# Aufgabe 8

**Beh.:** $K := \{a + b\sqrt{2} \,|\, a, b \in \mathbb{Q}\} \subset \mathbb{R}$ ist mit der üblichen Addition und Multiplikation reeller Zahlen ein Körper.

Dazu müssen alle Körperaxiome nachgeprüft werden.

1. **Z.z.:** Für alle $x, y \in K$ liegen auch $x + y$ und $xy$ in $K$.

   Seien also $x, y \in K$ beliebig; $x$ und $y$ können geschrieben werden als $x = a + b\sqrt{2}$ bzw. $y = c + d\sqrt{2}$ für gewisse $a, b, c, d \in \mathbb{Q}$. Dann ist $x + y = (a + b\sqrt{2}) + (c + d\sqrt{2}) = (a + c) + (b + d)\sqrt{2}$ in der Tat wieder von der Form „Element aus $\mathbb{Q}$ plus Element aus $\mathbb{Q}$ mal $\sqrt{2}$" (denn $a + c, b + d \in \mathbb{Q}$), also gilt in der Tat $x + y \in K$.

   Auch ist das Produkt $xy$ wieder von der verlangten Form, denn $xy = (a+b\sqrt{2})(c+d\sqrt{2}) = ac + ad\sqrt{2} + bc\sqrt{2} + 2bd = (ac + 2bd) + (ad + bc)\sqrt{2}$ und $ac + 2bd, ad + bc \in \mathbb{Q}$.

2. **Z.z.:** $K$ bildet mit $+$ eine abelsche Gruppe mit neutralem Element 0.

   **Abgeschlossenheit:** Schon bei 1. gezeigt.

   **Assoziativität:** Klar, da *ererbt von* $\mathbb{R}$: Wir wissen bereits, dass $x+(y+z) = (x+y)+z$ für alle $x, y, z \in \mathbb{R}$ gilt. Dann gilt diese Gleichheit insbesondere für alle $x, y, z \in K$, da $K$ eine Teilmenge von $\mathbb{R}$ und da wir die Addition auf $K$ einfach über die Addition in $\mathbb{R}$ definiert haben.

   **Linksneutralität von 0:** Es ist klar, dass 0 linksneutral ist, da 0 in $\mathbb{R}$ linksneutral ist. Was man aber noch kurz anmerken muss, ist, dass 0 in der Tat in $K$ liegt! Die Begründung dafür ist, dass sich 0 als $0 = 0 + 0\sqrt{2}$ schreiben lässt und somit die geforderte Form hat.

   **Existenz der Linksinversen:** Zu $x = a + b\sqrt{2} \in K$ beliebig ist $-x$ das zugehörige Linksinverse. Wie eben muss aber noch gezeigt werden, dass $-x$ wieder in $K$ liegt: Das ist aber klar, denn $-x = (-a) + (-b)\sqrt{2}$ hat die von $K$ geforderte Form.

3. **Z.z.:** $K \setminus \{0\}$ bildet mit $\cdot$ eine abelsche Gruppe mit neutralem Element 1.

   **Abgeschlossenheit:** Schon bei 1. gezeigt.

   **Assoziativität:** Klar, da erebt von $\mathbb{R}$.

   **Linksneutralität von 1:** Klar ist, dass 1 linksneutral ist. Wie eben muss noch gezeigt werden, dass 1 in der Tat in $K$ liegt; dazu schreiben wir 1 als $1 = 1 + 0\sqrt{2}$, das ist die geforderte Form.

   **Existenz von Linksinversen:** Es ist klar, dass zu $x = a+b\sqrt{2} \in K$ beliebig mit $x \neq 0$ die Zahl $1/x \in \mathbb{R}$ linksinvers ist. Aber völlig unklar ist, dass $1/x$ auch wieder in $K$ liegt! Das ist der schwierigste Teil dieser Teilaufgabe, der Trick besteht in einer klugen künstlichen Brucherweiterung:

   $$\frac{1}{x} = \frac{1}{a + b\sqrt{2}} = \frac{a - b\sqrt{2}}{(a + b\sqrt{2})(a - b\sqrt{2})} = \frac{a - b\sqrt{2}}{a^2 - 2b^2} = \frac{a}{a^2 - 2b^2} + \frac{-b}{a^2 - 2b^2}\sqrt{2},$$

   wegen $\frac{a}{a^2-2b^2}, \frac{-b}{a^2-2b^2} \in \mathbb{Q}$ ist mit dieser Umformung gezeigt, dass $1/x$ in der Tat in $K$ liegt.

[Wenn man absolut sauber sein möchte, muss man noch begründen, wieso $a - b\sqrt{2}$ nicht null ist, denn sonst dürfte man damit nicht erweitern! Eine mögliche Argumentation geht so: Angenommen, $a - b\sqrt{2}$ wäre doch null. Dann folgt $a = b\sqrt{2}$; damit ist entweder $b = 0$ und damit auch $a = 0$ – aber das ist ein Widerspruch zu $x = a + b\sqrt{2} \neq 0$; oder es ist $b \neq 0$ und damit $\sqrt{2} = a/b$, womit $\sqrt{2}$ rational wäre – ein Widerspruch zur Irrationalität von $\sqrt{2}$.]

4. **Z.z.:** In $K$ gilt das Distributivgesetz.

   Klar, da ererbt von $\mathbb{R}$.

Damit sind alle Körperaxiome nachgewiesen.

**Bem.:** In der gesamten Aufgabe kann $\sqrt{2}$ auch durch andere Wurzeln ersetzt werden; auf diese Weise erhält man weitere Zwischenkörper. Es gibt auch noch weitere Zwischenkörper, die nicht einfach durch „Hinzufügen von Wurzeln“ entstehen, das ist dann Stoff der Algebra I.