Beispielberechnung einer Galoisgruppe

Wir wollen die Galoisgruppe der Nullstellen des Polynoms

$$f(X) = X^4 - 1 \in \mathbb{Q}[X]$$

bestimmen.

1. Die vier Nullstellen sind

$$x_1 = 1, \quad x_2 = \mathrm{i}, \quad x_3 = -1, \quad x_4 = -\mathrm{i}.$$

2. Es gilt

$$\mathbb{Q}(x_1, x_2, x_3, x_4) = \mathbb{Q}(1, \mathrm{i}, -1, -\mathrm{i}) = \mathbb{Q}(\mathrm{i}, -\mathrm{i}) = \mathbb{Q}(\mathrm{i}),$$

also ist $t := \mathrm{i}$ ein primitives Element.

3. Wir müssen die Nullstellen als polynomielle Ausdrücke in t mit rationalen Koeffizienten schreiben: Für die vier Nullstellen gilt jeweils $x_i = h_i(t)$, wobei

$$\begin{aligned} h_1(X) &= 1, \\ h_2(X) &= X, \\ h_3(X) &= -1, \\ h_4(X) &= -X. \end{aligned}$$

Nicht zulässig wäre beispielsweise die Setzung $h_2(X) = \mathrm{i}$ gewesen (wieso?). Eine korrekte, aber unnötig komplizierte, Alternative ist $h_2(X) = X + X^2 + 1$ (wieso?).

4. Das Minimalpolynom von t ist bekanntermaßen $X^2 + 1$: Denn dieses Polynom ist normiert, hat nur rationale Koeffizienten, besitzt t als Nullstelle und ist irreduzibel (es ist vom Grad 2 und seine Nullstellen sind nicht rational).

5. Die zwei galoissch Konjugierten von t (die Nullstellen seines Minimalpolynoms) sind

$$t_1 = \mathrm{i}, \quad t_2 = -\mathrm{i}.$$

6. Damit können wir die Elemente der Galoisgruppe auflisten:

t_i	$h_1(t_i)$	$h_2(t_i)$	$h_3(t_i)$	$h_4(t_i)$	σ_i
t_1	x_1	x_2	x_3	x_4	$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix} = \mathrm{id}$
t_2	x_1	x_4	x_3	x_2	$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 3 & 2 \end{pmatrix} = (2, 4)$

Es gilt also

$$\mathrm{Gal}_{\mathbb{Q}}(x_1, x_2, x_3, x_4) = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 3 & 2 \end{pmatrix} \right\} = \{\mathrm{id},\ (2, 4)\}.$$