Crashkurs: Konstruktive Mathematik

Begriffe

Konstruktive Mathematik ist der Oberbegriff. *Intuitionistische Logik* ist die zugrundeliegende Logik, die die meisten Mathematiker einsetzen, wenn sie formal konstruktive Mathematik betreiben wollen.

Bedeutung logischer Aussagen

Bei intuitionistischer Logik verwendet man dieselbe formale Sprache wie bei klassischer Logik ($\wedge, \vee, \Rightarrow, \neg, \forall, \exists$), aber mit anderen Bedeutungen:

	klassische Logik	intuitionistische Logik
Aussage φ	Die Aussage φ gilt.	Wir haben Beleg für φ.
$\bot$	Es stimmt Falschheit.	Wir haben Beleg für Falschheit.
$\varphi \wedge \psi$	φ und ψ stimmen.	Wir haben Beleg für φ und für ψ.
$\varphi \vee \psi$	φ oder ψ stimmt.	Wir haben Beleg für φ oder für ψ.
$\varphi \Rightarrow \psi$	Sollte φ stimmen, dann auch ψ.	Aus Belegen für φ können wir Belege für ψ konstruieren.
$\neg\varphi :\equiv (\varphi \Rightarrow \bot)$	φ stimmt nicht.	Es kann keinen Beleg für φ geben.
$\forall x \in X\colon \varphi(x)$	Für alle $x \in X$ stimmt jeweils $\varphi(x)$.	Wir können (gleichmäßig) für alle $x \in X$ Belege für $\varphi(x)$ konstruieren.
$\exists x \in X\colon \varphi(x)$	Es gibt mindestens ein $x \in X$, für das $\varphi(x)$ stimmt.	Wir haben ein $x \in X$ zusammen mit Beleg für $\varphi(x)$.
$\varphi \vee \neg\varphi$	φ stimmt oder stimmt nicht.	Wir haben Beleg für φ oder für $\neg\varphi$.

Schlussregeln intuitionistischer Logik

Intuitionistisch verwenden wir dieselben Schlussregeln wie in klassischer Logik, mit einer Ausnahme: Auf das *Prinzip vom ausgeschlossenen Dritten*, demnach man für jede Aussage φ

$$\varphi \vee \neg\varphi$$

voraussetzen darf, verzichten wir, denn es ist die Quelle nicht-konstruktiver Beweise. Das heißt aber nicht, dass wir sein Gegenteil $\neg(\varphi \vee \neg\varphi)$ als Axiom verwenden! Außerdem verzichten wir auf das Auswahlaxiom (denn zusammen mit den übrigen Schlussregeln folgt aus ihm das Prinzip vom ausgeschlossenen Dritten). Intuitionistische Logik ist also abwärtskompatibel zu klassischer Logik.

Für manche spezielle Aussagen φ gilt das Prinzip vom ausgeschlossenen Dritten aber doch: Etwa hat man

$$\forall x, y \in \mathbb{N}\colon x = y \vee x \neq y \qquad \text{und} \qquad \forall x, y \in \overline{\mathbb{Q}}\colon x = y \vee x \neq y,$$

aber nicht

$$\forall x, y \in \mathbb{C}\colon x = y \vee x \neq y.$$

Die erste Aussage zeigt man durch Induktion, die zweite ist Gegenstand der (nichttrivialen) Proposition 1.6 im Buch.

Widerspruchsbeweise

Äquivalent zum Prinzip vom ausgeschlossenen Dritten ist das *Prinzip der Doppelnegationselimination*, demnach man für jede Aussage φ

$$\neg\neg\varphi \Longrightarrow \varphi$$

voraussetzen darf. Da wir also auf dieses Prinzip ebenfalls verzichten, darf man nicht mehr nach Belieben „nicht nicht"s streichen und muss Behauptungen und Argumente etwas präziser formulieren. (Die Umkehrung $\varphi \Rightarrow \neg\neg\varphi$ gilt schon und lässt sich leicht zeigen.)

Da man das Prinzip der Doppelnegationselimination benötigt, um Widerspruchsbeweise führen zu können, sind diese intuitionistisch nicht zulässig. Von dieser Beschränkung unbetroffen sind Beweise negierter Aussagen (siehe Beispiel 1); dabei handelt es sich aber nicht um Widerspruchsbeweise im eigentlichen Sinn.

Sinn und Zweck

- Intuitionistische Logik macht Spaß! Auch grundlegende Theorien (lineare Algebra, kommutative Algebra usw.) erhalten neue Tiefe.
- Mit intuitionistischer Logik kann man Belegbarkeitsfragen untersuchen.
- Intuitionistische Logik hilft einen, Beweise und Theorien eleganter zu formulieren.
- Nur mit intuitionistischer Logik kann man durch Hinzunahme klassisch verletzter, aber trotzdem motivierbarer Axiome *Traummathematik* betreiben. Beispiele:
  - *Alle Funktionen* $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *sind stetig.*
  - *Es gibt nilquadratische Zahlen* $x \in \mathbb{R}$ *(Zahlen mit* $x^2 = 0$*), die selbst nicht null sind.*
- Aus jedem intuitionistischen Beweis einer Existenzbehauptung kann man maschinell ein *Programm* extrahieren, das in endlicher Zeit das behauptete Objekt findet bzw. konstruiert. Das ist in der Informatik nützlich.

  Auch unsere Studenten können einen Vorteil daraus ziehen: Jeden Beweis der Vorlesung kann man explizit an Beispielen nachvollziehen.
- Wenn man normal Mathematik betreibt, betreibt man tatsächlich Mathematik im *Topos der Mengen*. Es gibt aber auch andere Topoi, in denen man arbeiten möchte (das ist etwa für die algebraische Geometrie wichtig); deren interne logische Sprache ist nur sehr selten klassisch, aber immer intuitionistisch.

Zwei Beispiele

Proposition 1. *Die Zahl* $\sqrt{2}$ *ist nicht rational.*

Beweis (intuitionistisch unzulässig). Angenommen, die Behauptung, $\sqrt{2}$ sei irrational, wäre falsch. Nach dem Prinzip der Doppelnegationselimination wäre $\sqrt{2}$ dann rational, also gäbe es ganze Zahlen $p, q > 0$ mit $\sqrt{2} = p/q$. ...... Das ist ein Widerspruch. □

Beweis (intuitionistisch einwandfrei). Angenommen, $\sqrt{2}$ wäre rational. Dann gäbe es ganze Zahlen $p, q > 0$ mit $\sqrt{2} = p/q$. ...... Das ist ein Widerspruch. □

Proposition 2. *Es gibt irrationale Zahlen* x *und* y*, sodass* x^y *rational ist.*

Beweis (intuitionistisch unzulässig). Es ist $\sqrt{2}^{\sqrt{2}}$ rational oder irrational. Setze

$$\begin{array}{lll} \text{im ersten Fall:} & x := \sqrt{2}, & y := \sqrt{2}, \\ \text{im zweiten Fall:} & x := \sqrt{2}^{\sqrt{2}}, & y := \sqrt{2}. \end{array}$$ □

Beweis (intuitionistisch einwandfrei). Setze $x := \sqrt{2}$, $y := \log_{\sqrt{2}} 3$. Dann ist $x^y = 3$. □