 1 \ge \delta(A) = \dim A$. □

Folgerung 45.17. *Sei $(A, \mathfrak{m})$ ein lokaler noetherscher Ring. Sei $\hat{A}$ seine $\mathfrak{m}$-adische Vervollständigung. Dann ist $\dim A = \dim \hat{A}$.*

Beweis. Sei $\hat{\mathfrak{m}}$ das maximale Ideal von $\hat{A}$. Es ist $A/\mathfrak{m}^n \cong \hat{A}/\hat{\mathfrak{m}}^n$, also $\chi_{\mathfrak{m}} = \chi_{\hat{\mathfrak{m}}}$. Damit ist $\dim A = \mathrm{d}(A) = \mathrm{d}(\hat{A}) = \dim \hat{A}$. □

45.4. Parametersysteme

Definition 45.18. Sei $(A, \mathfrak{m})$ ein noetherscher lokaler Ring der Dimension d. Sind dann $x_1, \dots, x_d$ Erzeuger eines $\mathfrak{m}$-primären Ideals von A, so heißt $(x_1, \dots, x_d)$ ein Parametersystem von A.

Proposition 45.19. *Sei $(A, \mathfrak{m})$ ein noetherscher lokaler Ring. Sei $(x_1, \dots, x_d)$ ein Parametersystem für A. Sei $\mathfrak{q} \coloneqq (x_1, \dots, x_d)$ das erzeugte $\mathfrak{m}$-primäre Ideal. Ist $f \in A[X_1, \dots, X_d]$ homogen vom Grad s mit $f(x_1, \dots, x_d) \in \mathfrak{q}^{s+1}$, so folgt $f \in \mathfrak{m}[X_1, \dots, X_d]$.*

Beweis. 1. Es ist $\alpha\colon A/\mathfrak{q}[X_1,\ldots,X_d] \to \mathrm{G}_\mathfrak{q}(t), X_i \mapsto \bar{x}_i t$, wobei $\bar{x}_i$ das Bild von x_i in $\mathfrak{q}/\mathfrak{q}^2$ ist, ein surjektiver Homomorphismus gewichteter Ringe.

2. Nach Voraussetzung an f ist das Bild $\bar{f}$ von f im Kern von α. Angenommen, ein Koeffizient von f ist eine Einheit. Dann ist $\bar{f}$ regulär. Dann gilt: $\mathrm{d}(\mathrm{G}_\mathfrak{q}(t)) \leq \mathrm{d}(A/\mathfrak{q}[X_1,\ldots,X_d]/(\bar{f})) = \mathrm{d}(A/\mathfrak{q}[X_1,\ldots,X_d]) - 1 = d - 1$.

3. Aber es ist $\mathrm{d}(\mathrm{G}_\mathfrak{q}(t)) = \mathrm{d}(A) = d$, ein Widerspruch. □

Folgerung 45.20. *Sei K ein Körper. Sei $(A,\mathfrak{m})$ eine lokale K-Algebra, so daß K isomorph auf $A/\mathfrak{m}$ abgebildet wird. Ist dann $(x_1,\ldots,x_d)$ ein Parametersystem für A, so sind die x_i algebraisch unabhängig über K.*

Beweis. 1. Sei $f \in K[X_1,\ldots,X_n]$ mit $f(x_1,\ldots,x_d) = 0$. Angenommen, $f \neq 0$.

2. Dann können wir $f = g + h$ schreiben, wobei $g \neq 0$ ein homogenes Polynom ist und h echt größeren Grad als g hat.

3. Anwenden der Proposition liefert, daß g Koeffizienten in $\mathfrak{m}$ hat. Da aber g ein Polynom über K ist, folgt $g = 0$, ein Widerspruch. □

46. Reguläre lokale Ringe

46.1. Charakterisierung regulärer lokaler Ringe

Satz 46.1. *Sei $(A,\mathfrak{m},F)$ ein noetherscher lokaler Ring der Dimension d. Dann sind äquivalent:*

1. *$\mathrm{G}_\mathfrak{m}(A,t)$ und $F[X_1,\ldots,X_d]$ sind als gewichtete F-Algebren isomorph.*

2. *Für die Dimension des Zariskischen Kotangentialraumes von A gilt $\dim_F \mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2 = d$.*

3. *Es existiert ein Parametersystem $(x_1,\ldots,x_d)$ von A mit $\mathfrak{m} = (x_1,\ldots,x_d)$.*

Ein *regulärer lokaler Ring A* ist ein noetherscher lokaler Ring, welcher die Bedingungen des Satzes erfüllt.

Beweis. 1. Aus der ersten folgt sicherlich die zweite Aussage. Die dritte folgt aus der zweiten mit dem Nakayamaschen Lemma.

2. Sei also $\mathfrak{m} = (x_1,\ldots,x_m)$. Dann ist $\alpha\colon F[X_1,\ldots,X_d] \to \mathrm{G}_\mathfrak{m}(t), X_i \mapsto \bar{x}_i t$ ein surjektiver Homomorphismus gewichteter Algebren.

3. Der Homomorphismus ist aufgrund der Unabhängigkeitseigenschaft eines Parametersystems injektiv. □

Hilfssatz 46.2. *Sei A ein kommutativer Ring. Sei $\mathfrak{a}$ ein Ideal in A mit $\bigcap_n \mathfrak{a}^n = (0)$. Ist dann $\mathrm{G}_\mathfrak{a}(A, t)$ ein Integritätsbereich, so auch A.*

Beweis. Seien $x, y \in A \setminus \{0\}$. Dann existieren $r, s \in \mathbb{N}_0$ mit $x \in \mathfrak{a}^r \setminus \mathfrak{a}^{r+1}$ und $y \in \mathfrak{a}^s \setminus \mathfrak{a}^{s+1}$. Dann sind $\bar{x}t^r, \bar{y}t^s \neq 0 \in \mathrm{G}_\mathfrak{a}(t)$, also $\bar{x} \cdot \bar{y}t^{r+s} \neq 0$, also $xy \neq 0 \in A$. □

Folgerung 46.3. *Ein regulärer lokaler Ring ist ein Integritätsbereich.*

Bemerkung 46.4. Ein regulärer lokaler Ring $(A, \mathfrak{m}, F)$ der Dimension 1 ist ein Integritätsbereich mit $\dim_F \mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2 = 1$, also ein diskreter Bewertungsbereich. Umgekehrt ist ein diskreter Bewertungsbereich ein regulärer lokaler Ring der Dimension 1.

Bemerkung 46.5. Sei $(A, \mathfrak{m})$ ein lokaler Ring. Ist dann $\mathrm{G}_\mathfrak{m}(A, t)$ ein ganz abgeschlossener Integritätsbereich, so kann gezeigt werden, daß auch A ganz abgeschlossen ist. Jeder regulärer lokale Ring ist also ganz abgeschlossen. Es existieren aber ganz abgeschlossene lokale Integritätsbereiche mit Dimension größer als 1, welche nicht regulär sind.

46.2. Regularität als analytische Eigenschaft

Proposition 46.6. *Sei $(A, \mathfrak{m})$ ein noetherscher lokaler Ring. Dann ist A genau dann regulär, wenn seine $\mathfrak{m}$-adische Vervollständigung $\hat{A}$ ein regulärer noetherscher lokaler Ring ist.*

Beweis.

1. Wir haben schon gezeigt, daß $(\hat{A}, \hat{\mathfrak{m}})$ ein noetherscher lokaler Ring ist, wenn $(A, \mathfrak{m})$ ein noetherscher lokaler Ring ist.
2. Da A noethersch ist, gilt außerdem $\mathrm{G}_\mathfrak{m}(A, t) \cong \mathrm{G}_{\hat{\mathfrak{m}}}(\hat{A}, t)$.
3. Schließlich ist $\dim A = \dim \hat{A}$. □

Bemerkung 46.7. Sei $(A, \mathfrak{m})$ ein lokaler Ring. Die $\mathfrak{m}$-adische Vervollständigung $(\hat{A}, \hat{\mathfrak{m}})$ heißt auch der *analytische Halm von A*. Wir haben damit gezeigt, daß der analytische Halm eines regulären lokalen Ringes A ein Integritätsbereich ist, was geometrisch so ausgedrückt wird, daß A nur einen analytischen Zweig habe.

Beispiel 46.8. Sei K ein Körper und $(A, \mathfrak{m}, F)$ eine reguläre lokale K-Algebra, so daß K isomorph auf F abgebildet wird. Sei $d \coloneqq \dim A$. Dann ist $\mathrm{G}_\mathfrak{m}(A, t) \cong K[X_1, \ldots, X_d]$, woraus $\hat{A} = K[\![X_1, \ldots, X_d]\!]$ folgt. Damit hängt der analytische Halm in dieser Situation nur von der Dimension ab.

Beispiel 46.9. Sei K ein Körper. Sei $\mathfrak{m} = (X_1 - x_1, \ldots, X_n - x_n)$ ein maximales Ideal des Polynomringes $A \coloneqq K[X_1, \ldots, X_n]$. Dann ist $A_\mathfrak{m}$ ein regulärer lokaler Ring der Dimension n, denn $\mathrm{G}_\mathfrak{m}(A, t)$ ist ein Polynomring in n Variablen.

47. Transzendente Dimension

47.1. Transzendente Dimension

Sei K ein Körper. Sei A ein endlich erzeugter Integritätsbereich über K.

Definition 47.1. Der Transzendenzgrad des Quotientenkörpers $K(A)$ von A über K heißt die *(transzendente) Dimension* $\operatorname{trdim}_K A$ *von A.*

Bemerkung 47.2. Sind $x_1, \dots, x_n$ Erzeuger von A über K, so erzeugen die x_i auch den Quotientenkörper $K(A)$ über A. Damit muß $\operatorname{trdim}_K A \leq n$ gelten. Die transzendente Dimension von A ist also endlich.

Im folgenden wollen wir zeigen, daß $\operatorname{trdim}_K A = \dim A$.

Hilfssatz 47.3. *Sei $A \subset B$ eine ganze Erweiterung von Integritätsbereichen. Sei A weiter ganz abgeschlossen. Sei $\mathfrak{q}$ ein Primideal in B. Sei $\mathfrak{p} := A \cap \mathfrak{q}$. Dann gilt* $\operatorname{ht} \mathfrak{p} = \operatorname{ht} \mathfrak{q}$ *und* $\operatorname{depth} \mathfrak{p} = \operatorname{depth} \mathfrak{q}$.

Beweis.

1. Ist $\mathfrak{q}' \subsetneq \mathfrak{q}''$ eine echte Inklusion von Primidealen in B, so ist $A \cap \mathfrak{q}' \subsetneq A \cap \mathfrak{q}''$ eine echte Inklusion von Primidealen in A. Damit folgt $\operatorname{ht} \mathfrak{p} \geq \operatorname{ht} \mathfrak{q}$, $\operatorname{depth} \mathfrak{p} \geq \operatorname{depth} \mathfrak{q}$.

2. Nach dem „Going-Down“-Satz kann jede absteigende Primidealkette in A zu einer Primidealkette in B hochgehoben werden. Damit folgt $\operatorname{ht} \mathfrak{q} \geq \operatorname{ht} \mathfrak{p}$.

3. Nach dem „Going-Up“-Satz kann jede aufsteigende Primidealkette in A zu einer Primidealkette in B hochgehoben werden. Damit folgt $\operatorname{depth} \mathfrak{q} \geq \operatorname{depth} \mathfrak{p}$. □

Hilfssatz 47.4. *Sei K ein Körper. Für jedes maximale Ideal $\mathfrak{m}$ des Polynomringes $A := K[X_1, \dots, X_n]$ ist dann* $\dim A_{\mathfrak{m}} = n$.

Beweis.

1. Sei L ein algebraischer Abschluß von K. Dann ist $B := L[X_1, \dots, X_n]$ der ganze Abschluß von A in L. Dann existiert ein maximales Ideal $\mathfrak{n}$ von B mit $\mathfrak{m} = A \cap \mathfrak{n}$.

2. Nach dem Hilbertschen Basissatz ist $\mathfrak{n} = (X_1 - b_1, \dots, X_n - b_n)$ für gewisse $b_i \in B$. Damit ist $\dim B_{\mathfrak{n}} = n$ nach den schon angestellten Überlegungen.

3. Daraus folgt nach dem letzten Hilfssatz, daß $\dim A_{\mathfrak{m}} = \operatorname{ht} \mathfrak{m} = \operatorname{ht} \mathfrak{n} = \dim B_{\mathfrak{n}} = n$. □

Satz 47.5. *Sei K ein Körper. Sei A ein endlich erzeugter Integritätsbereich über K. Dann ist* $\dim A_{\mathfrak{m}} = \operatorname{trdim}_K A$ *für alle maximalen Ideale $\mathfrak{m}$ von A.*

Beweis.

1. Nach der noetherschen Normalisierung existiert eine ganze Ringerweiterung der Form $A' := K[X_1, \dots, X_d] \subset A$. Damit ist $\operatorname{trdim}_K A = \operatorname{trdim}_K A' = d$.

2. Ist weiter $\mathfrak{m}' := A' \cap \mathfrak{m}$, so folgt $\dim A_{\mathfrak{m}} = \dim A'_{\mathfrak{m}'} = d$. □

Folgerung 47.6. *Sei K ein Körper. Sei A ein endlich erzeugter Integritätsbereich über K. Dann ist* $\dim A = \dim A_{\mathfrak{m}}$ *für jedes maximale Ideal* $\mathfrak{m}$ *von A.*

Beweis. Es ist $\dim A = \sup_{\mathfrak{m}} \dim A_{\mathfrak{m}}$, wobei $\mathfrak{m}$ alle maximalen Ideale von A durchläuft. Nach dem Satz haben aber alle $A_{\mathfrak{m}}$ dieselbe Dimension, nämlich die transzendente. □

Satz 47.7. *Sei K ein Körper. Sei A ein endlich erzeugter Integritätsbereich über K. Dann gilt* $\operatorname{ht} \mathfrak{p} + \dim A/\mathfrak{p} = \dim A$ *für alle Primideale* $\mathfrak{p}$ *von A.*

Beweis.

1. Nach der noetherschen Normalisierung existiert ein endlicher, injektiver Homomorphismus $A' := K[X_1, \ldots, X_n] \to A$. Sei $\mathfrak{m}$ ein maximales Ideal, $\mathfrak{m}' := A' \cap \mathfrak{m}$. Dann ist $\dim A = \dim A_{\mathfrak{m}} = \dim A'_{\mathfrak{m}'} = n$. Sei $\mathfrak{p}' = A' \cap \mathfrak{p}$. Da $\operatorname{ht} \mathfrak{p} = \operatorname{ht} \mathfrak{p}'$ und $\operatorname{depth} \mathfrak{p} = \operatorname{depth} \mathfrak{p}'$, reicht es, den Satz für A' und $\mathfrak{p}'$ zu beweisen.

2. Wieder aufgrund der noetherschen Normalisierung können wir davon ausgehen, daß $\mathfrak{p}' = (X_{r+1}, \ldots, X_n)$. Damit ist $\dim A' \geq \operatorname{ht} \mathfrak{p}' + \operatorname{depth} \mathfrak{p}' \geq (n-r) + r = n = \dim A'$. □

Teil XII.
Anhang

A. Aufgaben

A.1. Ringe und Ideale

Aufgabe 1.1. Sei x ein nilpotentes Element eines kommutativen Ringes A. Zeige, daß $1 + x$ eine Einheit von A ist. Folgere, daß die Summe eines nilpotenten Elementes mit einer Einheit wieder eine Einheit ist.

