Aufgabe 17.6

Seien K ein diskreter Körper und N, M endlich-dimensionale Vektorräume über K, und sei ferner $t \in N \otimes M^\vee$ ein beliebiger Tensor.

Zu zeigen: t reiner Tensor $\Leftrightarrow$ $M(t)$ hat Rang null oder eins

Erinnerungen:

– Ein Tensor in $N \otimes M^\vee$ heißt rein, wenn er sich schreiben lässt als $n \otimes \lambda$ für ein $n \in N$ und $\lambda \in M^\vee$.

  Nicht-reine Tensoren sind beliebige endliche Linearkombinationen reiner Tensoren, lassen sich also schreiben als $\sum_{i=1}^{N} n_i \otimes \lambda_i$ für gewisse $n_i \in N$, $\lambda_i \in M^\vee$.

– M ist definiert als

$$\begin{array}{rrcl} M\colon & N \otimes M^\vee & \to & \mathrm{Hom}(M, N) \\ & n \otimes \lambda & \mapsto & (m \mapsto \underbrace{\lambda(m)}_{\in K} n), \end{array}$$

  somit ist für ein $t \in N \otimes M^\vee$ das Ergebnis $M(t)$ der Anwendung von t auf M selbst wieder eine lineare Abbildung, und zwar von M nach N.

– $\mathrm{rk}\, M(t) =$ Rang der linearen Abbildung $M(t) = \dim \mathrm{im}\, M(t)$

Vor dem Beweis der Behauptung noch ein wenig Intuition, wieso die zu zeigende Aussage überhaupt interessant ist: Laut Skript ist ja die Abbildung M (in dem hier vorliegenden Fall) ein Isomorphismus, die Räume $N \otimes M^\vee$ und $\mathrm{Hom}(M, N)$ sind also isomorph.

Wenn man sich nun irrtümlicherweise unter dem Raum $N \otimes M^\vee$ nur die Menge der reinen Tensoren vorstellt (das ist falsch! In $N \otimes M^\vee$ sind ja auch nicht-reine Tensoren enthalten), dann horcht man natürlich sofort auf, wenn man diese Isomorphieaussage liest:

Wie kann es sein, dass es zu jeder beliebig komplizierten linearen Abbildung $A \in \mathrm{Hom}(M, N)$ einen einfachen reinen Tensor $n \otimes \lambda$ gibt, sodass die Abbildung $M(n \otimes \lambda)$ gleich A ist?

Die Aufgabe löst nun diesen Konflikt: Es stimmt zwar in der Tat, dass es zu jeder beliebig komplizierten linearen Abbildung $A \in \mathrm{Hom}(M, N)$ einen Tensor t aus $N \otimes M^\vee$ gibt, sodass die Abbildungen $M(t)$ und A gleich sind. Aber nur für den Fall, dass A Rang null oder eins hat, ist t ein reiner Tensor; in allen anderen Fällen ist t kein rein Tensor.

Nun zum Beweis, zwei Richtungen sind zu zeigen:

„$\Rightarrow$“: Sei $t = n \otimes \lambda \in N \otimes M^\vee$ ein beliebier reiner Tensor. $M(t)$ ist dann folgende lineare Abbildung:

$$\begin{array}{rrcl} M(t)\colon & M & \to & N \\ & m & \mapsto & \lambda(m)n \end{array}$$

Das Bild $\mathrm{im}\, M(t)$ ist also:

$$\begin{aligned} \mathrm{im}\, M(t) &= \{(M(t))(m) \mid m \in M\} = \{\lambda(m)n \mid m \in M\} \\ &= \{\lambda(m) \mid m \in M\} \cdot n = (\mathrm{im}\, \lambda) \cdot n \quad \text{(Menge mal Vektor)} \end{aligned}$$

Und da λ eine lineare Abbildung von M nach K ist, ist ihr Bild höchstens eindimensional, und somit ist auch $\operatorname{im} M(t)$ höchstens eindimensional, das war zu zeigen.

