Aufgabe 14.6

K diskreter Körper, V endlich-dimensionaler K-Vektorraum

U endlich-erzeugter Unterraum von V, zu zeigen: V/U ist diskret.

Seien also zwei Elemente $x, x' \in V/U$ beliebig gegeben, wir müssen zeigen, dass die Aussage $x = x'$ entscheidbar ist, d.h. dass $x = x'$ oder $x \neq x'$ gilt.

Nach Definition des Quotientenraums lassen sich x und x' als Äquivalenzklassen schreiben, d.h. $x = [v]$ und $x' = [v']$ für gewisse $v, v' \in V$.

Um zu untersuchen, ob die Aussage $x = x'$ entscheidbar ist, formen wir sie äquivalent um:

$x = x'$

$\Leftrightarrow x - x' = [v] - [v'] = [v - v'] = 0 \in V/U$

$\Leftrightarrow v - v' \sim 0 \in V$

$\Leftrightarrow v - v' - 0 = v - v' \in U$

Wir müssen also nur noch zeigen, dass die Aussage $v - v' \in U$ entscheidbar ist. Das ist aber einfach, denn nach Satz 4.6.7 besitzt U eine Basis $(b_1, \ldots, b_n)$. Nach Aufgabe 4.6.10 können wir diese dann zu einer Basis $(b_1, \ldots, b_n, b_{n+1}, \ldots, b_m)$ des gesamten Raums V erweitern.

Um nun zu entscheiden, ob die Differenz $v - v'$ in U liegt, müssen wir lediglich $v - v'$ als Linearkombination der Basisvektoren $(b_1, \ldots, b_n, b_{n+1}, \ldots, b_m)$ ausdrücken; dann sieht man: $v - v'$ liegt genau dann in U, wenn die Koeffizienten der Basisvektoren $b_{n+1}, \ldots, b_m$ alle null sind. (Welchen Wert die Koeffizienten der anderen Basisvektoren $b_1, \ldots, b_n$ haben, spielt hier keine Rolle.)

Diese letzte Aussage, ob die Koeffizienten der hinteren Basisvektoren $(b_{n+1}, \ldots, b_m)$ alle null sind, ist entscheidbar, weil der Körper K, aus dem die Koeffizienten stammen, nach Voraussetzung diskret ist.

Also ist Gleichheit in V/U entscheidbar, das war zu zeigen.