Verfeinerungen von Zerlegungen der Eins

Sei R ein kommutativer Ring und sei

$$1 = s_1 + \cdots + s_n$$

eine Zerlegung der Eins von R, $s_1, \ldots, s_n \in R$. Seien weiter für jeden der lokalisierten Ringe $R[s_i^{-1}]$ Zerlegungen

$$1 = t_{i,1} + \cdots + t_{i,m_i}$$

der Eins von $R[s_i^{-1}]$ gegeben, $t_{i,1}, \ldots, t_{i,m_i} \in R[s_i^{-1}]$.

Behauptung. *Dann gibt es eine Zerlegung*

$$1 = u_1 + \cdots + u_N$$

von R, $u_1, \ldots, u_N \in R$ derart, dass es zu jedem der lokalisierten Ringe $R[u_j^{-1}]$ jeweils ein $i \in \{1, \ldots, n\}$ und ein $k \in \{1, \ldots, m_i\}$ gibt, sodass s_i und $t_{i,k}$ in $R[u_j^{-1}]$ invertierbar sind.

Beweis. Jedes $t_{i,k}$ hat die Form $t_{i,k} = t'_{i,k}/s_i^{\ell_{i,k}}$ für ein $t'_{i,k} \in R$ und $\ell_{i,k} \geq 0$. Ohne Einschränkung können wir davon ausgehen, dass die $\ell_{i,k}$ für alle $k \in \{1, \ldots, m_i\}$ gleich sind (nötigenfalls einfach die Brüche noch mit geeigneten Potenzen von s_i erweitern). Somit können wir $t_{i,k} = t'_{i,k}/s_i^{\ell_i}$ für ein allen k gemeinsamen Exponenten $\ell_i \geq 0$ schreiben.

Dass die $t_{i,k}$, $k = 1, \ldots, m_i$ eine Zerlegung der $1 \in R[s_i^{-1}]$ bilden, bedeutet, dass wir einen Exponenten $r_i \geq 0$ mit

$$s_i^{r_i} s_i^{\ell_i} = s_i^{r_i}(t'_{i,1} + \cdots + t'_{i,m_i})$$

finden. Sei $r := \max_{i=1,\ldots,n}(r_i + \ell_i)$. Dann können wir für alle $i \in \{1, \ldots, n\}$

$$s_i^r = t''_{i,1} + \cdots + t''_{i,m_i}$$

schreiben, wenn wir $t''_{i,k} := s_i^{r-\ell_i} t'_{i,k} \in R$ setzen.

Nach der üblichen Überlegung, wie wir sie schon mehrmals in der Vorlesung vorkam, finden wir Koeffizienten $b_1, \ldots, b_n \in R$ derart, dass

$$1 = \sum_{i=1}^{n} b_i s_i^{r+1} = \sum_{i=1}^{n} \sum_{k=1}^{m_i} b_i s_i t''_{i,k}$$

gilt. Das ist unsere gesuchte Zerlegung der Eins, denn in $R[(b_i s_i t''_{i,k})^{-1}]$ sind $b_i s_i t''_{i,k}$ und damit insbesondere s_i und $t''_{i,k}$, und damit wiederum $t_{i,k}$, invertierbar. $\square$