Hier noch eine genauere Begründung, wieso $\operatorname{im} M(t)$ höchstens eindimensional sein kann: Wir unterscheiden, ob λ die Nullabbildung ist, oder nicht:

1. Fall: $\lambda = 0 \in M^\vee$ (Nullabbildung)
   Dann ist $\operatorname{im} \lambda = \{0\}$ (das Nullmodul) und somit auch $\operatorname{im} M(t) = \{0\}$; folglich ist die Dimension $\dim \operatorname{im} M(t)$ von $\operatorname{im} M(t)$ null.
2. Fall: $\lambda \neq 0 \in M^\vee$
   Dann ist (da der Zielraum K von λ eindimensional ist) das Bild $\operatorname{im} \lambda$ gleich ganz K. Somit ist $\operatorname{im} M(t) = K \cdot n = \langle n \rangle$ (Erzeugnis von, lineare Hülle von, Spann von).
   Je nach dem, ob $n \in N$ der Nullvektor ist oder nicht, ist also $\dim \operatorname{im} M(t) = 0$ oder $\dim \operatorname{im} M(t) = 1$.

In beiden Fällen ist $\dim \operatorname{im} M(t) \leq 1$, das war zu zeigen.

„$\Leftarrow$“: Nun habe $\operatorname{im} M(t)$ die Dimension null oder eins; wir müssen zeigen, dass $t \in N \otimes M^\vee$ ein reiner Tensor ist. Dazu unterscheiden wir nach der Dimension des Bildraums $\operatorname{im} M(t)$:

1. Fall: $\dim \operatorname{im} M(t) = 0$
   Die Dimension von $\operatorname{im} M(t)$ ist genau dann null, wenn $\operatorname{im} M(t)$ gleich dem Nullmodul $\{0\}$ ist. Folglich ist $M(t) \in \operatorname{Hom}(M, N)$ die Nullabbildung,
   $$M(t) = 0 \in \operatorname{Hom}(M, N).$$
   Nach Skript ist aber M im hier vorliegenden Fall ein Isomorphismus, somit kann t nur der Nullvektor in $N \otimes M^\vee$ sein. (Denn: $M(t) = 0$ sagt aus, dass t im Kern von M liegt. Bei injektiven Abbildungen (wie M hier eine ist) besteht der Kern aber nur aus dem Nullvektor, d.h. $\ker M(t) = \{0\}$.)
   Der Nullvektor $0 \in N \otimes M^\vee$ ist ein reiner Tensor (beispielsweise lässt er sich als $0 \otimes 0$ schreiben, wobei der vordere Nullvektor der aus N und der hintere der aus $M^\vee$ ist), womit die Behauptung für diesen ersten Fall gezeigt ist.
2. Fall: $\dim \operatorname{im} M(t) = 1$
   Da das Bild $\operatorname{im} M(t)$ eindimensional ist, lässt es sich als Erzeugnis eines einzigen Vektors $v \in N$ schreiben:
   $$\operatorname{im} M(t) = \langle v \rangle \qquad \text{für ein } v^{\neq 0} \in N.$$
   Somit ist jeder Vektor $M(t)(m)$ des Bilds von $M(t)$ ein Vielfaches von v, formal ausgedrückt gilt also:
   $$\forall m \in M \ \exists! k_m \in K \colon M(t)(m) = k_m v$$
   (Zur Erinnerung: „$\exists!$“ bedeutet „es gibt genau ein“; und hier ist auch klar (Nullteilerfreiheit in Vektorräumen, Aufgabe 10.2), wieso k_m in der Tat eindeutig bestimmt ist: Sollte $k_m v = \tilde{k}_m v$ gelten, dann folgt (wegen $v \neq 0$) $k_m = \tilde{k}_m$.)
   Hier haben wir also (wie übrigens auch bei Aufgabe 16.1) die Situation vorliegen, dass es zu jedem $m \in M$ einen eindeutig bestimmten Vektor k_m mit einer bestimmten

