Aufgabe 14.5

R Ring, M Modul über R, A affiner Raum über M, $v \in M$ beliebig gegeben.

Zu zeigen: $f\colon A \to A$ mit $f(p) = v + p$ ist eine affine Abbildung.

Dazu ist zu zeigen, dass für jedes $a \in A$ die Abbildung

$$f_{\#}\colon M \to M, \quad w \mapsto f(w + a) - f(a)$$

eine lineare Abbildung ist. Also:

$f_{\#}(w) = f(w + a) - f(a) = v + (w + a) - (v + a) = (w + (v + a)) - (v + a) = w$

$f_{\#}$ ist also für alle $a \in A$ die Identitätsabbildung id_M und somit (bekannt) linear.

Damit ist gezeigt, dass f in der Tat eine affine Abbildung ist, und ihr linearer Anteil ist die Identitätsabbildung id_M auf M. (Auch war die für lineare Anteile affiner Abbildungen reservierte Bezeichnung „$f_{\#}$“ gerechtfertigt.)