Inhaltsverzeichnis

Aufgabe -3

$A \in M(n \times n, K)$, $U \subset K^n$ Unterraum mit $A(U) \subset U$. (U ist also ein für A invarianter Unterraum.) Sei $r := \dim U$.

Behauptung. *Es gibt ein $T \in \mathrm{GL}_n(K)$ derart, dass $T^{-1}AT$ die Blockform*

$$T^{-1}AT = \begin{pmatrix} B & C \\ 0 & D \end{pmatrix}$$

für gewisse Matrizen $B \in M(r \times r, K)$, $C \in M(r \times (n-r), K)$ und $D \in M((n-r) \times (n-r), K)$ hat.

Beweis. Wähle irgendeine Basis $(u_1, \ldots, u_r)$ von U. Ergänze diese Basis zu einer Basis $(u_1, \ldots, u_r, u_{r+1}, \ldots, u_n)$ von ganz K^n. Schreibe diese Basisvektoren als Spalten nebeneinander in die Matrix T:

$$T = (u_1|\cdots|u_r|u_{r+1}|\cdots|u_n) \in M(n \times n, K)$$

Da die Spalten von T linear unabhängig sind, ist T eine reguläre Matrix.

Vorüberlegung für gleich (möglicherweise auch schon aus LA I „klar"): Sei $x \in K^n$ ein beliebiger Vektor, seine Basisdarstellung bezüglich der gewählten Gesamtbasis von K^n sei

$$x = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j u_j$$

für gewisse Skalare $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in K$. Dann gilt: Der Vektor $T^{-1}x$ besteht gerade aus diesen Skalaren, d. h. es gilt

$$T^{-1}x = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix}.$$

Denn:

$$T^{-1}x = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j \underbrace{T^{-1}u_j}_{=e_j} = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix},$$

wobei e_i den i-ten kanonischen Einheitsvektor in K^n bezeichne. Ende der Vorüberlegung.

Es ist noch zu zeigen, dass $T^{-1}AT$ von der gewünschten Form ist. Dazu ist nur zu zeigen, dass die unteren $(n-r)$ Zeilen der ersten r Spalten von $T^{-1}AT$ gleich null sind.

Sei also $i = 1, \ldots, r$ beliebig, wir wollen die i-te Spalte von $T^{-1}AT$ betrachten. Diese kann man rechnerisch schreiben als

$$T^{-1}ATe_i.$$

Es gilt nun $ATe_i = Au_i \in U$ wegen der Voraussetzung $A(U) \subset U$ und $u_i \in U$ (denn $i \leq r$). Schreibt man in Gedanken den Vektor ATe_i in der Basisdarstellung der gewählten Gesamtbasis von K^n aus, sind die Koeffizienten vor den Basisvektoren u_{r+1} bis u_n also jeweils gleich null. Nach der Vorüberlegung müssen daher die unteren $(n-r)$ Zeilen von $T^{-1}ATe_i$ gleich null sein. Damit ist alles gezeigt. □

Aufgabe -2

$A \in M(n \times n, K)$, $U, V \subset K^n$ Unterräume mit $K^n = U \oplus V$, $A(U) \subset U$, $A(V) \subset V$. Sei $r := \dim U$, $s := \dim V$.

Behauptung. *Es gibt ein $T \in \mathrm{GL}_n(K)$ derart, dass $T^{-1}AT$ die Blockform*

$$T^{-1}AT = \begin{pmatrix} B & 0 \\ 0 & C \end{pmatrix}$$

für gewisse Matrizen $B \in M(r \times r, K)$ und und $C \in M(s \times s, K)$ hat.

Beweis. Wähle irgendeine Basis $(u_1, \ldots, u_r)$ von U und irgendeine Basis $(v_1, \ldots, v_s)$ von V. Wegen $K^n = U \oplus V$ ist dann $(u_1, \ldots, u_r, v_1, \ldots, v_n)$ eine Basis von K^n. Schreibe wie in Aufgabe -3 diese Basisvektoren nebeneinander als Spalten in die Matrix T:

$$T = (u_1 | \cdots | u_r | v_1 | \cdots | v_s) \in M(n \times n, K)$$

Da die Spalten von T linear unabhängig sind, ist T eine reguläre Matrix.

Es gilt auch die gleiche Vorüberlegung: Für beliebiges $x \in K^n$ sind die Komponenten des Vektors $T^{-1}x$ gerade die Koeffizienten der Basisdarstellung von x bezüglich der zusammengesetzten Gesamtbasis.