Aufgabe 1.2. Sei A ein kommutativer Ring und $A[x]$ der Polynomring in der Variablen x über A. Sei $f = a_0 + a_1x + \cdots + a_mx^m \in A[x]$. Zeige:

1. Das Polynom f ist genau dann eine Einheit in $A[x]$, wenn a_0 eine Einheit in A und die $a_1, \ldots, a_m$ nilpotent sind.

   (Sei $b_0 + b_1x + \cdots + b_nx^n \in A[x]$ eine Inverse von f. Zeige per Induktion über r, daß $a_m^{r+1}b_{n-r} = 0$. Folgere daraus, daß a_m nilpotent ist und nutze dann Aufgabe 1.1.)

2. Das Polynom f ist genau dann nilpotent, wenn die $a_0, \ldots, a_m$ nilpotent sind.

3. Das Polynom f ist genau dann ein Nullteiler, wenn ein $a \in A \setminus \{0\}$ mit $af = 0$ existiert.

   (Sei $g = b_0 + b_1x + \cdots + b_nx^n \in A[x] \setminus \{0\}$ ein Polynom minimalen Grades mit $gf = 0$. Dann ist $a_mb_n = 0$, und damit auch $a_mg = 0$, denn $(a_mg)f = 0$ und a_mg hat echt kleineren Grad als g. Folgere dann per Induktion über r, daß $a_{m-r}g = 0$.)

4. Das Polynom $f \in A[x]$ heißt *primitiv*, wenn $(a_0, \ldots, a_m) = (1)$. Sei $g \in A[x]$ ein weiteres Polynom.

   Dann ist fg genau dann primitiv, wenn f und g primitiv sind.

Aufgabe 1.3. Verallgemeinere die Aussagen der Aufgabe 1.2 auf einen Polynomring $A[x_1, \ldots, x_n]$ in mehreren Variablen.

Aufgabe 1.4. Sei A ein kommutativer Ring. Zeige, daß im Polynomring $A[x]$ das Jacobsonsche Radikal gleich dem Nilradikal ist.

Aufgabe 1.5. Sei A ein kommutativer Ring. Sei $A[\![x]\!]$ der Ring der formalen Potenzreihen $f = \sum\limits_{m=0}^{\infty} a_mx^m$ mit Koeffizienten in A. Zeige:

1. Die Potenzreihe f ist genau dann eine Einheit in $A[\![x]\!]$, wenn a_0 eine Einheit in A ist.

2. Ist f nilpotent, ist a_m für alle $m \in \mathbb{N}_0$ nilpotent.

   Gilt auch die Umkehrung? (Vergleiche mit Aufgabe 7.2 auf Seite 140.)

3. Die Potenzreihe f liegt genau dann im Jacobsonschen Radikal von $A[\![x]\!]$, wenn a_0 im Jacobsonschen Ideal von A liegt.

4. Sei $\mathfrak{m}$ ein maximales Ideal in $A[\![x]\!]$. Dann ist die Kontraktion $\mathfrak{m}_0 := A \cap \mathfrak{m}$ ein maximales Ideal in A und $\mathfrak{m}$ ist das von $\mathfrak{m}_0$ und x in $A[\![x]\!]$ erzeugte Ideal.

5. Jedes Primideal von A ist die Kontraktion eines Primideals von $A[\![x]\!]$.

Aufgabe 1.6. Sei A ein kommutativer Ring, in dem jedes nicht im Nilradikal enthaltene Ideal ein nicht triviales Idempotentes enthält, das heißt, ein Element $e \neq 0, 1$ mit $e^2 = e$. Zeige, daß das Nilradikal und das Jacobsonsche Radikal von A übereinstimmen.

Aufgabe 1.7. Sei A ein kommutativer Ring, in dem jedes Element x eine Gleichung der Form $x^n = x$ für ein (von x abhängiges) $n > 1$ erfüllt. Zeige, daß jedes Primideal von A maximal ist.

Aufgabe 1.8. Sei A ein kommutativer Ring, welcher nicht der Nullring ist. Zeige, daß A ein bezüglich der Inklusion minimales Primideal besitzt.

Aufgabe 1.9. Sei $\mathfrak{a} \neq (1)$ ein echtes Ideal eines kommutativen Ringes A. Zeige, daß $\mathfrak{a}$ genau dann mit seinem Wurzelideal übereinstimmt, wenn $\mathfrak{a}$ ein Schnitt von Primidealen ist.

Aufgabe 1.10. Sei A ein kommutativer Ring mit Nilradikal $\mathfrak{n}$. Zeige, daß folgende Aussagen äquivalent sind:

1. Der Ring A besitzt genau ein Primideal.

2. Jedes Element von A ist entweder eine Einheit oder nilpotent.

3. Der Quotientenring $A/\mathfrak{n}$ ist ein Körper.

Aufgabe 1.11. Sei A ein *Boolescher Ring*, das heißt ein kommutativer Ring, in dem $x^2 = x$ für alle $x \in A$ gilt. Zeige:

1. Für alle $x \in A$ gilt $2x = 0$.

2. Jedes Primideal $\mathfrak{p}$ von A ist maximal und $A/\mathfrak{p}$ ist ein Körper mit zwei Elementen.

3. Jedes endlich erzeugte Ideal von A ist ein Hauptideal.

Aufgabe 1.12. Sei A ein lokaler kommutativer Ring. Zeige, daß A außer 0 und 1 keine idempotenten Elemente enthält.

Aufgabe 1.13. Sei A ein kommutativer Ring. Sei $\mathfrak{S}$ die Menge aller Ideale von A, in denen jedes Element ein Nullteiler ist. Zeige, daß im Falle $A \neq 0$ die Menge $\mathfrak{S}$ bezüglich der Inklusion maximale Elemente besitzt und daß jedes maximale Element von $\mathfrak{S}$ ein Primideal ist. Folgere, daß die Menge der Nullteiler von A eine Vereinigung von Primidealen ist.

A.2. Moduln

Aufgabe 2.1. Zeige, daß $(\mathbb{Z}/(m)) \otimes_{\mathbb{Z}} (\mathbb{Z}/(n)) = 0$, falls m, n teilerfremd sind.

Aufgabe 2.2. Sei A ein kommutativer Ring. Seien $\mathfrak{a}$ ein Ideal in A und M ein A-Modul. Zeige, daß der A-Modul $(A/\mathfrak{a}) \otimes_A M$ isomorph zu $M/\mathfrak{a}M$ ist.

(Tip: Tensoriere die exakte Sequenz $0 \to \mathfrak{a} \to A \to A/\mathfrak{a} \to 0$ mit M.)

Aufgabe 2.3. Sei A ein lokaler, kommutativer Ring. Seien M und N zwei endlich erzeugte A-Moduln. Zeige, daß aus $M \otimes N = 0$ schon $M = 0$ oder $N = 0$ folgt.

(Tip: Sei $\mathfrak{m}$ das maximale Ideal von A und $k = A/\mathfrak{m}$ der Restklassenkörper. Nach Aufgabe 2.2 ist die Skalarerweiterung von M auf k gerade die Faser $M_k = k^A \otimes_A M \cong M/\mathfrak{m}M = M(\mathfrak{m})$. Folgere aus dem Nakajamaschen Lemma, daß aus $M_k = 0$ schon $M = 0$ folgt. Ist $M \otimes_A N = 0$ folgt auch $(M \otimes_A N)_k = M_k \otimes_k N_k = 0$. Da k ein Körper ist, muß daher schon $M_k = 0$ oder $N_k = 0$ folgen.)

Aufgabe 2.4. Sei A ein kommutativer Ring. Sei $(M_i)_{i \in I}$ eine Familie von A-Moduln. Sei $M \coloneqq \bigoplus_{i \in I} M_i$ ihre direkte Summe. Zeige, daß der A-Modul M genau dann flach ist, wenn alle M_i flach sind.

Aufgabe 2.5. Sei A ein kommutativer Ring. Zeige, daß die Polynomalgebra $A[x]$ eine flache A-Algebra ist.

(Tip: Benutze Aufgabe 2.4.)

Aufgabe 2.6. Sei A ein kommutativer Ring. Für jeden A-Modul M sei $M[x]$ die Menge aller Polynome in x mit Koeffizienten in M, also Ausdrücken der Form $m_0 + m_1 x + \cdots + m_n x^n$ mit $m_i \in M$. Zeige, daß $M[x]$ mit der naheliegenden Definition der Multiplikation mit Elementen aus $A[x]$ ein $A[x]$-Modul wird.

Zeige weiter, daß $M[x] \cong A[x] \otimes_A M$ als A-Moduln.

Aufgabe 2.7. Sei A ein kommutativer Ring. Sei $\mathfrak{p}$ ein Primideal in A. Zeige, daß $\mathfrak{p}[x]$ ein Primideal in $A[x]$ ist.

Ist $\mathfrak{m}[x]$ im allgemeinen ein maximales Ideal in $A[x]$, wenn $\mathfrak{m}$ ein maximales Ideal in A ist?

Aufgabe 2.8. Sei A ein kommutativer Ring. Zeige:

1. Sind M und N flache A-Moduln, so ist auch $M \otimes_A N$ ein flacher A-Modul.
2. Ist B eine flache A-Algebra und N ein flacher B-Modul, so ist N^A ein flacher A-Modul.

Aufgabe 2.9. Sei A ein kommutativer Ring. Sei $0 \to M' \to M \to M'' \to 0$ eine exakte Sequenz. Zeige: Sind M' und M'' endlich erzeugt, so ist auch M endlich erzeugt.

Aufgabe 2.10. Sei A ein kommutativer Ring. Sei $\mathfrak{a}$ ein im Jacobsonschon Ideal von A enthaltenes Ideal. Seien M ein A-Modul und N ein endlich erzeugter A-Modul. Sei $\phi\colon M \to N$ ein Homomorphismus von A-Moduln. Zeige: Ist der induzierte Homomorphismus $M/\mathfrak{a}M \to N/\mathfrak{a}N$ surjektiv, so ist auch ϕ surjektiv.

Aufgabe 2.11. Sei A ein kommutativer Ring mit $A \neq 0$. Seien $m, n \in \mathbb{N}_0$.

1. Zeige: Sind A^m und A^n isomorphe A-Moduln, so folgt $m = n$.

   (Tip: Sei $\phi\colon A^m \xrightarrow{\sim} A^n$ ein Isomorphismus. Sei $\mathfrak{m}$ ein maximales Ideal von A. Sei $k \coloneqq A/\mathfrak{m}$. Dann ist $\mathrm{id}_k \otimes \phi\colon k \otimes A^m \to k \otimes A^n$ ein Isomorphismus von k-Vektorräumen der Dimension m beziehungsweis n. Es folgt $m = n$.)

2. Zeige: Ist $\phi\colon A^m \to A^n$ eine surjektive A-lineare Abbildung, so folgt $m \geq n$.

3. Sei $\phi\colon A^m \to A^n$ eine A-lineare Abbildung. Folgt aus der Injektivität von ϕ, daß $m \leq n$?

Aufgabe 2.12. Sei A ein kommutativer Ring. Seien M ein endlich erzeugter A-Modul und $\phi\colon M \to A^n$ eine surjektive A-lineare Abbildung. Zeige, daß der A-Modul $\ker \phi$ endlich erzeugt ist.

(Tip: Sei $(e_1, \ldots, e_n)$ eine Basis von A^n. Wähle $u_i \in M$ mit $\phi(u_i) = e_i$. Zeige, daß M die direkte Summe von $\ker \phi$ und dem von den u_i erzeugten Untermodul ist.)

Aufgabe 2.13. Sei $\phi\colon A \to B$ ein Homomorphismus kommutativer Ringe. Sei N ein B-Modul. Betrachte den B-Modul $(N^A)_B = B \otimes_A N^A$. Zeige, daß die A-lineare Abildung $\iota\colon N \to (N^A)_B, y \mapsto 1 \otimes y$ injektiv ist und daß $\operatorname{im} \iota$ ein direkter Summand von $(N^A)_B$ ist.

(Tip: Definiere $\pi\colon (N^A)_B \to N, b \otimes y \mapsto by$ und zeige, daß $(N^A)_B = \operatorname{im} \iota + \ker \rho$.

A.3. Lokalisierungen von Ringen und Moduln

Aufgabe 3.1. Sei S eine multiplikativ abgeschlossene Teilmenge eines kommutativen Ringes A. Sei M ein endlich erzeugter A-Modul. Zeige, daß $S^{-1}M = 0$ genau dann, wenn ein $s \in S$ mit $sM = 0$ existiert.

Aufgabe 3.2. Sei $\mathfrak{a}$ ein Ideal in einem kommutativen Ring A. Sei $S = 1 + \mathfrak{a}$. Zeige, daß $S^{-1}\mathfrak{a}$ im Jacobsonschen Radikal von $S^{-1}A$ enthalten ist.

Aufgabe 3.3. Sei A ein kommutativer Ring. Seien $S, T \subset A$ zwei multiplikativ abgeschlossene Teilmengen. Sei $S^{-1}T$ das Bild von T in $S^{-1}A$. Zeige, daß die Ringe $(ST)^{-1}A$ und $(S^{-1}T)^{-1}S^{-1}A$ isomorph sind.

Aufgabe 3.4. Sei $\phi\colon A \to B$ ein Homomorphismus kommutativer Ringe. Sei $S \subset A$ multiplikativ abgeschlossen. Zeige, daß $S^{-1}(B^A)$ und $((\phi(S))^{-1}B)^{S^{-1}A}$ isomorph als $S^{-1}A$-Algebren sind.

Aufgabe 3.5. Sei A ein kommutativer Ring. Für jedes Primideal $\mathfrak{p}$ von A besitze $A_\mathfrak{p}$ kein nilpotentes Element außer 0. Zeige, daß A außer 0 kein nilpotentes Element besitzt.

Folgt aus der Tatsache, daß alle Halme $A_\mathfrak{p}$ Integritätsbereiche sind, die Tatsache, daß A ein Integritätsbereich ist?

Aufgabe 3.6. Sei A ein kommutativer Ring mit $A \neq 0$. Sei $\mathfrak{S}$ die Menge der multiplikativ abgeschlossenen Teilmengen S von A mit $0 \notin S$. Zeige, daß $\mathfrak{S}$ bezüglich der Inklusion maximale Elemente besitzt und daß $S \in \mathfrak{S}$ genau dann maximal ist, falls $A \setminus S$ ein minimales Primideal von A ist.

Aufgabe 3.7. Wir nennen eine multiplikativ abgeschlossene Teilmenge S eines kommutativen Ringes A *gesättigt*, falls aus $xy \in S$ schon $x \in S$ und $y \in S$ folgt. Zeige:

1. Es ist S genau dann gesättigt, wenn $A \setminus S$ eine Vereinigung von Primidealen ist.

2. Es gibt eine eindeutige, kleinste gesättigte multiplikativ abgeschlossene Teilmenge $\bar{S} \subset A$ mit $S \subset \bar{S}$, nämlich das Komplement der Vereinigung aller Primideale von A, welche S nicht schneiden.

   Es heißt $\bar{S}$ die *Sättigung von S*.

Berechne die Sättigung einer multiplikativ abgeschlossenen Teilmenge der Form $1 + \mathfrak{a}$, wobei $\mathfrak{a}$ ein Ideal von A ist.

Aufgabe 3.8. Sei A ein kommutativer Ring. Seien $S, T \subset A$ zwei multiplikativ abgeschlossene Teilmengen von A mit $S \subset T$. Sei $\phi\colon S^{-1}A \to T^{-1}A$, $\frac{a}{s} \mapsto \frac{a}{s}$. Zeige, daß die folgenden Aussagen äquivalent sind:

1. Der Ringhomomorphismus ϕ ist bijektiv.

2. Für alle $t \in T$ ist $\frac{t}{1}$ eine Einheit in $S^{-1}A$.

3. Für alle $t \in T$ existiert ein $x \in A$ mit $xt \in S$.

4. Es ist T in der Sättigung $\bar{S}$ von S enthalten (Aufgabe 3.7).

5. Für jedes Primideal $\mathfrak{p}$ von A mit $\mathfrak{p} \cap T \neq \emptyset$ gilt auch $\mathfrak{p} \cap S \neq \emptyset$.

