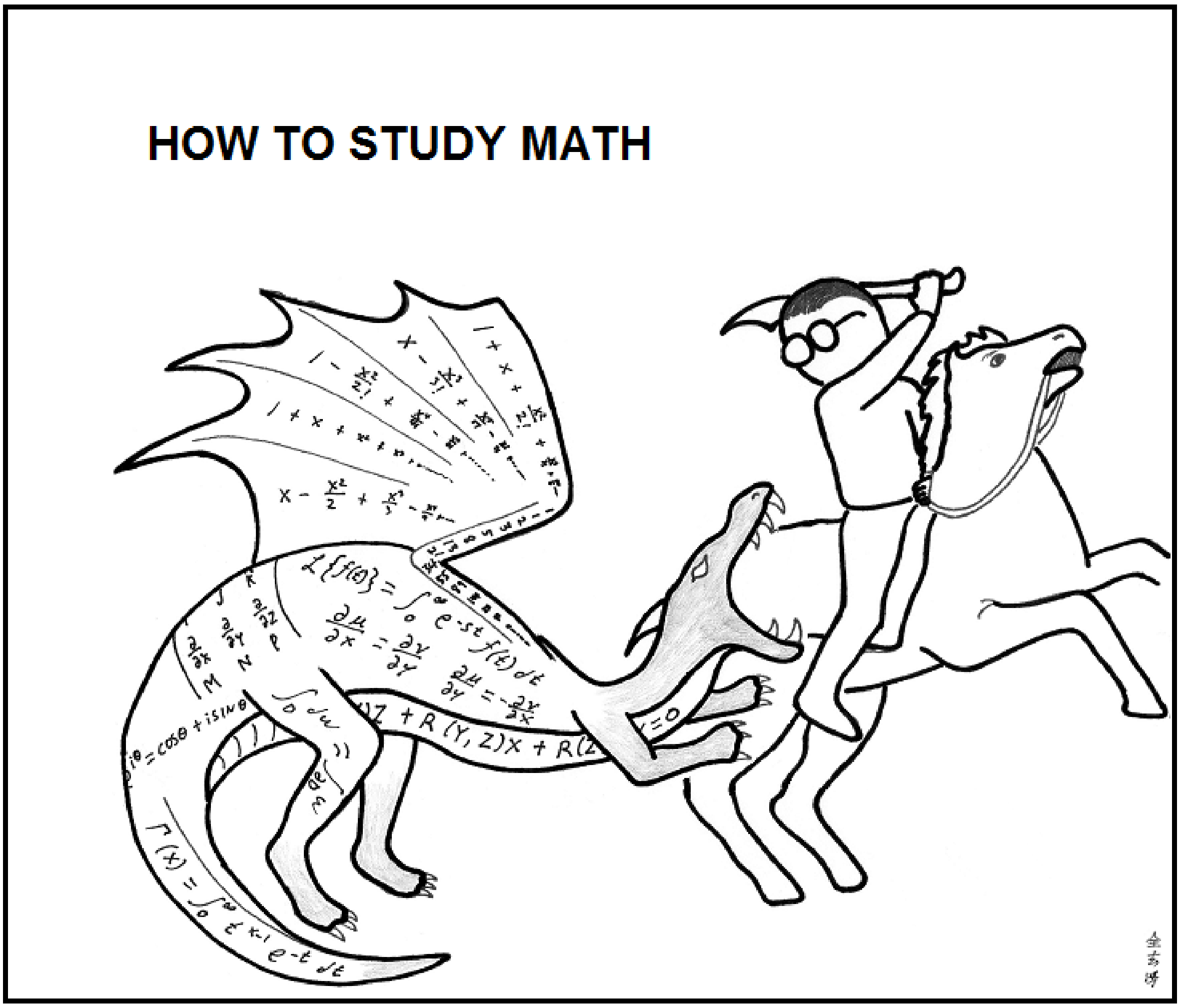

Don't just read it; fight it!

--- Paul R. Halmos

[0]Comic: `http://abstrusegoose.com/353`

Beweistechniken

Bis man zum eigentlichen Kern eines mathematischen Problems vordringt, muss man im Allgemeinen mehrere Definitionen entfalten. Das gelingt meist mit der Technik des direkten Beweisens („immer der Nase nach“).

Beispiel: Seien $f : X \to Y$ und $g : Y \to Z$ zwei Abbildungen. Wir wollen zeigen:

$$f \text{ injektiv} \wedge g \text{ injektiv} \implies g \circ f \text{ injektiv}.$$

Mit den unten beschriebenen Vorlagen lautet ein sehr ausführlicher Beweis wie folgt:

> Gelte, dass f und g injektiv sind. Um dann die Injektivität von $g \circ f$ zu zeigen, seien $x, \tilde{x} \in X$ beliebig und gelte $(g \circ f)(x) = (g \circ f)(\tilde{x})$. Nach Definition der Abbildungsverkettung gilt also
>
> $$g(f(x)) = g(f(\tilde{x})).$$
>
> Da g injektiv ist, folgt daraus
>
> $$f(x) = f(\tilde{x}).$$
>
> Da auch f injektiv ist, folgt daraus wiederum
>
> $$x = \tilde{x}.$$
>
> Das war zu zeigen.

Der Kern der Argumentation liegt in den Folgerungen zwischen den drei abgesetzten Gleichungen, der Vorbau ist aber trotzdem wichtig; insbesondere ist es wichtig, die Variablen x und $\tilde{x}$ richtig einzuführen. Setzt man Vertrautheit des Lesers mit den Voraussetzungen der Angabenstellung voraus, kann man den Beweis etwas kürzer auch so formulieren:

> Seien $x, \tilde{x} \in X$ beliebig mit $(g \circ f)(x) = (g \circ f)(\tilde{x})$. Dann folgt:
>
> $$g(f(x)) = g(f(\tilde{x})) \overset{g \text{ inj.}}{\implies} f(x) = f(\tilde{x}) \overset{f \text{ inj.}}{\implies} x = \tilde{x},$$
>
> das war zu zeigen.