Nun zeigen wir, dass $T^{-1}AT$ von der gewünschten Form ist. Zunächst betrachten wir die ersten r Spalten, sei also $i = 1, \ldots, r$ beliebig. Die i-te Spalte von $T^{-1}AT$ ist dann $T^{-1}ATe_i$, und wir müssen zeigen, dass deren unteren s Einträge jeweils null sind.

Dazu: $Te_i = u_i$, also ist ATe_i wegen $A(U) \subset U$ ein Vektor aus U. Da die Komponenten von $T^{-1}(ATe_i)$ die Koeffizienten der Basisdarstellung von ATe_i angeben, müssen daher diejenigen Komponenten von $T^{-1}(ATe_i)$, welche zu den Basisvektoren zu V gehören (das sind gerade die letzten s Stück), jeweils null sein.

Analog zeigt man die gewünschte Form für die letzten s Spalten: Sei $i = r+1, \ldots, n$ beliebig. Wir müssen zeigen, dass die ersten r Komponenten von $T^{-1}ATe_i$ jeweils null sind.

Dazu: $Te_i = v_{i-r}$, also liegt $A(Te_i)$ in V. Somit sind in der Basisdarstellung von $A(Te_i)$ die ersten r Koeffizienten jeweils null, und somit sind die ersten r Komponenten von $T^{-1}ATe_i$ jeweils null. $\square$

Aufgabe -1

$A \in M(n \times n, K)$, χ_A zerfalle in Linearfaktoren, $\lambda \in K$ Eigenwert.

Behauptung. $\mu^{geo}(\lambda) \leq \mu^{alg}(\lambda)$.

Beweis. Sei $U := \operatorname{kern}(A - \lambda \mathbb{1}_n) \subset K^n$ der Eigenraum von A zum Eigenwert λ. Es gilt $A(U) \subset U$, denn:

Sei $x \in U$ beliebig. Dann gilt $(A - \lambda \mathbb{1}_n)x = 0$, also folgt $Ax = \lambda \mathbb{1}_n x = \lambda x$. Da U ein Unterraum ist, gilt $\lambda x \in U$. Somit ist gezeigt, dass $Ax \in U$.

Nach Aufgabe -3 gibt es damit eine Basiswechselmatrix T derart, dass die transformierte Matrix $T^{-1}AT$ die Blockgestalt

$$T^{-1}AT = \begin{pmatrix} B & C \\ 0 & D \end{pmatrix}$$

hat.

Die Matrix B ist eine Diagonalmatrix der Größe $(\dim U) \times (\dim U)$, auf der Hauptdiagonale steht entsprechend oft der Eigenwert λ: Denn die Matrix A wirkt auf U einfach durch Multiplikation mit λ, das soll heißen: Jeder Vektor $x \in U$ wird durch A auf sein Vielfaches λx abgebildet. Insbesondere gilt dies für diejenigen Basisvektoren, die man im Beweis der Aufgabe -3 benutzt hat, um die Matrix B aufzustellen.

Das charakteristische Polynom von A, über welches die algebraische Vielfachheit von λ definiert ist, stimmt mit dem von $T^{-1}AT$ überein. Da wurde in der LA I gezeigt, kann aber auch schnell wiederholt werden:

$$\chi_{T^{-1}AT}(t) = \det(T^{-1}AT - t\mathbb{1}_n) = \det(T^{-1}(A - t\mathbb{1}_n)T) = \det(A - t\mathbb{1}_n) = \chi_A(t)$$

Rechnet man in Gedanken die Determinante aus, so sieht man, dass im gemeinsamen charakteristischen Polynom der Faktor $(t - \lambda)$ mindestens so oft vorkommt, wie der Eigenwert λ auf der Hauptdiagonale von B vorkommt, also $(\dim U)$ Mal. Die Behauptung folgt, da nach Definition $\mu^{\text{geo}}(\lambda) = \dim U$. $\square$

Blatt 1, Aufgabe 2

i) Gesucht: Stochastische Übergangsmatrix für beschriebenes Spiel

Dazu: Kontostand im 2k-ten Schritt:

$$\begin{pmatrix} x_{2k} \\ y_{2k} \end{pmatrix}$$

Kontostand im (2k+1)-ten Schritt:

$$\begin{pmatrix} x_{2k}/2 \\ y_{2k} + \frac{1}{2}x_{2k} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_{2k+1} \\ y_{2k+1} \end{pmatrix}$$

