Aufgabe 17.5

Gegeben zwei Vektoren

$$\underbrace{\begin{pmatrix}1\\z\end{pmatrix}}_{=:v_1}\otimes\underbrace{\begin{pmatrix}-1\\z-1\end{pmatrix}}_{=:v_2}\qquad\text{und}\qquad\underbrace{\begin{pmatrix}2\\0\end{pmatrix}}_{=:v_3}\otimes\underbrace{\begin{pmatrix}3\\z^2\end{pmatrix}}_{=:v_4},$$

des $\mathbb{F}_7(z)$-Vektorraums $(\mathbb{F}_7(z))^2\otimes(\mathbb{F}_7(z))^2$. Diese beiden Vektoren sind zu einer Basis von $(\mathbb{F}_7(z))^2\otimes(\mathbb{F}_7(z))^2$ zu ergänzen.

Das machen wir nach Bemerkung 5.4.15: Da (v_1,v_3) und (v_2,v_4) Basen von $\mathbb{F}_7(z)^2$ sind (dazu gleich noch mehr), ist eine Basis des Tensorraums $(\mathbb{F}_7(z))^2\otimes(\mathbb{F}_7(z))^2$ durch $(v_1\otimes v_2, v_1\otimes v_4, v_3\otimes v_2, v_3\otimes v_4)$ gegeben, die gesuchte Ergänzung ist also

$$\underbrace{\begin{pmatrix}1\\z\end{pmatrix}}_{=v_1}\otimes\underbrace{\begin{pmatrix}-1\\z-1\end{pmatrix}}_{=v_2},\qquad\underbrace{\begin{pmatrix}1\\z\end{pmatrix}}_{=v_1}\otimes\underbrace{\begin{pmatrix}3\\z^2\end{pmatrix}}_{=v_4},\qquad\underbrace{\begin{pmatrix}2\\0\end{pmatrix}}_{=v_3}\otimes\underbrace{\begin{pmatrix}-1\\z-1\end{pmatrix}}_{=v_2},\qquad\underbrace{\begin{pmatrix}2\\0\end{pmatrix}}_{=v_3}\otimes\underbrace{\begin{pmatrix}3\\z^2\end{pmatrix}}_{=v_4}.$$

Zwei Anmerkungen:

– *Wieso sind (v_1,v_3) und (v_2,v_4) linear unabhängig? Hängt das nicht vom Wert von z ab?*

  Nein, man muss hier auf die Bedeutung der Variablen z aufpassen: Die Vektoren v_1, v_2 und v_4 hängen nämlich gar nicht von z ab, und mehr noch: z ist gar kein freier Parameter, sondern lediglich eine „formale Variable“.

  Das kann man daran erkennen, dass die Vektoren v_i aus dem Vektorraum $\mathbb{F}_7(z)^2$ stammen, d.h. 2-Tupel aus Brüchen von Polynomen in z sind.

  Die Situation wäre eine andere, wenn die Vektoren v_i aus $(\mathbb{F}_7)^2$ stammten: Dann ist $z\in\mathbb{F}_7$ ein Parameter, und dann müsste man Fallunterscheidungen treffen.

  Bleibt noch, wirklich nachzurechnen, dass (v_1,v_3) und (v_2,v_4) linear unabhängig sind:

$$rv_1+sv_3=0\Leftrightarrow\left\{\begin{matrix}r+2s&=&0\\rz&=&0\end{matrix}\right\}\Leftrightarrow\left\{\begin{matrix}r+2s&=&0\\r&=&0\end{matrix}\right\}\Leftrightarrow\left\{\begin{matrix}2s&=&0\\r&=&0\end{matrix}\right\}\Leftrightarrow r=s=0$$

$$rv_2+sv_4=0\Leftrightarrow\left\{\begin{matrix}-r+3s&=&0\\rz-r+sz^2&=&0\end{matrix}\right\}\Leftrightarrow\left\{\begin{matrix}r&=&3s\\sz^2+3sz-3s&=&0\end{matrix}\right\}$$

$$\Leftrightarrow\left\{\begin{matrix}r=3s\\s=0,\ 3s=0,\ -3s=0\end{matrix}\right\}\Leftrightarrow r=s=0$$

  Nun ist klar: (v_1,v_3) und (v_2,v_4) sind wirklich Basen von $\mathbb{F}_7(z)^2$, denn sie sind linear unabhängig und genau so lang, wie die Dimension von $\mathbb{F}_7(z)^2$ (nämlich 2) vorschreibt.

– *Woher weiß man, dass man (v_1,v_3) und (v_2,v_4) zu je einer Basis von $(\mathbb{F}_7(z))^2$ zusammenfassen muss, und nicht etwa (v_1,v_2) und (v_3,v_4)?*

  Man erhält dann zwar auch eine Basis des Tensorraums, nämlich $(v_1\otimes v_3, v_1\otimes v_4, v_2\otimes v_3, v_2\otimes v_4)$, aber diese Basis wäre keine Ergänzung der zwei vorgegebenen Vektoren.