Aufgabe 3.9. Sei A ein kommutativer Ring. Die Menge S_0 der regulären Elemente von A ist eine gesättigte, multiplikativ abgeschlossene Teilmenge. Damit ist die Menge D der Nullteiler von A eine Vereinigung von Primidealen nach Aufgabe 1.13 auf Seite 126. Zeige, daß jedes minimale Primideal von A in D enthalten ist.
(Tip: Aufgabe 3.6.)
Der Ring $S_0^{-1}A$ heißt der *vollständige Quotientenring von A*. Zeige:

1. Die Teilmenge S_0 ist die größte multiplikativ abgeschlossene Teilmenge S von A, für die $A \to S^{-1}A$ injektiv ist.

2. Jedes Element in $S_0^{-1}A$ ist entweder ein Nullteiler oder eine Einheit.

3. Ein kommutativer Ring A, in dem jede Nichteinheit ein Nullteiler ist, ist gleich seinem vollständigen Quotientenring, das heißt $A \to S_0^{-1}A$ ist ein Isomorphismus.

Aufgabe 3.10. Sei $\mathfrak{a}$ ein Ideal in einem kommutativen Ring A. Sei M ein A-Modul. Für die Halme an allen maximalen Idealen $\mathfrak{m}$ von A mit $\mathfrak{m} \supset \mathfrak{a}$ gelte $M_\mathfrak{m} = 0$. Zeige, daß $M = \mathfrak{a}M$.

(Tip: Gehe auf den $A/\mathfrak{a}$-Modul $M/\mathfrak{a}M$ über und nutze die Lokalität der Trivialität eines Moduls.)

Aufgabe 3.11. Sei A ein kommutativer Ring. Sei $F \coloneqq A^n$ als A-Modul. Zeige, daß jede Menge von n Erzeugern von F als A-Modul schon eine Basis von F als A-Modul ist.

(Tip: Seien $x_1, \ldots, x_n$ Erzeuger von F. Sei $(e_1, \ldots, e_n)$ die kanonische Basis von F. Definiere $\phi\colon F \to F$ durch $\phi(e_i) = x_i$. Dann ist ϕ surjektiv. Es ist zu zeigen, daß ϕ ein Isomorphismus ist. Da Injektivität eine lokale Eigenschaft ist, können wir annehmen, daß A ein lokaler Ring ist. Sei etwa $k = A/\mathfrak{m}$ der Restklassenkörper von A. Sei weiter $N = \ker \phi$. Da F ein flacher A-Modul ist, führt die exakte Sequenz $0 \to N \to F \xrightarrow{\phi} F \to 0$ zu einer exakten Sequenz $0 \to k \otimes N \to k \otimes F \xrightarrow{\mathrm{id}_k \otimes \phi} k \otimes F \to 0$. Es ist $k \otimes F = k^n$ ein n-dimensionaler k-Vektorraum. Aus der Surjektivität von $\mathrm{id}_k \otimes \phi$ folgt damit auch die Injektivität, also $k \otimes N = 0$. Nach Aufgabe 2.12 auf Seite 128 ist N weiter endlich erzeugt. Nach dem Nakayamaschen Lemma ist damit $N = 0$. Damit ist ϕ ein Isomorphismus.)

Folgere, daß jede Erzeugermenge von F aus mindestens n Elementen bestehen muß.

A.4. Primärzerlegung

Aufgabe 4.1. Sei $\mathfrak{a}$ ein zerlegbares Ideal in einem kommutativen Ring A mit $\mathfrak{a} = \sqrt{\mathfrak{a}}$. Zeige, daß $\mathfrak{a}$ keine assoziierten eingebetteten Primideale besitzt.

Aufgabe 4.2. Zeige, daß in dem Polynomring $\mathbb{Z}[t]$ das Ideal $\mathfrak{m} = (2, t)$ maximal ist. Zeige weiter, daß das Ideal $\mathfrak{q} = (4, t)$ ein $\mathfrak{m}$-primäres Ideal ist, aber keine Potenz von $\mathfrak{m}$.

Aufgabe 4.3. Sei K ein Körper. Seien $\mathfrak{p}_1 \coloneqq (x, y), \mathfrak{p}_2 \coloneqq (x, z), \mathfrak{m} \coloneqq (x, y, z)$ drei Ideale im Polynomring $K[x, y, z]$. Zeige, daß $\mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_2$ Primideale sind und daß $\mathfrak{m}$ ein maximales Ideal ist.

Sei $\mathfrak{a} = \mathfrak{p}_1\mathfrak{p}_2$. Zeige, daß $\mathfrak{a} = \mathfrak{p}_1 \cap \mathfrak{p}_2 \cap \mathfrak{m}^2$ eine minimale Primärzerlegung von $\mathfrak{a}$ ist. Welche Komponenten sind isoliert und welche eingebettet?

Aufgabe 4.4. Sei A ein kommutativer Ring. Zeige:

1. Ist $\mathfrak{a}$ ein Ideal in A, so ist $\mathfrak{a}[x]$ (vergleiche Aufgabe 2.6 auf Seite 127) die Erweiterung von $\mathfrak{a}$ nach $A[x]$.

2. Seien $\mathfrak{p}$ ein Primideal in A und $\mathfrak{q}$ ein $\mathfrak{p}$-primäres Ideal. Dann ist $\mathfrak{q}[x]$ ein $\mathfrak{p}[x]$-primäres Ideal.

   (Tip: Nach Aufgabe 2.7 auf Seite 127 ist $\mathfrak{p}[x]$ ein Primideal. Nutze Aufgabe 1.2 auf Seite 125.)

3. Ist $\mathfrak{a} = \bigcap_{i=1}^{n} \mathfrak{q}_i$ eine minimale Primärzerlegung eines Ideals $\mathfrak{a}$ in A, so ist $\mathfrak{a}[x] = \bigcap_{i=1}^{n} \mathfrak{q}_i[x]$ eine minimale Primärzerlegung von $\mathfrak{a}[x]$.

4. Ist $\mathfrak{p}$ ein zu einem zerlegbaren Ideal $\mathfrak{a}$ assoziiertes isoliertes Primideal, so ist $\mathfrak{p}[x]$ ein zum Ideal $\mathfrak{a}[x]$ assoziiertes isoliertes Primideal.

Aufgabe 4.5. Sei K ein Körper. Zeige, daß die Ideale $\mathfrak{p}_i := (x_1, \dots, x_i)$ von $K[x_1, \dots, x_n]$ für $1 \leq i \leq n$ alle Primideale sind und daß ihre Potenzen alle Primärideale sind.
(Tip: Aufgabe 4.4 auf der vorherigen Seite.)

Aufgabe 4.6. Sei A ein kommutativer Ring. Sei $D(A)$ die Menge der Primideale $\mathfrak{p}$ von A, für die ein $a \in A$ existiert, so daß $\mathfrak{p}$ ein minimales Element in der Menge Primideale ist, die $(0 : a)$ umfassen. Zeige:

1. Ein Element $x \in A$ ist genau dann ein Nullteiler, wenn $x \in \mathfrak{p}$ für ein $\mathfrak{p} \in D(A)$.

2. Sei $S \subset A$ multiplikativ abgeschlossen. Dann ist $D(S^{-1}A) = \{S^{-1}\mathfrak{p} \mid \mathfrak{p} \cap S = \emptyset, \mathfrak{p} \in D(A)\}$.

3. Ist das Nullideal zerlegbar, so ist $D(A)$ die Menge der assoziierten Primideale von 0.

Aufgabe 4.7. Sei A ein kommutativer Ring. Für jedes Primideal $\mathfrak{p}$ in A sei $S_{\mathfrak{p}}(0)$ der Kern des Strukturmorphismus' $A \to A_{\mathfrak{p}}$. Zeige:

1. $S_{\mathfrak{p}}(0) \subset \mathfrak{p}$.

2. Es ist $\sqrt{S_{\mathfrak{p}}(0)} = \mathfrak{p}$ genau dann, wenn $\mathfrak{p}$ ein minimales Primideal von A ist.

3. Ist $\mathfrak{p}'$ ein Primideal in A mit $\mathfrak{p}' \subset \mathfrak{p}$, so folgt $S_{\mathfrak{p}}(0) \subset S_{\mathfrak{p}'}(0)$.

4. Sei $D(A)$ wie in Aufgabe 4.6 definiert. Dann ist $\bigcap_{\mathfrak{p} \in D(A)} S_{\mathfrak{p}}(0) = (0)$.

Aufgabe 4.8. Sei $\mathfrak{p}$ ein Primideal in einem kommutativen Ring A. Sei $S_{\mathfrak{p}}(0)$ wie in Aufgabe 4.7 definiert. Zeige:

1. Ist $\mathfrak{p}$ ein minimales Primideal, so ist $S_{\mathfrak{p}}(0)$ das kleinste $\mathfrak{p}$-primäre Ideal.

2. Sei $\mathfrak{a}$ der Schnitt aller $S_{\mathfrak{p}}(0)$, wobei $\mathfrak{p}$ über alle minimalen Primideale von A läuft. Dann ist $\mathfrak{a}$ im Nilradikal von A enthalten.

3. Das Nullideal von A sei zerlegbar. Dann ist $\mathfrak{a} = 0$ genau dann, falls jedes zu (0) assoziierte Primideal $\mathfrak{a}$ isoliert ist.

Aufgabe 4.9. Sei S eine multiplikativ abgeschlossene Teilmenge eines kommutativen Ringes A. Mit $S(\mathfrak{a})$ bezeichnen wir wie üblich die Sättigung eines Ideales $\mathfrak{a}$ nach S. Zeige:

1. Für je zwei Ideale $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}$ von A gilt $S(\mathfrak{a}) \cap S(\mathfrak{b}) = S(\mathfrak{a} \cap \mathfrak{b})$.
2. Für ein Ideal $\mathfrak{a}$ von A gilt $S(\sqrt{\mathfrak{a}}) = \sqrt{S(\mathfrak{a})}$.
3. Für ein Ideal $\mathfrak{a}$ von A gilt $S(\mathfrak{a}) = (1)$ genau dann, wenn $\mathfrak{a} \cap S \neq \emptyset$.
4. Seien $S_1, S_2 \subset A$ multiplikativ abgeschlossen. Für ein Ideal $\mathfrak{a}$ gilt dann $S_1(S_2(\mathfrak{a})) = (S_1 S_2)(\mathfrak{a})$.

Sei $\mathfrak{a}$ zerlegbar. Zeige, daß die Menge aller $S(\mathfrak{a})$, wobei S alle multiplikativ abgeschlossenen Teilmengen von A durchläuft, endlich ist.

Aufgabe 4.10. Sei $\mathfrak{p}$ ein Primideal eines kommutativen Ringes A. Sei $n \in \mathbb{N}_0$. Die *n-te symbolische Potenz von* $\mathfrak{p}$ ist die Sättigung $\mathfrak{p}^{(n)} := S_{\mathfrak{p}}(\mathfrak{p}^n)$, wobei $S_{\mathfrak{p}} := A \setminus \mathfrak{p}$. Zeige:

1. Es ist $\mathfrak{p}^{(n)}$ ein $\mathfrak{p}$-primäres Ideal.
2. Ist $\mathfrak{p}^n$ zerlegbar, so ist $\mathfrak{p}^{(n)}$ seine $\mathfrak{p}$-primäre Komponente.
3. Ist $\mathfrak{p}^{(m)}\mathfrak{p}^{(n)}$ zerlegbar, so ist $\mathfrak{p}^{(m+n)}$ seine $\mathfrak{p}$-primäre Komponente.
4. Es ist $\mathfrak{p}^{(n)} = \mathfrak{p}^n$ genau dann, wenn $\mathfrak{p}^n$ ein $\mathfrak{p}$-primäres Ideal ist.

Aufgabe 4.11. Sei $\mathfrak{a}$ ein zerlegbares Ideal in einem kommutativen Ring A. Sei $\mathfrak{p}$ ein maximales Element unter allen Idealen der Form $(\mathfrak{a} : x)$ mit $x \in A$ und $x \notin \mathfrak{a}$. Zeige, daß $\mathfrak{p}$ ein zu $\mathfrak{a}$ assoziiertes Primideal ist.

Aufgabe 4.12. Sei $\mathfrak{a}$ ein zerlegbares Ideal in einem kommutativen Ring A. Sei $\mathfrak{S}$ eine isolierte Menge von zu $\mathfrak{a}$ assoziierten Primidealen. Sei $\mathfrak{q}_{\mathfrak{S}}$ der Schnitt aller $\mathfrak{p}$-primären Komponenten von $\mathfrak{a}$ mit $\mathfrak{p} \in \mathfrak{S}$. Sei $f \in A$, so daß für alle zu $\mathfrak{a}$ assoziierten Primideale gilt, daß $f \in \mathfrak{p} \iff \mathfrak{p} \notin \mathfrak{S}$. Wir setzen $S_f := \{f^n \mid n \in \mathbb{N}_0\}$. Zeige, daß $\mathfrak{q}_{\mathfrak{S}} = S_f(\mathfrak{a}) = (\mathfrak{a} \colon f^n)$ für alle $n \gg 0$.

Aufgabe 4.13. Sei A ein kommutativer Ring, in dem jedes Ideal zerlegbar ist. Zeige, daß $S^{-1}A$ dieselbe Eigenschaft hat, wenn $S \subset A$ multiplikativ abgeschlossen ist.

Aufgabe 4.14. Sei A ein kommutativer Ring mit der folgenden Eigenschaft (L1): Zu jedem Ideal $\mathfrak{a} \neq (1)$ und zu jedem Primideal $\mathfrak{p}$ in A existiert ein $x \notin \mathfrak{p}$ mit $S_{\mathfrak{p}}(\mathfrak{a}) = (\mathfrak{a} : x)$, wobei $S_{\mathfrak{p}} := A \setminus \mathfrak{p}$.

Zeige, daß dann jedes Ideal in A der Schnitt (möglicherweise unendlich vieler) primärer Ideale ist.

(Tip: Sei $\mathfrak{p}_1$ ein minimales Element der Menge aller Primideale, welche $\mathfrak{a}$ umfassen. Nach Aufgabe 4.8 auf der vorherigen Seite ist $\mathfrak{q}_1 = S_{\mathfrak{p}_1}$. Weiter ist $\mathfrak{q}_1 = (\mathfrak{a} : x)$ für ein $x \notin \mathfrak{p}_1$. Folgere, daß $\mathfrak{a} = \mathfrak{q}_1 \cap (\mathfrak{a} + (x))$.

Sei sodann $\mathfrak{a}_1$ ein maximales Element unter allen Idealen $\mathfrak{b} \supset \mathfrak{a}$ mit $\mathfrak{q}_1 \cap \mathfrak{b} = \mathfrak{a}$ und $x \in \mathfrak{a}_1$, so daß $\mathfrak{a}_1 \not\subset \mathfrak{p}_1$. Wiederhole die Konstruktion diesmal mit $\mathfrak{a}_1$ und so weiter.

Im n-ten Schritt haben wir $\mathfrak{a} = \mathfrak{q}_1 \cap \cdots \cap \mathfrak{q}_n \cap \mathfrak{a}_n$, wobei die $\mathfrak{q}_i$ Primärideale sind und $\mathfrak{a}_n$ maximal unter allen Idealen $\mathfrak{b}$ mit $\mathfrak{b} \supset \mathfrak{a}_{n-1} = \mathfrak{a}_n \cap \mathfrak{q}_n$, so daß $\mathfrak{a} = \mathfrak{q}_1 \cap \cdots \cap q_n \cap \mathfrak{b}$ und $\mathfrak{a}_n \not\subset \mathfrak{p}_n$.

