Wichtige Isomorphismen von Ringen

$$R/(0) \cong R \tag{1}$$
$$R/(1) \cong 0 \text{ (Nullring)} \tag{2}$$
$$R/(x,y) \cong (R/(x))\,/\,([y]) \tag{3}$$
$$(R/\mathfrak{a})[X] \cong R[X]\,/\,\mathfrak{a}[X] \tag{4}$$
$$R[X]/(X-a) \cong R \tag{5}$$

Ist außerdem $L \supseteq K$ eine Körpererweiterung und $u \in L$ ein über K algebraisches Element mit Minimalpolynom $m \in K[X]$, so gilt:

$$K(u) = K[u] \cong K[X]/(m) \tag{6}$$

Schließlich gibt es noch den chinesischen Restsatz: Sind $\mathfrak{a}, \mathfrak{b} \subseteq R$ Ideale mit $\mathfrak{a} + \mathfrak{b} = (1)$, so gilt $\mathfrak{a}\mathfrak{b} = \mathfrak{a} \cap \mathfrak{b}$ und

$$R/(\mathfrak{a}\mathfrak{b}) \cong R/\mathfrak{a} \times R/\mathfrak{b} \tag{7}$$

Anwendung: Primalitäts- und Maximalitätsuntersuchung

Diese Rechenregeln sind in Kombination mit dem Satz

> Ein Ideal $\mathfrak{a}$ eines Rings R ist genau dann ein Primideal (bzw. ein maximales Ideal), wenn der Faktorring $R/\mathfrak{a}$ ein Integritätsbereich (bzw. ein Körper) ist.

nützlich, um ein gegebenes Ideal auf Primalität und Maximalität zu untersuchen.

Beispiele

– Das Ideal $(5, X-3) \subseteq \mathbb{Z}[X]$ ist maximal, denn

$$\mathbb{Z}[X]/(5, X-3) \overset{(3)}{\cong} (\mathbb{Z}/(5))[X]\,/\,(X-[3]) \overset{(5)}{\cong} \mathbb{Z}/(5)$$

ist ein Körper.

– Das Ideal $(X^2, X-3) \subseteq \mathbb{Z}[X]$ ist weder prim noch maximal, denn

$$\mathbb{Z}[X]/(X^2, X-3) \;=\; \mathbb{Z}[X]/(3^2, X-3) \overset{(3)}{\cong} (\mathbb{Z}/(9))[X]\,/\,(X-[3]) \overset{(5)}{\cong} \mathbb{Z}/(9)$$

ist weder ein Integritätsbereich noch ein Körper.

– Das Ideal $(X^2+1) \subseteq \mathbb{R}[X]$ ist maximal, denn

$$\mathbb{R}[X]/(X^2+1) \overset{(6)}{\cong} \mathbb{R}(i) = \mathbb{C}$$

ist ein Körper (von rechts nach links lesen!).

– Das Ideal $(X^2-1) = (X+1)\cdot(X-1) \subseteq \mathbb{R}[X]$ ist weder maximal noch prim, denn

$$\mathbb{R}[X]/(X^2-1) \overset{(7)}{\cong} \mathbb{R}[X]/(X+1) \times \mathbb{R}[X]/(X-1) \overset{(5)}{\cong} \mathbb{R} \times \mathbb{R}$$

ist weder ein Integritätsbereich noch ein Körper. Der chinesische Restsatz (7) war anwendbar, denn $(X+1)+(X-1) = (\mathrm{ggT}(X+1, X-1)) = (1)$.