Eigenschaft (hier: der Eigenschaft, dass $k_m v = M(t)(m)$ ist) gibt. Das erlaubt uns, folgende Funktion $\omega\colon M \to K$ zu definieren:

$$\begin{array}{rrcl} \omega\colon & M & \to & K, \\ & m & \mapsto & k_m \end{array}$$

Wenn wir wüssten, dass diese Abbildung linear ist, also im Raum $\mathrm{Hom}(M,K) = M^\vee$ liegt, wären wir fertig: Denn dann liegt der Tensor $v \otimes \omega$ im Raum $N \otimes M^\vee$ und wir können M auf ihn anwenden, wodurch wir für alle $m \in M$ folgende Gleichheit erhalten:

$$M(t)(m) = k_m v = \omega(m)v = M(v \otimes \omega)(m)$$

Somit sind die Abbildungen $M(t)$ und $M(v \otimes \omega)$ gleich. Da nun aber M nach Vorlesung in dem hier vorliegenden Fall bijektiv ist, muss t gleich $v \otimes \omega$ sein und ist somit ein reiner Tensor.

Bleibt also nur noch zu zeigen, dass ω in der Tat linear ist. (Wieso ist das wichtig? Wäre ω nicht linear, dann könnten wir M nicht auf $v \otimes \omega$ anwenden, da M ja nur auf dem Raum $N \otimes M^\vee$ definiert ist; die rechts neben dem Tensorzeichen stehende Abbildung muss aus dem Raum $M^\vee$ stammen, also eine *lineare* Abbildung von M nach K sein.)

Zur Linearität von ω sind zwei Teilaussagen zu zeigen:

- Seien $m, m' \in M$ beliebig, zu zeigen ist $\omega(m + m') = \omega(m) + \omega(m')$.
  In früheren Aufgaben haben wir zu zeigende Gleichheiten dieser Art einfach so bewiesen, indem wir die linke Seite $\omega(m+m')$ so weit vereinfacht haben, bis sich ,,von selbst" die rechte Seite ergab. Hier allerdings ist ω ja nicht wie sonst üblich durch einen echten Funktionsterm definiert (den man ausrechnen könnte), sondern durch das $\forall$–$\exists!$-Konstrukt.
  Um die gewünschte Gleichheit zu zeigen, werden wir also irgendwie ausnutzen müssen, dass die k_m eindeutig bestimmt sind. Dazu setzen wir wie folgt an:

$$\begin{array}{ccccc} M(t)(m+m') & = & k_{m+m'}v & & \\ \| & & & & \\ M(t)(m) + M(t)(m') & = & k_m v + k_{m'} v & = & (k_m + k_{m'})v \end{array}$$

  Also haben sowohl $k_{m+m'}$ als auch $(k_m + k_{m'})$ die Eigenschaft, dass man, wenn man sie mit v multipliziert, als Ergebnis $M(t)(m+m')$ erhält. Aufgrund der Eindeutigkeit kann es aber nur ein solches Körperelement geben, also sind $k_{m+m'}$ und $(k_m + k_{m'})$ gleich.
  Und damit ist diese erste Teilaussage bewiesen, denn $\omega(m + m') = k_{m+m'} = k_m + k_{m'} = \omega(m) + \omega(m')$.
- Seien $m \in M$ und $r \in K$ beliebig, zu zeigen ist $\omega(rm) = r\omega(m)$.
  Das geht ähnlich: Zunächst halten wir fest, dass sowohl k_{rm} als auch rk_m die Eigenschaft haben, dass man, wenn man sie mit v multipliziert, $M(t)(rm)$ erhält:

$$\begin{array}{ccccc} M(t)(rm) & = & k_{rm}v & & \\ \| & & & & \\ rM(t)(m) & = & rk_m v & = & (rk_m)v \end{array}$$

  Es kann aber nur ein Körperelement mit dieser Eigenschaft geben, also müssen k_{rm} und rk_m gleich sein. Somit ist gezeigt: $\omega(rm) = k_{rm} = rk_m = r\omega(m)$.

Damit ist die Linearität von ω gezeigt und der Beweis abgeschlossen.