Sollte in irgendeinem Schnitt $\mathfrak{a}_n = (1)$ gelten, hört die Konstruktion auf und $\mathfrak{a}$ ist folglich ein endlicher Schnitt primärer Ideale. Im anderen Fall fahre mit transfiniter Induktion fort, und zwar unter Beachtung der Tatsache, daß jedes $\mathfrak{a}_n$ das Ideal $\mathfrak{a}_{n-1}$ echt enthält.)

Aufgabe 4.15. Betrachte folgende Eigenschaft (L2) kommutativer Ringe A: Ist $\mathfrak{a}$ ein Ideal von A und $S_1 \supset S_2 \supset \cdots$ eine absteigende Kette multiplikativ abgeschlossener Teilmengen von A, so existiert ein $n \in \mathbb{N}_0$ mit $S_n(\mathfrak{a}) = S_{n+1}(\mathfrak{a}) = \cdots$.

Zeige, daß folgende Aussagen für einen kommutativen Ring A äquivalent sind:

1. Jedes Ideal in A ist zerlegbar.

2. Der Ring A erfüllt die Eigenschaften (L1) (siehe Aufgabe 4.14 auf der vorherigen Seite) und (L2).

(Tip: Um aus der ersten die zweite Aussage zu folgern, benutze Aufgabe 4.9 auf Seite 131 und Aufgabe 4.12 auf der vorherigen Seite.

Um aus der zweiten die erste Aussage zu folgern, gehe folgendermaßen vor: Gilt $S_n = S_{\mathfrak{p}_1} \cap \cdots \cap S_{\mathfrak{p}_n}$ in der Notation von Aufgabe 4.14 auf der vorherigen Seite, so ist $S_n \cap \mathfrak{a}_n \neq \emptyset$, also $S_n(\mathfrak{a}_n) = (1)$, also $S_n(\mathfrak{a}) = \mathfrak{q}_1 \cap \cdots \cap \mathfrak{q}_n$. Folgere mit (L2), daß die Kontruktion nach einer endlichen Anzahl von Schritten aufhören muß.

Aufgabe 4.16. Sei $\mathfrak{p}$ ein Primideal eines kommutativen Ringes A. Zeige, daß jedes $\mathfrak{p}$-primäre Ideal das Ideal $S_{\mathfrak{p}}(0) = \ker(A \to A_{\mathfrak{p}})$ umfaßt.

Erfülle A die folgende Bedingung: Für jedes Primideal $\mathfrak{p}$ sei der Schnitt aller $\mathfrak{p}$-primären Ideale gerade $S_{\mathfrak{p}}(0)$. (Wir werden später sehen, daß alle sogenannten noetherschen Ringe diese Bedingung erfüllen.) Seien weiter $\mathfrak{p}_1, \ldots, \mathfrak{p}_n$ paarweise verschiedene Primideale von A, welche nicht minimal sind. Zeige, daß dann ein Ideal $\mathfrak{a}$ existiert, dessen assoziierte Primideale gerade $\mathfrak{p}_1, \ldots, \mathfrak{p}_n$ sind.

(Tip: Beweis per Induktion über n. Der Fall $n = 1$ ist trivial, denn wir können $\mathfrak{a} = \mathfrak{p}_1$ setzen. Sei also $n > 1$, und sei $\mathfrak{p}_n$ maximales Element der Menge $\mathfrak{p}_1, \ldots, \mathfrak{p}_n$. Nach Induktionsvoraussetzung existiert ein Ideal $\mathfrak{b}$ und eine Primärzerlegung $\mathfrak{b} = \mathfrak{q}_1 \cap \cdots \mathfrak{q}_{n-1}$, wobei $\mathfrak{q}_i$ ein $\mathfrak{p}_i$-primäres Ideal ist.

Angenommen, $\mathfrak{b} \subset S_{\mathfrak{p}_n}(0)$. Sei dann $\mathfrak{p}$ ein minimales Primideal von A mit $\mathfrak{p} \subset \mathfrak{p}_n$. Dann ist $S_{\mathfrak{p}_n}(0) \subset S_{\mathfrak{p}}(0)$, also $\mathfrak{b} \subset S_{\mathfrak{p}}(0)$. Ziehen der Wurzel liefert nach Aufgabe 4.7 auf Seite 131, daß $\mathfrak{p}_1 \cap \cdots \cap \mathfrak{p}_{n-1} \subset \mathfrak{p}$, also $\mathfrak{p}_i \subset \mathfrak{p}$ für ein $i < n$, also $\mathfrak{p}_i = \mathfrak{p}$, da $\mathfrak{p}$ minimal ist. Widerspruch, da kein $\mathfrak{p}_i$ minimal ist.

Also ist $\mathfrak{b} \not\subset S_{\mathfrak{p}_n}(0)$. Damit existiert ein $\mathfrak{p}_n$-primäres Ideal $\mathfrak{q}_n$ mit $\mathfrak{b} \not\subset \mathfrak{q}_n$. Zeige, daß $\mathfrak{a} = \mathfrak{q}_1 \cap \cdots \cap \mathfrak{q}_n$ die gewünschten Eigenschaften hat.)

Aufgabe 4.17. Sei A ein kommutativer Ring. Seien M ein A-Modul und $N \subset M$ ein Untermodul. Die *Wurzel von N in M* ist

$$\sqrt{N}_M \coloneqq \{x \in A \mid \exists q \in \mathbb{N}_0 \colon x^q M \subset N\}.$$

Zeige, daß $\sqrt{N}_M = \sqrt{(N : M)} = \sqrt{\operatorname{ann}(M/N)}$. Insbesondere ist $\sqrt{N}_M$ ein Ideal von A.

Formuliere und beweise entsprechende Aussagen für $\sqrt{}_M$ wie in Proposition 6.27 auf Seite 23.

Aufgabe 4.18. Sei A ein kommutativer Ring. Sei M ein A-Modul. Jedes Element $x \in A$ definiert einen Endomorphismus $\phi_x\colon M \to M, m \mapsto xm$ von M. Das Element x heißt *regulär in* M, falls ϕ_x injektiv ist, und andernfalls *Nullteiler in* M. Weiter heißt x *nilpotent in* M, falls ϕ_x nilpotent ist, falls also $\phi_x^n = 0$ für ein $n \in \mathbb{N}_0$.

Ein Untermodul Q von M heißt *primär*, falls die Nullteiler in M/Q genau die nilpotenten Elemente in M/Q sind.

Zeige, daß für einen primären Untermodul Q von M das Ideal $(Q : M)$ ein primäres Ideal ist und damit $\mathfrak{p} := \sqrt{Q}_M$ ein Primideal. Wir sagen in diesem Falle, daß Q ein $\mathfrak{p}$-*primärer Untermodul von* M ist.

Formuliere und beweise entsprechende Aussagen für Q wie in Hilfssatz 23.11 auf Seite 60 und Hilfssatz 23.12 auf Seite 60.

Aufgabe 4.19. Sei A ein kommutativer Ring. Seien M ein A-Modul und N ein Untermodul in M. Eine *Primärzerlegung von* N *in* M ist eine Darstellung $N = Q_1 \cap \cdots \cap Q_n$ von N als Schnitt primärer Untermoduln in M. Sie heißt *minimal*, falls alle $\mathfrak{p}_i := \sqrt{Q_i}_M$ paarweise verschieden sind und falls $Q_i \not\supset \bigcap_{j \neq i} Q_j$ für alle i.

Beweise die Entsprechung des ersten Eindeutigkeitssatzes 23.16, nämlich daß die Primideale $\mathfrak{p}_i$ nur von N und M abhängen. Diese heißen die *zu* N *in* M *assoziierten Primideale*. Zeige weiter, daß diese auch die Primideale sind, welche zu 0 in M/N assoziiert sind.

Aufgabe 4.20. Formuliere und beweise entsprechende Aussagen für die Primärzerlegung von Moduln wie in Proposition 23.21 auf Seite 62, Proposition 24.1 auf Seite 62, Proposition 24.4 auf Seite 63, Folgerung 24.5 auf Seite 63, Proposition 24.7 auf Seite 63, Satz 24.10 auf Seite 64 und Folgerung 24.11 auf Seite 64.

(Tip: Ohne Einschränkung kann davon ausgegangen werden, daß $N = 0$.)

A.5. Ganzheit und Bewertungen

Aufgabe 5.1. Sei $A \subset B$ eine ganze Erweiterung kommutativer Ringe. Sei $\phi\colon A \to L$ ein Ringhomomorphismus in einen algebraisch abgeschlossenen Körper L. Zeige, daß ϕ zu einem Ringhomomorphismus $\psi\colon B \to L$ fortgesetzt werden kann.

(Tip: Satz 26.4 auf Seite 68.)

Aufgabe 5.2. Sei A ein kommutativer Ring. Sei $\phi\colon B \to B'$ ein Homomorphismus kommutativer A-Algebren. Sei C eine weitere A-Algebra. Zeige: Ist ϕ ganz, so ist auch $\phi \otimes \mathrm{id}_C\colon B \otimes_A C \to B' \otimes_A C$ ganz.

Aufgabe 5.3. Sei $A \subset B$ eine ganze Erweiterung kommutativer Ringe. Sei $\mathfrak{n}$ ein maximales Ideal von B und $\mathfrak{m} := A \cap \mathfrak{n}$ das entsprechende maximale Ideal von A. Ist $B_{\mathfrak{n}}$ in jedem Falle ganz über $A_{\mathfrak{m}}$?

(Tip: Betrachte die Ringerweiterung $K[x^2 - 1] \subset K[x]$ für einen Körper K, und sei $\mathfrak{n} = (x - 1)$. Kann das Element $\frac{1}{x+1}$ ganz sein?)

Aufgabe 5.4. Sei $A \subset B$ eine ganze Erweiterung kommutativer Ringe. Zeige:

1. Ist $x \in A$ eine Einheit in B, so ist x auch eine Einheit in A.
2. Ist $\mathfrak{k}$ das Jacobsonsche Radikal von B, so ist die Kontraktion $\mathfrak{j} := A \cap \mathfrak{k}$ das Jacobsonsche Radikal von A.

Aufgabe 5.5. Sei A ein kommutativer Ring. Seien $B_1, \dots, B_n$ ganze kommutative A-Algebren. Zeige, daß $\prod_{i=1}^{n} B_i$ eine ganze A-Algebra ist.

Aufgabe 5.6. Sei $A \subset B$ eine Erweiterung kommutativer Ringe, so daß $S := B \setminus A$ in B multiplikativ abgeschlossen ist. Zeige, daß dann A ganz abgeschlossen in B ist.

Aufgabe 5.7. Sei $A \subset B$ eine Erweiterung kommutativer Ringe. Sei C der ganze Abschluß von A in B. Seien $f, g \in B[x]$ normierte Polynome mit $fg \in C[x]$. Zeige, daß dann auch $f, g \in C[x]$.

(Tip: Sei $B \subset D$ eine Ringerweiterung, in dem f und g in Linearfaktoren zerfallen, etwa $f = \prod(x - a_i)$ und $g = \prod(x - b_j)$. Die a_i, b_j sind Wurzeln von fg und damit ganz über C. Damit sind die Koeffizienten von f, g ganz über C.)

Aufgabe 5.8. Sei $A \subset B$ eine Erweiterung kommutativer Ringe. Sei C der ganze Abschluß von A in B. Zeige, daß dann $C[x]$ der ganze Abschluß von $A[x]$ in $B[x]$ ist.

(Tip: Ist $f \in B[x]$ ganz über $A[x]$, so ist

$$f^m + g_1 f^{m-1} + \cdots + g_m = 0$$

für gewisse $g_i \in A[x]$. Sei $r \gg 0$ eine ganze Zahl. Sei $f_1 := f - x^r$, also

$$(f_1 + x^r)^m + g_1(f + x^r)^{m-1} + \cdots + g_m = 0,$$

das heißt

$$f_1^m + h_1 f_1^{m-1} + \cdots + h_m = 0$$

für gewisse $h_i \in A[x]$, wobei $h_m = (x^r)^m + g_1(x^r)^{m-1} + \cdots + g_m$. Wende jetzt Aufgabe 5.7 auf die Polynome $-f_1$ und $f_1^{m-1} + h_1 f_1^{m-2} + \cdots + h_{m-1}$ an.

Aufgabe 5.9. Sei G eine endliche Gruppe von Automorphismen eines kommutativen Ringes A. Sei A^G der Unterring der G-Invarianten, das heißt derjenigen Elemente $x \in A$ für die $g(x) = x$ für alle $g \in G$.

1. Zeige, daß A ganz über A^G ist.

   (Tip: Sei $x \in A$. Überlege Dir, daß x Wurzel des Polynoms $\prod_{g \in G}(t - g(x))$ in t ist.)

2. Sei S eine G-invariante multiplikativ abgeschlossene Teilmenge in A, das heißt $g(S) \subset S$ für alle $g \in G$. Sei $S^G := S \cap A^G$. Zeige, daß sich die Wirkung von G auf A zu einer Wirkung auf $S^{-1}A$ fortsetzen läßt und daß $(S^G)^{-1}A^G \cong (S^{-1}A)^G$.

Aufgabe 5.10. Sei G eine endliche Gruppe von Automorphismen eines kommutativen Ringes A. Sei $\mathfrak{p}$ ein Primideal in A^G. Sei $\mathfrak{Q}$ die Menge aller Primideale $\mathfrak{q}$ von A mit $\mathfrak{p} = A^G \cap \mathfrak{q}$. Zeige, daß G auf $\mathfrak{Q}$ transitiv operiert, und folgere, daß $\mathfrak{Q}$ endlich ist.

(Tip: Seien $\mathfrak{q}_1, \mathfrak{q}_2 \in \mathfrak{Q}$ und $x \in \mathfrak{q}_1$. Dann ist $\prod\limits_{g \in G} g(x) \in \mathfrak{A}^G \cap \mathfrak{q}_1 = \mathfrak{p} \subset \mathfrak{q}_2$, also $g(x) \in \mathfrak{q}_2$ für ein $g \in G$. Folgere, daß $\mathfrak{q}_1 \subset \bigcup\limits_{g \in G} g(\mathfrak{p}_2)$, und wende dann Proposition 6.17 auf Seite 22 und Folgerung 26.3 auf Seite 68 an.)

Aufgabe 5.11. Sei $A \subset B$ eine endlich erzeugte Erweiterung von Integritätsbereichen. Zeige, daß ein $s \in A \setminus \{0\}$ und eine A-Algebra $B' \subset B$ mit $B' \cong A[y_1, \ldots, y_n]$ existieren, so daß $B[s^{-1}]$ ganz über $B'[s^{-1}]$ ist.

(Tip: Sei $S \coloneqq A \setminus \{0\}$, das heißt $K = S^{-1}A$ ist der Quotientenkörper von A. Dann ist $S^{-1}B$ eine endlich erzeugte K-Algebra, und nach Proposition 25.14 auf Seite 67 existieren damit $x_1, \ldots, x_n \in S^{-1}B$, so daß $K[x_1, \ldots, x_n] \subset S^{-1}B$ der Polynomring über K in n Variablen ist und daß $S^{-1}B$ ganz über $K[x_1, \ldots, x_n]$ ist. Seien $z_1, \ldots, z_m$ Erzeuger von B als kommutative A-Algebra. Dann sind die z_i, aufgefaßt als Element in $S^{-1}B$ ganz über $K[x_1, \ldots, x_n]$. Schreibe Ganzheitsbedingungen für die z_j hin, und zeige, daß ein $s \in S$ existiert, so daß $x_i = \frac{y_i}{s}$ mit $y_i \in B$ und so daß sz_j ganz über B' ist. Folgere, daß dieses s die geforderte Eigenschaft hat.)