Kontostand im (2k+2)-ten Schritt:

$$\begin{pmatrix} x_{2k}/2 + \frac{1}{2}(y_{2k} + \frac{1}{2}x_{2k}) \\ \frac{1}{2}(y_{2k} + \frac{1}{2}x_{2k}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3}{4}x_{2k} + \frac{1}{2}y_{2k} \\ \frac{1}{4}x_{2k} + \frac{1}{2}y_{2k} \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 3/4 & 1/2 \\ 1/4 & 1/2 \end{pmatrix}}_{=A} \begin{pmatrix} x_{2k} \\ y_{2k} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_{2k+2} \\ y_{2k+2} \end{pmatrix}$$

die gesuchte Übergangsmatrix

ii) Beh.: $\lim_{k\to\infty} A^k$ existiert.

Bew.: Versuch, A zu diagonalisieren:

$$\chi_A(t) = \det\begin{pmatrix} 3/4-t & 1/2 \\ 1/4 & 1/2-t \end{pmatrix} = (\tfrac{3}{4}-t)(\tfrac{1}{2}-t) - \tfrac{1}{8} = t^2 - \tfrac{5}{4}t + \tfrac{1}{4} = (t-1)(t-\tfrac{1}{4})$$

Raten oder Mitternachtsformel

ER zum EW 1:

$$\ker(A - 1_2) = \ker\begin{pmatrix} -1/4 & 1/2 \\ 1/4 & -1/2 \end{pmatrix} = \operatorname{span}\left(\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$$

ER zum EW $\frac{1}{4}$:

$$\ker(A - \tfrac{1}{4} 1_2) = \ker\begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1/4 & 1/4 \end{pmatrix} = \operatorname{span}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}\right).$$

Also: $A = SDS^{-1}$ mit $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1/4 \end{pmatrix}$, $S = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$, $S^{-1} = \frac{1}{\det S} \cdot \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$

Somit: $A^k = S \underbrace{D^k}_{\downarrow k\to\infty \; \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}} S^{-1} \xrightarrow{k\to\infty} S\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} S^{-1} = \underline{\begin{pmatrix} 2/3 & 2/3 \\ 1/3 & 1/3 \end{pmatrix}}.$

Interpretation: Sogar bei jeder beliebigen Startverteilung $\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$ mit $x_0 + y_0 = 1$, $x_0, y_0 \geq 1$,

gilt: $A^k \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_{2k} \\ y_{2k} \end{pmatrix} \xrightarrow[k\to\infty]{} \begin{pmatrix} 2/3 & 2/3 \\ 1/3 & 1/3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2x_0 + 2y_0 \\ x_0 + y_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2/3 \\ 1/3 \end{pmatrix}$,

der Kontostand pendelt sich also (bei geraden Schrittzahlen) bei $\begin{pmatrix} 2/3 \\ 1/3 \end{pmatrix}$ ein.

(Bei ungeraden Schrittzahlen ist es $\begin{pmatrix} 1/3 \\ 2/3 \end{pmatrix}$.)

Blatt 1, Aufgabe 3

Allgemeine Behauptung:

Sei S stochastische $(n\times n)$-Matrix.

Sei $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ ein Vektor mit

$$\sum_{i=1}^{n} x_i = x_1 + \dots + x_n = 1 \quad \text{und} \quad x_i \geq 0 \text{ für alle } i = 1, \dots, n.$$

Dann ist auch Sx ein Vektor mit:

$$\sum_{i=1}^{n} (Sx)_i = 1 \quad \text{und} \quad (Sx)_i \geq 0 \text{ f.a. } i = 1, \dots, n.$$

$(Sx)_i$: i-te Komponente von Sx

Bew.: Es gilt:

$$(Sx)_i = \sum_{j=1}^{n} \underbrace{S_{ij}}_{\geq 0} \underbrace{x_j}_{\geq 0} \geq 0 \quad \text{für alle } i = 1, \dots, n.$$

Und:

$$\sum_{i=1}^{n} (Sx)_i = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} S_{ij} x_j = \sum_{j=1}^{n} \underbrace{\left(\sum_{i=1}^{n} S_{ij} \right)}_{=1} x_j = \sum_{j=1}^{n} x_j = 1.$$

S (spalten-)stochastisch

Blatt 1, Aufgabe 4

i) Ges: $\exp(A)$ mit $A = \begin{pmatrix} 10 & 9 \\ -6 & -5 \end{pmatrix}$.

