

Übungsblatt 13 zur Kommutativen Algebra

Aufgabe 1. (m+2) Ein Erstsemestertraum wird wahr

Sei ein Ring A mit der adischen Topologie bezüglich einem Ideal \mathfrak{a} versehen. Sei $(x_n)_n$ eine Folge in A . Sei $s_n = \sum_{k=0}^n x_k$. Zeige: Genau dann ist $(s_n)_n$ eine Cauchy-Folge, wenn $(x_n)_n$ eine Nullfolge ist.

Aufgabe 2. (3) Abgeschlossenheit maximaler Ideale

Sei \mathfrak{a} ein Ideal in einem Ring A . Zeige, dass ein maximales Ideal \mathfrak{m} von A genau dann abgeschlossen bezüglich der \mathfrak{a} -adischen Topologie auf A ist, wenn $\mathfrak{a} \subseteq \mathfrak{m}$.

Aufgabe 3. (m) Vervollständigung an maximalen Idealen

Sei \mathfrak{m} ein maximales Ideal in einem Ring A . Zeige, dass die Vervollständigung von A bezüglich der \mathfrak{m} -adischen Topologie ein lokaler Ring ist.

Aufgabe 4. (2+m) Analytische Umgebungen

Sei K ein Körper mit $2 \neq 0$.

- Zeige: $K[\![X, Y]\!]/(Y^2 - X^2) \cong K[\![X, Y]\!]/(Y^2 - X^2 - X^3)$.
- Zeige: $K[X, Y]/(Y^2 - X^2) \not\cong K[X, Y]/(Y^2 - X^2 - X^3)$.

Aufgabe 5. (2+2) Nichtexaktheit der inversen Limesbildung

Das Diagramm zeigt in seinen drei Spalten drei inverse Systeme A_\bullet , B_\bullet und C_\bullet und horizontal die Komponenten einer kurzen exakten Sequenz $0 \rightarrow A_\bullet \rightarrow B_\bullet \rightarrow C_\bullet \rightarrow 0$.

- Bestimme die inversen Limiten der drei Systeme.
- Ist $\varprojlim_n^1 A_n = 0$? Beschreibe $\varprojlim_n^1 A_n$ so gut wie möglich!

$$\begin{array}{ccccccc}
 & \vdots & \vdots & & \vdots & & \\
 & p \downarrow & & id \downarrow & & & \\
 0 & \longrightarrow & \mathbb{Z} & \xrightarrow{p^3} & \mathbb{Z} & \longrightarrow & \mathbb{Z}/(p^3) \longrightarrow 0 \\
 & p \downarrow & & id \downarrow & & & \\
 0 & \longrightarrow & \mathbb{Z} & \xrightarrow{p^2} & \mathbb{Z} & \longrightarrow & \mathbb{Z}/(p^2) \longrightarrow 0 \\
 & p \downarrow & & id \downarrow & & & \\
 0 & \longrightarrow & \mathbb{Z} & \xrightarrow{p} & \mathbb{Z} & \longrightarrow & \mathbb{Z}/(p) \longrightarrow 0
 \end{array}$$

Aufgabe 6. (0) Die 10-adischen Zahlen

Finde ein Element $x \in \mathbb{Z}_{10}$, das weder Null noch Eins ist, aber trotzdem die Identität $x^2 = x$ erfüllt. Kann ein Grundschulkind die ersten paar Ziffern von x bestimmen?