Aufgabe 5.12. Seien $A \subset B$ eine endlich erzeugte Erweiterung von Integritätsbereichen. Zeige, daß ein $s \in A \setminus \{0\}$ existiert, so daß jeder Ringhomomorphismen $\phi\colon A \to L$ in einen algebraisch abgeschlossenen Körper L mit $\phi(s) \neq 0$ zu einem Ringhomomorphismus $B \to L$ fortgesetzt werden kann.

(Tip: Mit den Bezeichnungen des von Aufgabe 5.11 kann ϕ zunächst auf B' fortgesetzt werden, etwa indem alle y_i auf 0 geschickt werden. Sodann kann ϕ weiter auf $B'[s^{-1}]$ fortgesetzt werden, da $\phi(s) \in L^\times$, schließlich auf $B[s^{-1}]$ nach Aufgabe 5.1 auf Seite 134, da $B[s^{-1}]$ ganz über $B'[s^{-1}]$ ist.)

Aufgabe 5.13. Sei $A \subset B$ eine endlich erzeugte Erweiterung von Integritätsbereichen. Zeige: Ist das Jacobsonsche Radikal von A das Nullideal, so ist auch das Jacobsonsche Radikal von B das Nullideal.

(Tip: Sei $v \in B \setminus \{0\}$. Wir müssen zeigen, daß ein maximales Ideal $\mathfrak{n}$ von B mit $v \notin \mathfrak{n}$ existiert. Anwenden von Aufgabe 5.12 auf die Ringerweiterung $A \subset B[v^{-1}]$ liefert ein Element $s \in A \setminus \{0\}$. Sei $\mathfrak{m}$ ein maximales Ideal von A mit $s \notin \mathfrak{m}$. Seien $k \coloneqq A/\mathfrak{m}$ und L ein algebraischer Abschluß von k. Die Projektion $A \twoheadrightarrow k$ setzt sich zu einem Ringhomomorphismus $\psi\colon B[v^{-1}] \to L$ fort. Zeige, daß $\psi(v) \neq 0$ und daß $B \cap \ker \psi$ ein maximales Ideal von B ist.)

Aufgabe 5.14. Zeige, daß folgende Aussagen über einen kommutativen Ring A äquivalent sind:

1. Jedes Primideal in A ist Schnitt maximaler Ideale in A.

2. Ist $\phi\colon A \to B$ ein Homomorphismus kommutativer Ringe, so ist das Nilradikal in $\phi(A)$ gleich dem Jacobsonschen Radikal.

3. Jedes Primideal $\mathfrak{p}$ in A, welches nicht maximal ist, ist Schnitt aller Primideale, welche $\mathfrak{p}$ echt enthalten.

(Tip: Der schwierige Teil ist es, die erste Aussage aus der dritten zu folgern: Angenommen, die dritte Aussage sei wahr, allerdings gebe es ein Primideal $\mathfrak{p}$, welches nicht Schnitt maximaler Ideale ist. In dem wir von A nach $A/\mathfrak{p}$ übergehen, können wir annehmen, daß A ein Integritätsbereich mit Jacobsonschen Radikal $\mathfrak{j} \neq (0)$ ist. Sei $f \in \mathfrak{j}$ mit $f \neq 0$. Dann ist A_f nicht der Nullring, besitzt also ein maximales Ideal $\mathfrak{m}$. Für seine Kontraktion $\mathfrak{p} := A \cap \mathfrak{m}$ in A gilt dann, daß $f \notin \mathfrak{p}$ und daß $\mathfrak{p}$ maximal mit dieser Eigenschaft ist. Es ist $\mathfrak{p}$ kein maximales Ideal in A, ist aber auch nicht gleich dem Schnitt aller Primideale, welche $\mathfrak{p}$ echt enthalten.)

Ein kommutativer Ring A, welcher diese drei äquivalenten Aussagen erfüllt heißt ein *Jacobsonscher Ring*.

Aufgabe 5.15. Sei A ein Jacobsonscher Ring (siehe Aufgabe 5.14 auf der vorherigen Seite). Sei B eine kommutative A-Algebra. Zeige:

1. Ist B ganz über A, so ist B ein Jacobsonscher Ring.

2. Ist B endlich erzeugt über A, so ist B ebenfalls ein Jacobsonscher Ring.

   (Tip: Aufgabe 5.13 auf der vorherigen Seite.)

Aufgabe 5.16. Sei A ein kommutativer Ring. Zeige, daß die folgenden beiden Aussagen äquivalent sind:

1. Es ist A ein Jacobsonscher Ring.

2. Jede endlich erzeugte kommutative A-Algebra B, welche ein Körper ist, ist endlich über A.

(Tip: Um aus der ersten die zweite Aussage zu folgern: Reduziere auf den Fall, daß A ein Unterring von B ist. Nutze dann Aufgabe 5.12 auf der vorherigen Seite. Ist $s \in A \setminus \{0\}$ wie dort, so existiert ein maximales Ideal $\mathfrak{m}$ von A mit $s \notin \mathfrak{m}$, und die Projektion $A \twoheadrightarrow A/\mathfrak{m} =: K$ setzt sich zu einem Ringhomomorphismus $\psi\colon B \to L$ in einen algebraischen Abschluß L von K fort. Da B ein Körper ist, ist ψ injektiv und $\phi(B)$ ist algebraisch über K und damit endlich algebraisch über K.

Um aus der zweiten die erste Aussage zu folgern: Benutze die dritte Charakterisierung aus Aufgabe 5.14 auf der vorherigen Seite. Sei $\mathfrak{p}$ ein Primideal von A, welches nicht maximal ist, und sei $B := A/\mathfrak{p}$. Sei $f \in B \setminus \{0\}$. Dann ist $B[f^{-1}]$ eine endlich erzeugte A-Algebra. Wäre $B[f^{-1}]$ ein Körper, wäre es endlich über B, also ganz über B, also wäre B ein Körper nach Proposition 26.1 auf Seite 68 im Widerspruch dazu, daß $\mathfrak{p}$ kein maximales Ideal ist. Also ist $B[f^{-1}]$ kein Körper, besitzt also ein nicht triviales Primideal $\mathfrak{q}$, so daß $\mathfrak{p}' := B \cap \mathfrak{q}$ ein nicht triviales Primideal mit $f \notin \mathfrak{p}'$ ist.)

Aufgabe 5.17. Sei $A \subset B$ eine Erweiterung lokaler Ringe. Wir sagen, B *dominiere* A, falls das maximale Ideal $\mathfrak{m}$ von A im maximalen Ideal $\mathfrak{n}$ von B enthalten ist. (Dies ist äquivalent zu $\mathfrak{m} = A \cap \mathfrak{n}$.)

Sei K ein Körper. Sei $\mathfrak{S}$ die Menge aller Unterringe von K, welche lokal sind. Die Menge $\mathfrak{S}$ wird durch die Dominanzbeziehung teilweise geordnet. Zeige, daß $\mathfrak{S}$ maximale Elemente besitzt und daß ein Element $A \in \mathfrak{S}$ genau dann maximal ist, wenn A ein Bewertungsring von K ist.

(Tip: Satz 28.8 auf Seite 72.)

Aufgabe 5.18. Sei A ein Integritätsbereich mit Quotientenkörper K. Zeige, daß die folgenden beiden Aussagen äquivalent sind:

1. Es ist A ein Bewertungsring für K.

2. Für je zwei Ideale $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}$ von A gilt $\mathfrak{a} \subset \mathfrak{b}$ oder $\mathfrak{b} \subset \mathfrak{a}$.

Folgere dann: Ist A ein Bewertungsring und $\mathfrak{p}$ ein Primideal von A, so sind auch $A_\mathfrak{p}$ und $A/\mathfrak{p}$ Bewertungsringe (ihrer jeweiligen Quotientenkörper).

Aufgabe 5.19. Sei A ein Bewertungsring mit Quotientenkörper K. Zeige, daß jeder Unterring B von K mit $A \subset B$ ein lokaler Ring von A ist, das heißt eine Lokalisierung von A an einem Primideal $\mathfrak{p}$.

Aufgabe 5.20. Sei A ein Bewertungsring mit Quotientenkörper K. Die Gruppe $A^\times$ der Einheiten von A bildet eine Untergruppe von $K^\times$. Sei $G := \log K^\times/A^\times$ die Faktorgruppe, additiv geschreiben.

Zeige, daß durch die Setzung $\log[x]_{A^\times} \geq \log[y]_{A^\times} \iff xy^{-1} \in A$ für $x, y \in K^\times$ eine Ordnung von G definiert wird, welche mit der Gruppenstruktur verträglich ist, das heißt $\xi \geq \eta \implies \xi + \omega \geq \eta + \omega$ für alle $\xi, \eta, \omega \in G$.

Sei $\nu\colon K \to G \cup \{\infty\}$ durch $\nu(x) = \log[x]_{A^\times}$ für $x \in K^\times$ und $\nu(0) = \infty$ definiert. Zeige, daß $\nu(x+y) \geq \min(\nu(x), \nu(y))$ für alle $x, y \in K$.

Aufgabe 5.21. Sei umgekehrt G eine vollständig geordnete abelsche Gruppe (additiv geschrieben). Sei K ein Körper. Eine *Bewertung auf K mit Werten in G* ist eine Abbildung $\nu\colon K \to G \cup \{\infty\}$ mit $\nu(xy) = \nu(x) + \nu(y)$ und $\nu(x+y) \geq \min(\nu(x), \nu(y))$ und $\nu(x) = \infty \iff x = 0$ für alle $x, y \in K$. Zeige, daß die Menge der Elemente $x \in K$ mit $\nu(x) \geq 0$ ein Bewertungsring von K ist.

Dieser Ring ist der *Bewertungsring von ν* und die Untergruppe $\nu(K^\times)$ von G ist die *Bewertungsgruppe von ν*. Im wesentlichen sind also die Konzepte „Bewertungsring" und „Bewertung" äquivalent.

Aufgabe 5.22. Sei G eine vollständig geordnete abelsche Gruppe. Eine Untergruppe H von G heißt *isoliert*, falls aus $0 \leq \beta \leq \alpha$ mit $\beta \in G, \alpha \in H$ auch $\beta \in H$ folgt.

Sei A ein Bewertungsring mit Bewertungsgruppe G von K (siehe Aufgabe 5.21). Sei $\nu\colon K \to G \cup \{\infty\}$ die Bewertung.

Sei $\mathfrak{p}$ ein Primideal von A. Zeige, daß $\nu(A \setminus \mathfrak{p})$ alle Elemente x mit $x \geq 0$ einer isolierten Untergruppe $H(\mathfrak{p})$ durchläuft. Zeige weiter, daß so eine injektive Zuordnung von der Menge der Primideale von A in die Menge der isolierten Untergruppen von G definiert wird.

Was sind die Bewertungsgruppen der Bewertungsringe $A/\mathfrak{p}$ und $A_\mathfrak{p}$ für ein Primideal $\mathfrak{p}$?

Aufgabe 5.23. Sei G eine vollständig geordnete abgeschlossene Gruppe. Sei F ein beliebiger Körper. Mit $A := F[G]$ bezeichnen wir die *Gruppenalgebra von G über F*: Es besitzt A als F-Vektorraum eine Basis $(x_\alpha)_{\alpha\in G}$ mit $x_\alpha x_\beta = x_{\alpha\beta}$. Zeige, daß A ein Integritätsbereich ist.

Ist $u = a_1 x_{\alpha_1} + \cdots + a_n x_{\alpha_n} \in A$ mit $a_i \in F^\times$ und $\alpha_1 < \cdots < \alpha_n$, so definieren wir $\nu_0(u) := \alpha_1$. Zeige, daß die Abbildung $\nu_0\colon A \setminus \{0\} \to G$ die Bedingungen $\nu_0(xy)\nu_0(x) + \nu_0(y)$ und $\nu_0(x+y) \geq \min(\nu(x), \nu(y))$ für $x, y \in A \setminus \{0\}$ mit $x + y \neq 0$ erfüllt.

Sei K der Quotientenkörper A. Zeigen Sie, daß ν_0 eindeutig zu einer Bewertung ν auf K mit Bewertungsgruppe G fortgesetzt werden kann.

A.6. Kettenbedingungen

Aufgabe 6.1. Sei A ein Ring. Sei $\phi\colon M \to M$ ein Endomorphismus eines A-Moduls. Zeige:

1. Ist ϕ surjektiv und M noethersch, so ist ϕ ein Isomorphismus.

   (Tip: Betrachte die Kette der Untermoduln $\ker(\phi^n)$.)

2. Ist ϕ injektiv und M artinsch, so ist ϕ ein Isomorphismus.

   (Tip: Betrachte die Kette der Untermoduln $\operatorname{im}(\phi^n)$.)

Aufgabe 6.2. Sei A ein Ring. Sei M ein A-Modul. Jede nicht leere Menge endlich erzeugter Untermoduln von M besitze ein maximales Element. Zeige, daß M noethersch ist.

Aufgabe 6.3. Sei A ein Ring. Sei M ein A-Modul. Seien N_1, N_2 Untermoduln von M. Zeige, daß $M/(N_1 \cap N_2)$ noethersch ist, wenn M/N_1 und M/N_2 noethersch sind.

Formuliere und beweise die entsprechende Aussage für artinsche Moduln.

Aufgabe 6.4. Sei A ein Ring. Zeige: Ist M ein noetherscher A-Modul, so ist $A/\operatorname{ann} M$ ein noetherscher Ring.

Ist die entsprechende Aussage für artinsche Moduln wahr?

Aufgabe 6.5. Sei A ein noetherscher Ring. Zeige, daß A nur endlich viele minimale Primideale besitzt.

(Tip: Angenommen, daß Nilradikal läßt sich nicht als Schnitt endlich vieler Primideale schreiben. Dann gibt es ein maximales Wurzelideal $\mathfrak{a}$, welches nicht Schnitt endlich vieler Primideale ist. Ein Wurzelideal läßt sich nach Aufgabe 1.9 auf Seite 126 aber immer als Schnitt (eventuell unendlich vieler) Primideale schreiben. Führe dies zu einem Widerspruch. Folglich existieren endlich viele Primideale $\mathfrak{p}_1, \dots, \mathfrak{p}_n$ mit $\sqrt{(0)} = \mathfrak{p}_1 \cap \cdots \cap \mathfrak{p}_n$. Ist dann $\mathfrak{q}$ ein minimales Primideal, so ist damit $\mathfrak{p}_1 \cap \cdots \cap \mathfrak{p}_n \subset \mathfrak{q}$, also $\mathfrak{p}_i \subset \mathfrak{q}$ für ein i, also $\mathfrak{p}_i = \mathfrak{q}$.)

A.7. Noethersche Ringe

Aufgabe 7.1. Sei A ein nicht noetherscher kommutativer Ring. Zeige, daß die Menge $\mathfrak{S}$ der nicht endlich erzeugten Ideale von A ein maximales Element besitzt und daß maximale Elemente Primideale sind.

(Tip: Sei $\mathfrak{a}$ ein maximales Element von $\mathfrak{S}$. Seien $x, y \in A$ mit $xy \in \mathfrak{a}$, aber $x, y \notin \mathfrak{a}$. Zeige, daß ein endlich erzeugtes Ideal $\mathfrak{a}_0 \subset \mathfrak{a}$ mit $\mathfrak{a}_0 + (x) = \mathfrak{a} + (x)$ und $\mathfrak{a} = \mathfrak{a}_0 + x \cdot (a : x)$ existiert. Da $\mathfrak{a} \subsetneq (\mathfrak{a} : x)$, kann $\mathfrak{a}$ nicht maximal sein. Widerspruch.)

