Nachtrag zu Aufgabe 19.4

Folgende allgemeine Behauptung blieb in der Übungsstunde unbeweisen:

> Ist $A\colon V \to W$ eine lineare Abbildung zwischen zwei *eindimensionalen* Vektorräumen V und W über einem diskreten Körper K, die nicht die konstante Nullabbildung ist, so ist A bereits ein Isomorphismus.

Diese Aussage lässt sich in zwei Teilaussagen aufteilen, die ihrerseits nützlich sind:

1. Ist $A\colon V \to Z$ eine lineare Abbildung zwischen zwei K-Vektorräumen, wobei V eindimensional sein muss (Z aber ganz beliebig sein kann) und A nicht die Nullabbildung ist, so ist A injektiv.
2. Ist $A\colon Z \to W$ eine lineare Abbildung zwischen zwei K-Vektorräumen, wobei W eindimensional sein muss (Z aber ganz beliebig sein kann) und A nicht die Nullabbildung ist, so ist A surjektiv.

Versuchen wir also, beide Aussagen zu beweisen.

1. Sei also V ein beliebiger eindimensionaler Vektorraum über einem Körper K, Z ein beliebiger (anderer) Vektorraum und $A\colon V \to Z$ eine nicht-konstante lineare Abbildung, zu zeigen ist, dass A injektiv ist.

   Es folgen zwei Beweise: Ein kurzer, der die Dimensionsformel für lineare Abbildungen nutzt, und einer ,,per Hand“.

   Beweis über die Dimensionsformel. Nach der Dimensionsformel gilt $\dim V = \dim \operatorname{im} A + \dim \ker A$, also $\dim \ker A = \dim V - \dim \operatorname{im} A = 1 - \dim \operatorname{im} A$. Da nun nach Voraussetzung A nicht die Nullabbildung ist, ist $\dim \operatorname{im} A$ nicht null (sondern eins), weswegen die Dimension des Kerns von A null sein muss. Also ist A wie behauptet injektiv.

   Beweis ,,per Hand“. Wie nutzen wir aus, dass V ein eindimensionaler Vektorraum ist? Ein Standardtrick dazu ist folgender: Da V eindimensional ist, muss es einen Vektor $v^{\neq 0} \in V$ geben, der V als Vektorraum erzeugt, für den also $V = \langle v \rangle$ (Spann von) gilt.

   Jeder Vektor x in V lässt sich also mit einem geeigneten (eindeutigen) $k_x \in K$ als Vielfaches $x = k_x v$ schreiben. Da A linear ist, ergibt sich somit:

   $$A(x) = A(k_x v) = k_x A(v), \qquad \text{für alle } x \in V.$$

   (Da A nach Voraussetzung nicht die Nullabbildung ist, kann $A(v)$ nicht der Nullvektor aus Z sein.)

   Mit dieser Vorüberlegung erkennt man, dass A in der Tat injektiv ist: Die einzige Möglichkeit, dass ein Vektor $x = k_x v \in V$ im Kern von A liegt, dass also $A(x) = k_x A(v) = 0 \in Z$ gilt, ist, dass schon der Koeffizient k_x selbst null ist. Das bedeutet aber, dass $x = k_x v = 0v = 0$ ist. Damit ist gezeigt: Der Kern von A besteht nur aus dem Nullvektor, also ist A injektiv.

2. Nun zur zweiten Aussage, sei W ein eindimensionaler Vektorraum, Z ein beliebiger Vektorraum, und $A\colon Z \to W$ eine beliebige lineare Abbildung, die nicht die Nullabbildung ist; zu zeigen ist, dass A surjektiv ist.

   Wieder gibt es zwei Beweismöglichkeiten:

   Beweis über die Dimensionsformel. Es gilt $\dim Z = \dim \operatorname{im} A + \dim \ker A$, also $\dim \operatorname{im} A = \dim Z - \dim \ker A$. Da A nicht die Nullabbildung ist, ist die Dimension $\dim \ker A$ des Kerns echt kleiner als die Dimension des Quellraums Z; also ist $\dim \operatorname{im} A = 1$ und somit $\operatorname{im} A = W$, also ist A wie behauptet surjektiv.

   Beweis „per Hand“. Da W eindimensional ist, gibt einen von null verschiedenen Vektor $w \in W$, der W erzeugt, für den also gilt: $W = \langle w \rangle$.

   Da A nicht die Nullabbildung ist, gibt es ein $v \in V$ mit $A(v) \neq 0 \in W$, konkret habe $A(v)$ den Wert $A(v) = kw$, $k^{\neq 0} \in K$ geeignet.

   Um jetzt zu zeigen, dass A surjektiv ist, sei ein beliebiges Element $rw \in W$ vorgegeben, $r \in K$. Dann liefert die Anwendung von $(r/k)v$ auf A genau rw, denn:

   $$A(r/k \cdot v) = r/k \cdot A(v) = r/k \cdot kw = rw$$

   Womit die Surjektivität von A gezeigt ist.