Universität Augsburg
Lehrstuhl für Algebra und Zahlentheorie
Wintersemester 2015/2016

Prof. Marc Nieper-Wißkirchen
Ingo Blechschmidt

Übungsblatt 7 zur Kommutativen Algebra

Aufgabe 1. (4) *Ein konkretes Beispiel zur Noether-Normalisierung*

Sei K ein Körper. Gib eine Zahl $r \geq 0$ und einen endlichen, injektiven K-Algebren-Homomorphismus $K[Y_1, \ldots, Y_r] \to K[A, B]/(AB - 1)$ an.

Aufgabe 2. (3) *Oberringe von Bewertungsringen*

Sei A ein Bewertungsring mit Quotientenkörper K. Sei $A \subseteq B \subseteq K$ eine Zwischenerweiterung. Finde ein Primideal $\mathfrak{p}$ von A mit $B \cong A_\mathfrak{p}$.

Aufgabe 3. (m) *Noether-Normalisierung für Integritätsbereiche*

Sei $A \subseteq B$ eine Erweiterung von Integritätsbereichen. Sei B als A-Algebra endlich erzeugt. Zeige, dass ein Element $s \in A \setminus \{0\}$ und eine A-Algebra $B' \subseteq B$ mit $B' \cong A[Y_1, \ldots, Y_n]$ existieren, sodass $B[s^{-1}]$ ganz über $B'[s^{-1}]$ ist.

Aufgabe 4. (2) *Matrizen über Bewertungsringen*

Sei M eine Matrix über einem Bewertungsring. Zeige, dass M äquivalent zu einer (rechteckigen) Diagonalmatrix ist.

Aufgabe 5. (3+m) *Geschenkte Bijektivität*

Sei $\varphi : M \to M$ ein Endomorphismus eines Moduls M. Zeige:

a) Ist φ surjektiv und M noethersch, so ist φ bijektiv.

b) Ist φ injektiv und M artinsch, so ist φ bijektiv.

Aufgabe 6. (m+3+2) *Endlichkeit minimaler Primideale*

a) Sei A ein Ring, in dem das Nilradikal Schnitt endlich vieler Primideale ist. Zeige, dass A nur endlich viele minimale Primideale besitzt.

b) Zeige: Das Nilradikal eines artinschen Rings ist endlicher Schnitt von Primidealen.

c) Zeige die Behauptung aus b) auch für noethersche Ringe.

Tipp. Führe die Betrachtung eines Wurzelideals, das maximal mit der Eigenschaft ist, nicht endlicher Schnitt von Primidealen zu sein, (wieso existiert ein solches?) zu einem Widerspruch. Oder verwende das Induktionsprinzip vom nächsten Blatt, um allgemeiner zu zeigen, dass für jedes Ideal $\mathfrak{a}$ das Ideal $\sqrt{\mathfrak{a}}$ endlicher Schnitt von Primidealen ist.

Frisch von Topos à l'IHÉS in Bures-sur-Yvette:

Let $\mathcal{C}$ be a category. Let $X, Y \in \mathcal{C}$ be objects. Assume that the induced representable presheaves $\mathrm{Hom}(\cdot, X)$ and $\mathrm{Hom}(\cdot, Y)$ are naturally isomorphic. Then how do you prove that X and Y are themselves isomorphic? Yo ned a lemma for that.