Folgere, daß ein kommutativer Ring, in dem jedes Primideal endlich erzeugt ist, ein noetherscher Ring ist.

Aufgabe 7.2. Sei A ein noetherscher kommutativer Ring. Zeige, daß eine Potenzreihe $f = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n \in A[\![x]\!]$ genau dann nilpotent ist, wenn alle a_n nilpotent sind.

Aufgabe 7.3. Sei $\mathfrak{a}$ ein irreduzibles Ideal in einem kommutativen Ring A. Zeige, daß die folgenden Aussagen äquivalent sind:

1. Das Ideal $\mathfrak{a}$ ist ein Primärideal.

2. Für jede mutliplikativ abgeschlossene Teilmenge S von A existiert ein $x \in S$ mit $A \cap S^{-1}\mathfrak{a} = (\mathfrak{a} : x)$.

3. Für alle $x \in A$ ist die Kette $(\mathfrak{a} : x) \subset (\mathfrak{a} : x^2) \subset \cdots$ stationär.

Aufgabe 7.4. Sei A ein noetherscher kommutativer Ring. Seien weiter B eine endlich erzeugte kommutative A-Algebra und G eine endliche Gruppe von A-Algebrenautomorphismen von B. Zeige, daß $B^G := \{y \in B \mid \forall g \in G\colon g(y) = y\}$ eine endlich erzeugte A-Algebra ist.

Aufgabe 7.5. Sei K ein endlich erzeugter kommutativer Ring, das heißt K ist endlich erzeugt als $\mathbb{Z}$-Algebra. Zeige: Ist K ein Körper, so ist K ein endlicher Körper.

(Tip: Ist K von Charakteristik 0, so haben wir $\mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset K$. Da K endlich über $\mathbb{Z}$ erzeugt ist, ist K dann auch endlich über $\mathbb{Q}$ erzeugt, und ist nach Folgerung 28.11 auf Seite 74 damit ein endlich erzeugter $\mathbb{Q}$-Vektorraum. Leite aus Proposition 31.10 auf Seite 81 dann einen Widerspruch her.

Also ist K von positiver Charakteristik p, also endlich erzeugt als $\mathbb{Z}/(p)$-Algebra. Nutze wieder Folgerung 28.11 auf Seite 74.)

Aufgabe 7.6. Sei A ein kommutativer Ring, so daß $A[x]$ noethersch ist. Ist dann auch A noethersch?

Aufgabe 7.7. Sei A ein kommutativer Ring. Seien die Halme $A_\mathfrak{m}$ für alle maximalen Ideale $\mathfrak{m}$ von A noethersch. Sei weiter für alle $x \in A \setminus \{0\}$ die Menge der maximalen Ideale mit $x \in \mathfrak{m}$ endlich. Zeige, daß A noethersch ist.

(Tip: Sei $\mathfrak{a} \neq (0)$ ein Ideal in A. Seien $\mathfrak{m}_1, \ldots, \mathfrak{m}_r$ die maximalen Ideale, welche $\mathfrak{a}$ umfassen. Wähle $x_0 \in \mathfrak{a} \neq (0)$. Seien $\mathfrak{m}_1, \ldots, \mathfrak{m}_{r+s}$ diejenigen maximalen Ideale, welche x_0 enthalten. Da $\mathfrak{m}_{r+1}, \ldots, \mathfrak{m}_{r+s}$ das Ideal $\mathfrak{a}$ nicht umfassen, existieren $x_j \in \mathfrak{a}$ mit $x_j \notin$

$\mathfrak{m}_{r+j}$ für $1 \leq j \leq s$. Da die $A_{\mathfrak{m}_i}$ noethersch sind, sind die $A_{\mathfrak{m}_i}\mathfrak{a}$ endlich erzeugt. Damit existieren $x_{s+1}, \ldots, x_t \in \mathfrak{a}$, deren Bilder in $A_{\mathfrak{m}_i}$ die $A_{\mathfrak{m}_i}\mathfrak{a}$ für $1 \leq i \leq r$ erzeugen. Sei $\mathfrak{a}_0 = (x_0, \ldots, x_t)$. Zeige, daß $A_\mathfrak{m}\mathfrak{a}_0 = A_\mathfrak{m}\mathfrak{a}$ für alle maximalen Ideale $\mathfrak{m}$ von A und folgere mit Proposition 21.2 auf Seite 55, daß $\mathfrak{a}_0 = \mathfrak{a}$.)

Aufgabe 7.8. Sei A ein kommutativer Ring. Sei M ein noetherscher A-Modul. Zeige, daß $M[x]$ (siehe Aufgabe 2.6 auf Seite 127) ein noetherscher $A[x]$-Modul ist.

Aufgabe 7.9. Sei A ein kommutativer Ring, so daß der Halm $A_\mathfrak{p}$ für jedes Primideal ein noetherscher Ring ist. Ist dann A notwendigerweise auch noethersch?

Aufgabe 7.10. Sei A ein kommutativer Ring. Sei M ein noetherscher A-Modul. Zeige, daß jeder Untermodul N von M eine Primärzerlegung in M besitzt (siehe Aufgabe 4.19 auf Seite 134).

(Tip: Imitiere die Beweise von Hilfssatz 32.2 auf Seite 82 und Hilfssatz 32.3 auf Seite 82.)

Aufgabe 7.11. Sei A ein noetherscher kommutativer Ring. Sei M ein endlich erzeugter A-Modul. Zeige, daß für ein Primideal $\mathfrak{p}$ von A die folgenden Aussagen äquivalent sind:

1. Das Primideal $\mathfrak{p}$ ist zu 0 in M assoziiert.

2. Es existiert ein $x \in M$ mit $\operatorname{ann}(x) = \mathfrak{p}$.

3. Es existiert ein Untermodul N von M mit $N \cong A/\mathfrak{p}$.

Folgere, daß eine Kette von Untermoduln $0 = M_0 \subset M_1 \subset \cdots \subset M_r = M$ existiert, so daß jeder Quotient M_{i+1}/M_i von der Form $A/\mathfrak{p}_i$ mit einem Primideal $\mathfrak{p}_i$ in A ist.

Aufgabe 7.12. Sei A ein noetherscher kommutativer Ring. Seien $\mathfrak{a} = \bigcap_{i=1}^{r} \mathfrak{b}_i = \bigcap_{j=1}^{s} \mathfrak{c}_j$ zwei minimale Zerlegungen eines Ideals $\mathfrak{a}$ in irreduzible Ideale. Zeige, daß $r = s$ und daß eine Permutation $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ mit $\sqrt{\mathfrak{b}_i} = \sqrt{\mathfrak{c}_{\sigma(i)}}$ existiert.

(Tip: Zeige, daß für alle $1 \leq i \leq r$ ein j mit $\mathfrak{a} = \mathfrak{b}_1 \cap \cdots \cap \mathfrak{b}_{i-1} \cap \mathfrak{c}_j \cap \mathfrak{b}_{i+1} \cap \cdots \mathfrak{b}_r$ existiert.)

Formuliere und beweise eine entsprechende Aussage für Moduln.

Aufgabe 7.13. Sei A ein noetherscher kommutativer Ring. Mit $\mathfrak{F}(A)$ bezeichnen wir die Menge der Isomorphieklassen $[M]$ endlich erzeugter A-Moduln M. Sei C die durch $\mathfrak{F}(A)$ frei erzeugte abelsche Gruppe, das heißt Elemente in C sind formale (endliche) $\mathbb{Z}$-Linearkombinationen von Isomorphieklassen endlich erzeugter A-Moduln. Jeder exakten Sequenz $0 \to M' \to M \to M'' \to 0$ endlich erzeugter A-Moduln ordnen wir das Element $[M] - [M'] - [M''] \in C$ zu. Sei D die von diesen Elementen für alle exakten Sequenzen erzeugte Untergruppe. Die Quotientengruppe $\mathrm{K}(A) \coloneqq C/D$ heißt die *Grothendiecksche Gruppe von A*. Für jeden endlich erzeugten A-Modul A bezeichnen wir mit $\gamma(M) = \gamma_A(M)$ das Bild von $[M]$ in $\mathrm{K}(A)$. Zeige:

1. Für jede additive Funktion λ mit Werten in einer abelschen Gruppe G, welche auf der Klasse der endlich erzeugten A-Moduln definiert ist, existiert genau ein Gruppenhomorphismus $\lambda_0 \colon \mathrm{K}(A) \to G$ mit $\lambda(M) = \lambda_0(\gamma(M))$ für alle endlich erzeugten A-Moduln M.

2. Zeige, daß $\mathrm{K}(A)$ von Elementen der Form $\gamma(A/\mathfrak{p})$ erzeugt wird, wobei $\mathfrak{p}$ ein Primideal in a ist.

   (Tip: Aufgabe 7.11 auf der vorherigen Seite.)

3. Zeige, daß $\mathrm{K}(A) \cong \mathbb{Z}$, wenn A ein Körper oder allgemeiner ein Hauptidealbereich ist.

4. Sei $f^* \colon A \to B$ ein endlicher Homomorphismus noetherscher kommutativer Ringe. Zeige, daß ein Gruppenhomomorphismus $f_! \colon \mathrm{K}(B) \to \mathrm{K}(A)$ mit $f_!(\gamma_B(N)) = \gamma_A(N^A)$ für alle endlich erzeugten B-Moduln N existiert.

   Sei $g^* \colon B \to C$ ein weiterer Homomorphismus noetherscher kommutativer Ringe. Zeige, daß $(f \circ g)_! = f_! \circ g_! \colon \mathrm{K}(C) \to \mathrm{K}(A)$..

A.8. Artinsche Ringe

Aufgabe 8.1. Sei A ein noetherscher kommutativer Ring. Sei $(0) = \mathfrak{q}_1 \cap \dots \cap \mathfrak{q}_n$ eine minimale Primärzerlegung des Nullideals. Sei $\mathfrak{p}_i := \sqrt{\mathfrak{q}_i}$. Mit $\mathfrak{p}_i^{(r)}$ bezeichnen wir die r-te symbolische Potenz von $\mathfrak{p}_i$ wie in Aufgabe 4.10 auf Seite 132. Zeige, daß für alle i ein $r_i \in \mathbb{N}_0$ mit $\mathfrak{p}_i^{(r_i)} \subset \mathfrak{q}_i$ existiert.

Im Falle, daß $\mathfrak{q}_i$ eine isolierte Primärkomponente ist, ist $A_{\mathfrak{p}_i}$ ein artinscher lokaler Ring mit maximalem Ideal $\mathfrak{m}_i$. Wir haben daher $\mathfrak{m}_i^r = 0$ für $r \gg 0$. Daraus folgt $\mathfrak{q}_i = \mathfrak{p}_i^{(r)}$ für $r \gg 0$.

Ist umgekehrt $\mathfrak{q}_i$ eine eingebettete Primärkomponente, so ist $A_{\mathfrak{p}_i}$ nicht artinsch, die Potenzen $\mathfrak{m}_i^r$ sind also alle unterschiedlich, so daß ebenfalls die $\mathfrak{p}_i^{(r)}$ unterschiedlich sind. Damit kann in der gegebenen Primärzerlegung $\mathfrak{q}_i$ durch irgendeines der $\mathfrak{p}_i$-primären Ideale $\mathfrak{p}_i^{(r)}$ mit $r \geq r_i$ ersetzt werden, so daß es unendlich viele verschiedene minimale Primärzerlegungen des Nullideals gibt, welche sich nur in der $\mathfrak{p}_i$-Komponente unterscheiden.

Aufgabe 8.2. Seien F ein Körper und A eine endlich erzeugte kommutative F-Algebra. Zeige, daß die beiden folgenden Aussagen äquivalent sind:

1. Es ist A ein artinscher Ring.

2. Es ist A eine endliche F-Algebra.

(Tip: Um aus der ersten die zweite Aussage zu folgern, benutze Satz 33.15 auf Seite 86, um sich auf den Fall eines artinschen lokalen Ringes einschränken zu können. Nach Folgerung 28.11 auf Seite 74 ist der Restklassenkörper von A eine endliche Erweiterung von F. Dann nutze aus, daß A als A-Modul endliche Länge hat.

Um aus der zweiten die erste Aussage zu folgern, nutze aus, daß die Ideale in A unter anderem F-Vektorräume sind und daher die absteigende Kettenbedingung erfüllen.)

Aufgabe 8.3. Sei A ein noetherscher kommutativer Ring. Seien $\mathfrak{p}$ ein Primideal und $\mathfrak{q}$ ein $\mathfrak{p}$-primäres Ideal in A. Betrachte Ketten von Primäridealen von $\mathfrak{q}$ nach $\mathfrak{p}$. Zeige, daß die Länge dieser Ketten nach oben beschränkt ist und daß alle maximalen Ketten dieselbe Länge besitzen.

A.9. Diskrete Bewertungsringe und Dedekindsche Bereiche

Aufgabe 9.1. Sei A ein Dedekindscher Bereich. Sei $S \subset A$ multiplikativ abgeschlossen. Zeige, daß $S^{-1}A$ entweder ein Dedekindscher Bereich oder der Quotientenkörper von A ist.

Sei jetzt $S \neq A \setminus \{0\}$. Ist $\mathfrak{r}$ ein nicht verschwindendes gebrochenes Ideal in A bzw. $S^{-1}A$ bezeichnen wir mit $[\mathfrak{r}]$ sein Bild in der Idealklassengruppe von A bzw. $S^{-1}A$. Zeige, daß $\mathrm{C}(A) \to \mathrm{C}(S^{-1}A), [\mathfrak{r}] \mapsto [S^{-1}\mathfrak{r}]$ ein surjektiver Gruppenhomomorphismus ist.

Aufgabe 9.2. Sei A ein Dedekindscher Bereich. Ist $f = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n \in A[x]$ ein Polynom über A, so heißt das Ideal $\operatorname{cont}(f) \coloneqq (a_0, \cdots, a_n)$ der *Inhalt von f*. Zeige das Gaußsche Lemma, nämlich daß $\operatorname{cont}(fg) = \operatorname{cont}(f)\operatorname{cont}(g)$ für $f, g \in A[x]$.

(Tip: Lokalisiere an jedem maximalen Ideal.)

Aufgabe 9.3. Sei A ein Bewertungsring, welcher kein Körper ist. Zeige, daß A genau dann noethersch ist, wenn A ein diskreter Bewertungsring ist.

Aufgabe 9.4. Sei $(A, \mathfrak{m})$ ein lokaler Integritätsbereich, welcher kein Körper ist. Sei $\mathfrak{m}$ ein Hauptideal, und sei $\bigcap\limits_{n=0}^{\infty} \mathfrak{m}^n = 0$. Zeige, daß A ein diskreter Bewertungsring ist.

Aufgabe 9.5. Sei A ein Dedekindscher Bereich. Sei $\mathfrak{a}$ ein Ideal in A. Zeige, jedes Ideal im Ring $A/\mathfrak{a}$ ein Hauptideal ist.

Folgere, daß jedes Ideal in A von höchstens zwei Elementen erzeugt werden kann.

Aufgabe 9.6. Sei A ein Dedekindscher Bereich. Seien $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c}$ drei Ideale von A. Zeige:

1. $\mathfrak{a} \cap (\mathfrak{b} + \mathfrak{c}) = (\mathfrak{a} \cap \mathfrak{b}) + (\mathfrak{a} \cap \mathfrak{c})$.
2. $\mathfrak{a} + (\mathfrak{b} \cap \mathfrak{c}) = (\mathfrak{a} + \mathfrak{b}) \cap (\mathfrak{a} + \mathfrak{c})$.