Mathematische Beweise sind in erster Linie (deutsche, englische, …) *Texte*. Natürlich kommen in Beweisen Formeln durchaus vor, aber von der äußeren Struktur her muss ein Beweis eine logisch schlüssige Argumentation sein. Daher ist folgender Beweisversuch ungenügend:

$$g(f(x)) = g(f(\tilde{x})) \qquad f(x) = f(\tilde{x}) \qquad x = \tilde{x}$$

Direkter Beweis

- Um $A \wedge B$ direkt zu zeigen, muss man sowohl A als auch B zeigen.

  Vorlage: Da …, gilt A. Da außerdem …, gilt auch B.

- Um $A \vee B$ direkt zu zeigen, muss man zeigen, dass A oder B (oder beide – das sagt man selten dazu) gelten. Meistens muss man dazu eine Fallunterscheidung führen.

  Vorlage: Wegen … können nur folgende Fälle eintreten:
  Fall 1: Wegen … gilt dann A.
  Fall 2: Wegen … gilt dann B.

- Um $\neg A$ direkt zu zeigen, zeigt man, dass die Annahme, dass A doch stimmt, zu einem Widerspruch führt.

  Vorlage: Angenommen, es gilt doch A. Dann …, das kann nicht sein.

- Um $A \Rightarrow B$ direkt zu zeigen, setzt man die Gültigkeit von A voraus und zeigt dann B. Ob A tatsächlich stimmt, ist für die Argumentation nicht relevant, es geht nur um die hypothetische Schlussfolgerung.

  Vorlage: Gelte A. Dann …, daher gilt B.

- Um $A \Leftrightarrow B$ direkt zu zeigen, zeigt man $A \Rightarrow B$ (die sog. Hinrichtung) und $B \Rightarrow A$ (die sog. Rückrichtung). Ob dabei A und B tatsächlich stimmen, ist nicht relevant.

  Vorlage: „$\Rightarrow$“: Gelte A. Dann …, daher gilt B.
  „$\Leftarrow$“: Gelte B. Dann …, daher gilt A.

  Manchmal sind die Beweise der beiden Richtungen so ähnlich, dass man sie zu einem zusammenfassen kann:

  Vorlage: A gilt genau dann, wenn …; das ist genau dann der Fall, wenn …; …; das ist genau dann der Fall, wenn B gilt.

  Oder kürzer notiert:

  Vorlage: $A \Leftrightarrow \ldots \Leftrightarrow \ldots \Leftrightarrow \ldots \Leftrightarrow \ldots \Leftrightarrow B$

- Um $\forall x \in X \colon A(x)$ direkt zu zeigen, zeigt man, dass für jedes $x \in X$ jeweils die Aussage $A(x)$ gilt. Das macht man durch ein einziges, einheitliches Argument.

  Vorlage: Sei $x \in X$ beliebig. Da …, gilt $A(x)$.

  Der bei den Auslassungspunkten auszuführende Beweis darf dabei von x nur voraussetzen, dass es ein Element der Menge X ist: Der Beweis muss mit jedem $x \in X$ zurechtkommen.

- Um $\exists x \in X \colon A(x)$ direkt zu zeigen, gibt man explizit ein $x \in X$ an, für das $A(x)$ gilt.

  Vorlage: Setze $x :=$ …. Dann liegt x in der Tat in X, denn …; und wegen … gilt $A(x)$.

- Um $X \subseteq Y$ direkt zu zeigen, wobei X und Y Mengen sind, zeigt man, dass jedes Element von X auch in Y liegt.

  Vorlage: Sei $x \in X$ beliebig. Dann ..., daher gilt $x \in Y$.

- Um $X = Y$ direkt zu zeigen, zeigt man $X \subseteq Y$ und $Y \subseteq X$.

  Vorlage: „$\subseteq$“: Sei $x \in X$ beliebig. Dann ..., daher gilt $x \in Y$.
  „$\supseteq$“: Sei $y \in Y$ beliebig. Dann ..., daher gilt $y \in X$.

  Manchmal kann man die beiden Teilbeweise auch zu einem kombinieren.

- Um $f = g$ direkt zu zeigen, wobei f und g beides Abbildungen $X \to Y$ sind (also dieselbe Definitions- und Zielmenge haben), zeigt man, dass die beiden Funktionen an allen Stellen ihres Definitionsbereichs übereinstimmen.

  Vorlage: Sei $x \in X$ beliebig. Dann ..., daher gilt $f(x) = g(x)$.

Beweis durch Widerspruch

Um eine Aussage A zu zeigen, kann man auch zeigen, dass die Annahme von $\neg A$ zu einem Widerspruch führt.

Vorlage: Angenommen, A wäre falsch. Dann ..., das kann nicht sein.

Beweis durch Kontraposition

Um eine Implikation der Form $A \Rightarrow B$ zu zeigen, kann man auch $\neg B \Rightarrow \neg A$ zeigen, d. h. unter der Voraussetzung von $\neg B$ einen Beweis von $\neg A$ führen. Das ist häufig dann hilfreich, wenn A und B selbst negierte Aussagen sind.

Beispiel: Wenn man sich direkt an einem Beweis der Implikation

$$k \text{ ist undorig} \implies k \text{ ist unfoberant}$$

versucht, wird man durch die vielen Verneinungen vielleicht verwirrt. Möglicherweise ist es daher einfacher, die Kontraposition

$$k \text{ ist foberant} \implies k \text{ ist dorig}$$

zu zeigen.