(Tip: Lokalisiere.)

Aufgabe 9.7 (Chinesischer Restsatz)**.** Sei A ein Dedekindscher Bereich. Seien $\mathfrak{a}_1, \ldots, \mathfrak{a}_n$ Ideale in A und $x_1, \ldots, x_n \in A$. Zeige dann, daß das System $x = x_i \pmod{\mathfrak{a}_i}$ von Kongruenzen genau dann eine Lösung $x \in A$ in A besitzt, wenn $x_i = x_j \pmod{\mathfrak{a}_i + \mathfrak{a}_j}$ für alle $i \neq j$.

(Tip: Die Aussage ist äquivalent zur Exaktheit der A-Modulsequenz

$$A \xrightarrow{\phi} \bigoplus_i A/\mathfrak{a}_i \xrightarrow{\psi} \bigoplus_{i<j} A/(\mathfrak{a}_i + \mathfrak{a}_j),$$

wobei die i-te Komponente von $\phi(a)$ durch $x + \mathfrak{a}_i$ und die (i, j)-te Komponente von $\psi(x_1 + \mathfrak{a}_1, \dots, x_n + \mathfrak{a}_n)$ durch $x_i - x_j + \mathfrak{a}_i + \mathfrak{a}_j$ gegeben ist.

Um zu zeigen, daß diese Sequenz exakt ist, reicht es zu zeigen, daß ihre Lokalisierung an jedem Primideal $\mathfrak{p} \neq (0)$ exakt ist. Mit anderen Worten können wir also annehmen, daß A ein diskreter Bewertungsring ist. Dann ist die Aussage einfach.)

A.10. Vervollständigungen

Aufgabe 10.1. Sei p eine Primzahl. Sei $\alpha_n \colon \mathbb{Z}/(p) \hookrightarrow \mathbb{Z}/(p^n), [x]_{(p)} \mapsto [p^{n-1}x]_{(p^n)}$. Seien $A := \bigoplus_{n=1}^{\infty} \mathbb{Z}/(p)$ und $B := \bigoplus_{n=1}^{\infty} \mathbb{Z}/(p^n)$. Sei $\alpha \colon A \hookrightarrow B, (\xi_1, \xi_2, \dots) \mapsto (\alpha_1(\xi_1), \alpha_2(\xi_2), \dots)$. Zeige, daß die p-adische Vervollständigung von A wieder A ist. Zeige weiter, daß die Vervollständigung von A bezüglich der von der p-adischen Topologie auf B induzierten Topologie durch $\prod_{n=1}^{\infty} \mathbb{Z}/(p)$ gegeben ist.

Folgere, daß die p-adische Vervollständigung kein rechtsexakter Funktor auf der Kategorie aller $\mathbb{Z}$-Moduln ist.

Aufgabe 10.2. In den Bezeichnungen von Aufgabe 10.1 sei $A_n := \alpha^{-1}(Bp^n)$. Betrachte die exakten Sequenzen

$$0 \to A_n \to A \to A/A_n \to 0.$$

Zeige, daß $\varprojlim$ kein rechtsexakter Funktor ist, und berechne $\varprojlim_n^1 A_n$.

Aufgabe 10.3. Sei $\mathfrak{a}$ ein Ideal in einem noetherschen kommutativen Ring. Sei M ein endlich erzeugter A-Modul. Zeige mit Satz 42.9 auf Seite 109 und Aufgabe 3.10 auf Seite 130, daß

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} \mathfrak{a}^n M = \bigcap_{\mathfrak{m} \supset \mathfrak{a}} \ker(M \to M_{\mathfrak{m}}),$$

wobei $\mathfrak{m}$ über alle maximalen Ideale läuft, welche $\mathfrak{a}$ enthalten.

Aufgabe 10.4. Sei $\mathfrak{a}$ ein Ideal in einem noetherschen kommutativen Ring A. Für jedes $x \in A$ bezeichnen wir mit $\hat{x}$ das Bild unter dem kanonischen Homomorphismus $A \to \hat{A} = \hat{A}_{\mathfrak{a}}$. Zeige, daß $\hat{x}$ ein reguläres Element in $\hat{A}$ ist, wenn x ein reguläres Element in A ist.

Folgt daraus, daß $\hat{A}$ ein Integritätsbereich ist, wenn A ein Integritätsbereich ist? (Tip: Nutze die Exaktheit der Vervollständigung der Sequenz $0 \to A \xrightarrow{x\cdot} A$ aus.)

Aufgabe 10.5. Seien $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}$ zwei Ideale in einem noetherschen kommutativen Ring A. Zeige, daß für einen endlich erzeugten A-Modul ein Isomorphismus

$$\widehat{(\hat{M}_{\mathfrak{a}})}_{\hat{\mathfrak{b}}_{\mathfrak{a}}} \cong \hat{M}_{\mathfrak{a}+\mathfrak{b}}$$

existiert.

(Tip: Betrachte die $\mathfrak{a}$-adische Vervollständigung der kurzen exakten Sequenz

$$0 \to \mathfrak{b}^m M \to M \to M/\mathfrak{b}^m M \to 0$$

und verwende Proposition 42.3 auf Seite 107. Dann benutze die Isomorphismen

$$\varprojlim_m (\varprojlim_n M/(\mathfrak{a}^n M + \mathfrak{b}^m M)) \cong \varprojlim_n M/(\mathfrak{a}^n M + \mathfrak{b}^n M)$$

und die Inklusionen $(\mathfrak{a}+\mathfrak{b})^{2n} \subset \mathfrak{a}^n + \mathfrak{b}^n \subset (\mathfrak{a}+\mathfrak{b})^n$.

Aufgabe 10.6. Sei $\mathfrak{a}$ ein Ideal in einem Ring A. Zeige, daß $\mathfrak{a}$ genau dann im Jacobsonschen Radikal enthalten ist, wenn jedes maximale Ideal von A abgeschlossen bezüglich der $\mathfrak{a}$-adischen Topologie ist.

Aufgabe 10.7. Sei $(A, \mathfrak{m}, F)$ ein lokaler Ring, welcher $\mathfrak{m}$-adisch vollständig ist. Für ein Polynom $f \in A[x]$ bezeichne $\bar{f} \in F[x]$ die Reduktion modulo $\mathfrak{m}$.

Zeige das „Henselsche Lemma“: Ist $f \in A[x]$ ein normiertes Polynom mit $\bar{f} = \tilde{g}\tilde{h}$ für teilerfremde normierte Polynome $\tilde{g}, \tilde{h} \in F[x]$, so existieren normierte Polynome $g, h \in A[x]$ mit $f = gh$ und $\bar{g} = \tilde{g}$ und $\bar{h} = \tilde{h}$.

(Tip: Nimm an, daß induktiv Polynome $g_k, h_k \in A[x]$ mit $g_k h_k - f \in A[x]\mathfrak{m}^k$ konstruiert worden sind. Dann folgere aus der Teilerfremdheit von $\tilde{g}, \tilde{h}$, daß für jede Zahl $1 \le p \le n$ Polynome $\tilde{a}_p, \tilde{b}_p \in F[x]$ mit $x^p = \tilde{a}_p \bar{g}_k + \tilde{b}_p \bar{h}_k$ existieren. Schließlich folgere aus der Vollständigkeit von A, daß die Folgen g_k, h_k gegen die gewünschten Polynome $g, h \in A[x]$ konvergieren.)

Aufgabe 10.8.

1. Sei $(A, \mathfrak{m}, F)$ ein lokaler Ring, welcher $\mathfrak{m}$-adisch vollständig ist. Sei $f \in A[x]$. Sei weiter $\tilde{a} \in F$ eine einfache Nullstelle der Reduktion $\bar{f} \in F[x]$ von f modulo $\mathfrak{m}$. Zeige, daß f eine einfache Nullstelle $a \in A$ mit $\bar{a} = \tilde{a}$ besitzt.
2. Zeige, daß 2 eine Quadratwurzel in den 7-adischen ganzen Zahlen $\mathbb{Z}_7$ besitzt.
3. Seien K ein Körper und $f \in K[x, y]$. Besitze $f(0, y) \in K[y]$ eine einfache Nullstelle in $a_0 \in K$. Zeige, daß eine formale Potenzreihe $g = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \in K[\![x]\!]$ mit $f(x, g(x)) = 0$ existiert.

Aufgabe 10.9. Zeige, daß die Umkehrung von Satz 43.8 auf Seite 113 falsch ist, selbst unter der Annahme, daß A lokal ist und $\hat{A}$ ein endlich erzeugter A-Modul.

(Tip: Nimm als A die Lokalisierung des Ringes aller $\mathcal{C}^\infty$-Funktionen auf $\mathbb{R}$ nach dem maximalen Ideal der bei 0 verschwindenden Funktionen. Benutze den Borelschen Satz, daß jede Potenzreihe über $\mathbb{R}$ als Taylorreihe einer $\mathcal{C}^\infty$-Funktion auf $\mathbb{R}$ realisiert werden kann.

A.11. Dimensionstheorie

Aufgabe 11.1. Sei K ein algebraisch abgeschlossener Körper. Sei $f \in K[x_1, \dots, x_n]$ ein irreduzibles Polynom. Wir sagen $P = (a_1, \dots, a_n) \in K^n$ sei *nicht singulär*, falls $(\frac{\partial f}{\partial x_1}(a_1), \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(a_n)) \in K^n$ nicht der Nullvektor ist.

Sei $A = K[x_1, \dots, x_n]/(f)$. Sei $\mathfrak{m}$ das Bild des Ideals $(x_1 - a_1, \dots, x_n - a_n)$ in A. Zeige, daß P genau dann nicht singulär ist, wenn $A_\mathfrak{m}$ ein regulärer lokaler Ring ist.

(Tip: Nach Folgerung 45.16 auf Seite 120 ist $\dim A_\mathfrak{m} = n-1$. Weiter ist $\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2 = (x_1,\dots,x_n)/(x_1,\dots,x_n)^2 + (f)$. Dieser $A/\mathfrak{m}$-Vektorraum hat Dimension $n-1$ genau dann, wenn $f \notin (x_1,\dots,x_n)^2$.)

Aufgabe 11.2. Sei $(A,\mathfrak{m})$ ein vollständiger lokaler Ring. Sei $K \subset A$ ein Körper, welcher isomorph auf $A/\mathfrak{m}$ abgebildet wird. Sei $(x_1,\dots,x_d)$ ein Parametersystem für A. Zeige, daß der Homomorphismus $K[\![t_1,\dots,t_d]\!] \to A, t_i \mapsto x_i$ injektiv ist und daß A ein endlich erzeugter Modul über $K[\![t_1,\dots,t_d]\!]$ wird.

(Tip: Proposition 43.6 auf Seite 112.)

Aufgabe 11.3. Sei K ein Körper. Sei $A \coloneqq K[x_1,x_2,\dots]$ der Polynomring über K in unendlich vielen Variablen. Sei $0 < m_1, m_2, \dots$ eine aufsteigende Folge natürlicher Zahlen mit $m_{i+1} - m_i > m_i - m_{i-1}$ für alle $i > 1$. Sei $\mathfrak{p}_i \coloneqq (x_{m_i+1},\dots,x_{m_{i+1}})$ für alle i. Sei schließlich $S \coloneqq A \setminus \bigcup_{i=1}^{\infty} \mathfrak{p}_i$. Zeige dann folgende Behauptungen:

1. Die Ideale $\mathfrak{p}_i$ sind Primideale, und S ist damit multiplikativ abgeschlossen in A.
2. Der Ring $S^{-1}A$ ist noethersch. (Aufgabe 7.7 auf Seite 140.)
3. Die Höhe von $S^{-1}\mathfrak{p}_i$ ist $m_{i+1} - m_i$.
4. Es ist $\dim S^{-1}A = \infty$.

Es existieren damit Noethersche Integritätsbereiche unendlicher Dimension.

Aufgabe 11.4. Formuliere Satz 44.3 auf Seite 114 in Termen der Grothendieckschen Gruppe $\mathrm{K}(A_0)$ (Aufgabe 7.13 auf Seite 141).

Aufgabe 11.5. Sei A ein kommutativer Ring. Zeige, daß

$$1 + \dim A \leq \dim A[x] \leq 1 + 2\dim A.$$

(Tip: Sei $\phi\colon A \to A[x]$ die Einbettung. Sei $\mathfrak{p}$ ein Primideal in A. Die Menge der Primideale $\mathfrak{q}$ in $A[x]$ mit $A \cap \mathfrak{q} = \mathfrak{p}$ steht in kanonischer bijektiver Korrespondenz zur Menge der Primideale von $F[X]$, wobei $F = A_\mathfrak{p}/A_\mathfrak{p}\mathfrak{p}$. Weiter ist $\dim F[X] = 1$. Dann Aufgabe 4.4 auf Seite 130.)

Aufgabe 11.6. Sei A ein noetherscher kommutativer Ring. Zeige, daß

$$\dim A[x] = 1 + \dim A$$

und damit $\dim A[x_1,\dots,x_n] = n + \dim A$.

(Tip: Sei $\mathfrak{p}$ ein Primideal der Höhe m in A. Dann existieren $a_1,\dots,a_m \in \mathfrak{p}$, so daß $\mathfrak{p}$ minimales Primideal zu $\mathfrak{a} \coloneqq (a_1,\dots,a_m)$ ist. Nach Aufgabe 4.4 auf Seite 130 ist $\mathfrak{p}[x]$ ein minimales Primideal zu $\mathfrak{a}[x]$ und damit $\operatorname{ht}\mathfrak{p}[x] \leq m$.

Auf der anderen Seite induziert jede Primidealkette $\mathfrak{p}_0 \subsetneq \mathfrak{p}_1 \subsetneq \dots \subsetneq \mathfrak{p}_m = \mathfrak{p}$ eine Primidealkette $\mathfrak{p}_0[x] \subsetneq \mathfrak{p}_1[x] \subsetneq \dots \subsetneq \mathfrak{p}_m[x] = \mathfrak{p}[x]$. Damit ist also $\operatorname{ht}\mathfrak{p}[x] \geq m$.

Zeige schließlich durch Induktion über s: Ist $\mathfrak{q}$ ein Primideal von $A[x]$ der Höhe s, so gilt $s \leq \operatorname{ht}\mathfrak{p} + 1$, wobei $\mathfrak{p} = A \cap \mathfrak{q}$.)

B. Grundlagen aus den Anfängervorlesungen

B.1. Mengen

Definition B.1. Sei X eine Menge. Eine Relation $\sim$ auf X heißt

1. *transitiv*, falls aus $x \sim y$ und $y \sim z$ auch $x \sim z$ für $x, y, z \in X$ folgt,
2. *reflexiv*, falls $x \sim x$ für $x \in X$ gilt und
3. *antisymmetrisch*, falls auch $x \sim y$ und $y \sim x$ schon $x = y$ für $x, y \in X$ folgt.

Definition B.2. Eine *Halbordnung* $\leq$ *auf einer Menge* X ist eine transitive, reflexive und antisymmetrische Relation auf X. Eine Menge $(X, \leq)$ zusammen mit einer Halbordnung heißt *halbgeordnete Menge*.

Anstelle von einer Halbordnung wird auch der Ausdruck „teilweise Ordnung“ benutzt oder auch einfach nur „Ordnung“.

Beispiel B.3. Sei $(X, \leq)$ eine halbgeordnete Menge. Ist $Z \subset X$ eine Teilmenge, so definiert die Einschränkung von $\leq$ auf Z in kanonischer Weise eine Halbordnung auf Z.

Beispiel B.4. Sei Y eine Menge. Sei $\mathfrak{X}$ ein System von Teilmengen von Y, also eine Teilmenge der Potenzmenge von Y. Dann ist die Inklusionsrelation $\subset$ eine Halbordnung auf $\mathfrak{X}$. Damit ist jedes System $\mathfrak{X}$ von Teilmengen in natürlicher Weise eine geordnete Menge.

Definition B.5. Sei $(X, \leq)$ eine halbgeordnete Menge.

1. Ein *größtes Element* $x \in X$ ist ein Element, so daß $y \leq x$ für alle $y \in X$.
2. Ein *maximales Element* $x \in X$ ist ein Element, so daß aus $x \leq y$ schon $x = y$ für alle $y \in X$ folgt.
3. Eine *obere Schranke* $x \in X$ *einer Teilmenge* $Z \subset X$ ist ein Element mit $z \leq x$ für alle $z \in Z$.

Bemerkung B.6. Größte Elemente sind immer eindeutig und auch maximal. Existiert ein größtes Element, so gibt es keine weiteren maximalen Elemente.

Ein größtes Element ist dasselbe wie eine obere Schranke der gesamten Menge.

Definition B.7. Sei $(X, \leq)$ eine halbgeordnete Menge.

1. Die Menge X heißt *vollständig geordnet*, falls $x \leq y$ oder $y \leq x$ für alle $x, y \in X$ gilt.
2. Eine *Kette* Z *in* X ist eine Teilmenge $Z \subset X$, welche mit der induzierten Halbordnung vollständig geordnet ist, das heißt $x \leq y$ oder $y \leq x$ für alle $x, y \in Z$.

Satz B.8 (Zornsches Lemma)**.** *Sei X eine halbgeordnete Menge. Jede Kette in X besitze eine obere Schranke in X. Dann besitzt X ein maximales Element.*

B.2. Topologie

Definition B.9. Sei X eine Menge. Eine *Topologie auf X* ist eine Menge von Teilmengen von X, den *offenen Mengen* der Topologie, so daß

1. endliche Schnitte offener Mengen in X wieder offen sind (damit ist insbesondere die ganze Menge X als leerer Schnitt offen) und

2. beliebige Vereinigungen offener Mengen in X wieder offen sind (damit ist insbesondere die leere Menge $\emptyset$ als leere Vereinigung offen).

Eine Teilmenge heißt *abgeschlossene Menge* der Topologie, falls sie Komplement einer offenen Menge in X ist.

Definition B.10. Ein *topologischer Raum* ist eine Menge X zusammen mit einer Topologie.

Ist X ein topologischer Raum und ist $x \in X$, so heißt eine offene Menge U von X mit $x \in U$ eine *offene Umgebung von x in X*.

Eine *Umgebung von x in X* ist eine Teilmenge U von X, so daß eine offene Umgebung U' von x in X mit $U' \subset U$ existiert.

Beispiel B.11. Sei X eine Menge. Die Potenzmenge von X ist eine Topologie auf X, die *diskrete Topologie auf X*.

Beispiel B.12. Sei X ein topologischer Raum. Sei Y eine Teilmenge von X. Die Menge der Schnitte von Y mit den offenen Teilmengen von X ist eine Topologie auf Y. Diese Topologie heißt die *Teilraumtopologie von Y in X*.

In Zukunft versehen wir Y immer mit dieser Topologie.

Definition B.13. Sei X eine Menge. Eine Menge $\mathfrak{U}$ von Teilmengen von X heißt *Basis einer Topologie auf X*, falls $\mathfrak{U}$ abgeschlossen unter endlichen Schnitten ist.

Proposition B.14. *Sei X eine Menge. Ist $\mathfrak{U}$ die Basis einer Topologie auf X, so ist die Menge aller beliebigen Vereinigungen von Teilmengen in $\mathfrak{U}$ in X eine Topologie auf X. Diese Topologie heißt die durch $\mathfrak{U}$ erzeugte Topologie.* □

Beispiel B.15. Seien X, Y zwei topologische Räumen. Dann ist die Menge aller Teilmengen der Form $U \times V$ von $X \times Y$, wobei U offen in X und V offen in Y ist, eine Basis einer Topologie auf $X \times Y$. Die davon erzeugte Topologie auf $X \times Y$ heißt die *Produkttopologie*.

In Zukunft versehen wir $X \times Y$ immer mit dieser Topologie.

In Verallgemeinerung des vorherigen Beispiels wird definiert:

Beispiel B.16. Sei $(X_i)_{i \in I}$ eine Familie topologischer. Dann ist die Menge aller Teilmengen von $X := \prod_{i \in I} X_i$ der Form $\prod_{i \in I} U_i$ mit $U_i \subset X_i$ offen für alle $i \in I$ und $U_i = X_i$ für fast alle $i \in I$ die Basis einer Topologie auf $X \times Y$. Die davon erzeugte Topologie auf X heißt die *Produkttopologie*.

In Zukunft versehen wir X immer mit dieser Topologie.

Definition B.17. Sei X ein topologischer Raum. Sei $x \in X$. Eine Familie $\mathfrak{U}$ von Teilmengen U von X mit $U \ni x$ heißt *Umgebungsbasis von x*, falls für alle Umgebungen V von x in X ein $U \in \mathfrak{U}$ mit $U \subset V$ existiert.

Wir sagen, X *erfülle das erste Abzählbarkeitsaxiom*, falls jeder Punkt von X eine abzählbare Umgebungsbasis besitzt.

Definition B.18. Ein topologischer Raum X heißt *hausdorffsch*, falls die Diagonale $\{(x, x) \in X \times X \mid x \in X\}$ in $X \times X$ abgeschlossen ist.

Definition B.19. Sei X ein topologischer Raum. Sei $(x_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ eine Folge in X. Wir sagen, daß ein Element $x \in X$ ein *Grenzwert von (x_n) ist*, geschrieben $\varinjlim_{n \to \infty} x_n = x$, falls für jede Umgebung U von x in X gilt, daß $x_n \in U$ für $n \gg 0$.

Offensichtlich reicht es aus, sich auf Umgebungen einer Umgebungsbasis von x zu beschränken.

Proposition B.20. *Sei X ein Hausdorffraum. Dann besitzt eine Folge höchstens einen Grenzwert.* □

Definition B.21. Seien X, Y zwei topologische Räume. Eine Abbildung $f \colon X \to Y$ heißt *stetig*, falls für alle offenen Teilmengen V von Y das Urbild $f^{-1}(U)$ in X offen ist.

Eine bijektive stetige Abbildung zwischen topologischen Räumen, deren Umkehrung auch stetig ist, heißt *Homöomorphismus*.

Beispiel B.22. Sei X eine Menge. Sei Y ein topologischer Raum. Versehen wir X mit der diskreten Topologie, so ist jede Abbildung $f \colon X \to Y$ stetig.

Beispiel B.23. Sei Y ein topologischer Raum. Sei Z eine Teilmenge von Y. Dann ist eine Abbildung $f \colon X \to Z$ von einem weiteren topologischen Raum X genau dann stetig, wenn f als Abbildung nach Y stetig ist.

Definition B.24. Sei X ein topologischer Raum. Sei $p \colon X \to Y$ eine surjektive Abbildung in eine Menge Y. Die Menge derjenigen Teilmengen V von Y, so daß $f^{-1}(V)$ offen in X ist, ist eine Topologie auf Y, die *Quotiententopologie bezüglich p*.

Beispiel B.25. Sei X ein topologischer Raum. Sei $p \colon X \to Y$ eine surjektive Abbildung in eine Menge Y, die wir diesbezüglich mit der Quotiententopologie versehen. Dann ist eine Abbildung $f \colon Y \to Z$ in einen weiteren topologischen Raum Z genau dann stetig, wenn $f \circ p \colon X \to Z$ stetig ist.

Proposition B.26. *Ist A eine beliebige Teilmenge eines topologischen Raumes X, so existiert eine kleinste Teilmenge $\overline{A} \supset A$ von X, welche abgeschlossen ist, der* topologische Abschluß von A. □

Definition B.27. Eine Teilmenge A eines topologischen Raumes X heißt *dicht in X*, falls für den topologischen Abschluß $\overline{A} = X$ gilt.

C. Grundlagen aus der Einführung in die Algebra

C.1. Körper

Definition C.1. Die *Charakteristik* $\operatorname{char} K$ eines Körpers K ist die kleinste positive Zahl $p \in \mathbb{N}$ mit $p \cdot 1 = 0 \in K$ oder 0, wenn kein solches p existiert.

Beispiel C.2. Der Körper $\mathbb{Q}$ der rationalen Zahlen ist ein Körper der Charakteristik 0.

Proposition C.3. *Die Charakteristik eines Körpers ist entweder* 0 *oder eine Primzahl.*

C.2. Algebraische Erweiterungen

Definition C.4. Ein Körper K heißt *algebraisch abgeschlossen*, falls jedes normierte Polynom $f \in K[x]$ vollständig in Linearfaktoren zerfällt, falls also $x_1, \ldots, x_n \in K$ mit $f = (x - x_1) \cdots (x - x_n)$ existieren.

Diese Definition ist gleichbedeutend damit, daß jedes Polynom über K mindestens eine Nullstelle besitzt.

Beispiel C.5. Der Körper $\mathbb{C}$ der komplexen Zahlen ist algebraisch abgeschlossen.

Definition C.6. Sei $K \subset L$ eine Körpererweiterung.

1. Ein Element $x \in L$ heißt *algebraisch über* K, falls es einer Gleichung der Form $x^n + a_1 x^{n+1} + \cdots + a_n$ mit $a_i \in K$ genügt.

2. Ein Element $x \in L$ heißt *transzendent über* K, falls es nicht algebraisch ist.

3. Die Körpererweiterung $K \subset L$ heißt *algebraisch*, falls jedes Element von L algebraisch über K ist.

Definition C.7. Eine Körpererweiterung $K \subset L$ heißt *endlich*, falls L als K-Vektorraum endlich-dimensional ist. Die Zahl $[L : K] \coloneqq \dim_K L$ heißt der *Grad der Körpererweiterung.*

Beispiel C.8. Jede endliche Körpererweiterung ist algebraisch.

Beispiel C.9. Sei $K \subset L$ eine Körpererweiterung. Für ein $x \in L$ bezeichne $K(x)$ den kleinsten Zwischenkörper von $K \subset L$, welcher x enthält. Dann ist $K \subset K(x)$ genau dann eine endliche Körpererweiterung, wenn x algebraisch über K ist.

Definition C.10. Sei $K \subset L$ eine Körpererweiterung. Ist $x \in L$ algebraisch über K, so heißt das normierte Polynom $m \in K[x]$ minimalen Grades mit $m(x) = 0 \in L$ das *Minimalpolynom von x über K.*

Definition C.11. Sei $K \subset L$ eine Körpererweiterung. Zerfällt ein Polynom $f \in K[x]$ über L vollständig in Linearfaktoren, so heißt L ein *Zerfällungskörper von K.*

Satz C.12. *Sei K ein Körper. Dann existiert eine algebraische Körpererweiterung $K \subset L$, so daß L ein algebraisch abgeschlossener Körper ist. Insbesondere ist L ein Zerfällungskörper für jedes Polynom über K.*

Der Körper L heißt ein *algebraischer Abschluß von K*.

Satz C.13. *Sei $K \subset K'$ eine algebraische Körpererweiterung. Sei $\phi\colon K \to L$ ein Körperhomomorphismus in einen algebraisch abgeschlossenen Körper L.*

1. *Der Homomorphismus ϕ läßt sich zu einem Körperhomomorphismus $K' \to L$ fortsetzen.*
2. *Die Anzahl $[K' : K]_{\mathrm{s}}$ der möglichen Fortsetzungen hängt nur von der Körpererweiterung $K \subset K'$ ab und heißt ihr* Separabilitätsgrad.
3. *Es gilt $[K' : K]_{\mathrm{s}} \leq [K' : K]$. Insbesondere ist der Separabilitsgrad einer endlichen Körpererweiterung endlich.*

Definition C.14. Eine endliche Körpererweiterung $K \subset K'$ heißt *separabel*, falls $[K' : K]_{\mathrm{s}} = [K' : K]$.

Proposition C.15. *Ist K ein Körper der Charakteristik Null, so ist jede endliche Körpererweiterung $K \subset K'$ separabel.*

C.3. Galoissche Theorie

Definition C.16. Sei $K \subset L$ eine endliche Körpererweiterung. Ist $x \in L$, so bezeichnen wir mit $\phi_x\colon L \to L, y \mapsto xy$ den durch Multiplikation mit x induzierten Endomorphismus des K-Vektorraumes L.

Seine Spur $\mathrm{tr}_K\, \phi_x$ heißt die *Spur* $\mathrm{tr}_{L/K}(x)$ *von x in der Körpererweiterung $K \subset L$.*

Proposition C.17. *Sei $K \subset L$ eine endliche Körpererweiterung.*

1. *Die Spur $\mathrm{tr}_{L/K}\colon L \to K$ ist eine K-lineare Abbildung.*
2. *Sei $x \in L$ mit Minimalpolynom $x^n + a_1 x^{n-1} + \cdots + a_n$ über K. Dann ist $\mathrm{tr}_{L/K}(x) = -[L : K(x)] \cdot a_1$, insbesondere also ein Vielfaches eines Koeffizienten des Minimalpolynomes.*

Satz C.18. *Sei $K \subset L$ eine separable endliche Körpererweiterung. Dann ist die Bilinearform*

$$L \times L \to K, (x, y) \mapsto \mathrm{tr}_{L/K}(xy)$$

auf L über K nicht ausgeartet.

Folgerung C.19. *Ist $K \subset L$ eine separable endliche Körpererweiterung, und ist $(x_1, \ldots, x_n)$ eine Basis von L über K, so existiert genau eine Basis $(y_1, \ldots, y_n)$ von L über K mit $\mathrm{tr}_{L/K}(x_i y_j) = \delta_{ij}$.*

C.4. Transzendente Erweiterungen

Definition C.20. Sei $K \subset L$ eine Körpererweiterung. Eine Familie $(x_i)_{i\in I}$ von Elementen in L heißt *algebraisch unabhängig*, wenn für je endlich viele Elemente $x_{i_1}, \ldots, x_{i_n}$ der Folge und $f \in K[t_1, \ldots, t_n]$ mit $f(x_{i_1}, \ldots, x_{i_n}) = 0$ schon $f = 0$ folgt.

Bemerkung C.21. Sei $K \subset L$ eine Körpererweiterung. Eine Familie $(x_i)_{i\in I}$ von Elementen in L ist also genau dann algebraisch unabhängig, wenn der Ringhomomorphismus $K[(t_i)] \to L, t_i \mapsto x_i$ injektiv ist.

Definition C.22. Sei $K \subset L$ eine Körpererweiterung. Eine *Transzendenzbasis von L über K* ist eine maximale Familie algebraisch unabhängiger Elemente.

Bemerkung C.23. Sei $K \subset L$ eine Körpererweiterung. Dann ist $(x_i)_{i\in I}$ genau dann eine Transzendenzbasis von L über K, wenn $K((t_i)) \to L, t_i \mapsto x_i$ eine wohldefinierte algebraische Körpererweiterung ist.

Proposition C.24. *Sei $K \subset L$ eine Körpererweiterung. Dann besitzt L eine Transzendenzbasis über K und je zwei Transzendenzbasen haben dieselbe Mächtigkeit.*

Definition C.25. Sei $K \subset L$ eine Körpererweiterung. Der *Transzendenzgrad* $\operatorname{trdeg}_K L$ *von L über K* ist die Mächtigkeit einer Transzendenzbasis von L über K.

Beispiel C.26. Eine Körpererweiterung $K \subset L$ ist genau dann algebraisch, wenn der Transzendenzgrad von L über K gleich 0 ist.