Dazu: Versuche, A zu diagonalisieren!

$$\chi_A(t) = \det\begin{pmatrix} 10-t & 9 \\ -6 & -5-t \end{pmatrix} = (10-t)(-5-t) + 54 = t^2 - 5t + 4 = (t-1)(t-4)$$

ER zum EW 1: $\ker(A - \mathbb{1}_2) = \ker\begin{pmatrix} 9 & 9 \\ -6 & -6 \end{pmatrix} = \cancel{\operatorname{span}\left(\begin{pmatrix} 6 \\ -9 \end{pmatrix}\right)} = \cancel{\operatorname{span}\left(\begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix}\right)}$

$= \operatorname{span}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}\right)$.

ER zum EW 4:

$\ker(A - 4\cdot\mathbb{1}_2) = \ker\begin{pmatrix} 6 & 9 \\ -6 & -9 \end{pmatrix} = \operatorname{span}\left(\begin{pmatrix} 9 \\ -6 \end{pmatrix}\right) = \operatorname{span}\left(\begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix}\right)$.

Also: $A = SDS^{-1}$ mit $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$, $S = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$, $S^{-1} = \frac{1}{\det S}\begin{pmatrix} -2 & -3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} -2 & -3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

Damit:

$$\exp(A) = S\exp(D)S^{-1} = S\begin{pmatrix} e & \\ & e^4 \end{pmatrix}S^{-1}$$

$$= \begin{pmatrix} -2e+3e^4 & -3e+3e^4 \\ 2e-2e^4 & 3e-2e^4 \end{pmatrix}$$

ii) Ges: $\exp(A)$ mit $A = \begin{pmatrix} -5 & 2 & 4 \\ -3 & 2 & 2 \\ -9 & 3 & 7 \end{pmatrix}$.

Dazu: Versuche, A zu diagonalisieren!

$\chi_A(t) = \ldots\ldots = -t^3 + 4t^2 - 5t + 2 = -(t-1)^2(t-2)$.

ER zum EW 1: $\ker(A - \mathbb{1}_3) = \ker\begin{pmatrix} -6 & 2 & 4 \\ -3 & 1 & 2 \\ -9 & 3 & 6 \end{pmatrix} = \operatorname{span}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}\right)$.

ER zum EW 2:

$\ker(A - 2\cdot\mathbb{1}_3) = \ker\begin{pmatrix} -7 & 2 & 4 \\ -3 & 0 & 2 \\ -9 & 3 & 5 \end{pmatrix} = \operatorname{span}\left(\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}\right)$

Nebenrechnung: $S = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$, $S^{-1} = \begin{pmatrix} 7 & -2 & -4 \\ -2 & 1 & 1 \\ -3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

Also: $A = SDS^{-1}$ mit $D = \begin{pmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & 2 \end{pmatrix}$.

Damit: $\exp(A) = S\begin{pmatrix} e & & \\ & e & \\ & & e^2 \end{pmatrix}S^{-1} = \begin{pmatrix} 7e-6e^2 & 2e^2-2e & 4e^2-4e \\ 3e-3e^2 & e^2 & 2e^2-2e \\ 9e-9e^2 & 3e^2-3e & 6e^2-5e \end{pmatrix}$.

Blatt 2, Aufgabe 8

i) Gs: Verallgemeinerte Eigenräume zu $A = \begin{pmatrix} 6 & 2 & -6 \\ -8 & -1 & 12 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix} \in M(3\times 3, \mathbb{R})$.

Dazu: Char. Polynom:

$$\cancel{\chi_A(t) = -t^3 + 2t^2 - t + 2 = -(t^2+1)}$$

$$\chi_A(t) = -(t-1)^{2}(t-2)^{1}$$

Also: Eigenwerte 1 und 2, $\dim V(1) = 2$, $\dim V(2) = 1$.

Zum EW 1:

$$\ker(A - 1\cdot 1_3) = \ker\begin{pmatrix} 5 & 2 & -6 \\ -8 & -2 & 12 \\ 2 & 1 & -2 \end{pmatrix} = \operatorname{span}\left(\begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}\right),$$ ist erst eindimensional

$$\ker(A - 1\cdot 1_3)^2 = \ker\begin{pmatrix} -3 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 4 \end{pmatrix} = \operatorname{span}\left(\begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right),$$ ist zweidimensional, das ist also $V(1)$.

Zum EW 2:

$$\ker(A - 2\cdot 1_3) = \ker\begin{pmatrix} 4 & 2 & -6 \\ -8 & -3 & 12 \\ 2 & 1 & -3 \end{pmatrix} = \operatorname{span}\left(\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}\right),$$ ist schon eindimensional, das ist also $V(2)$.

Für Spaß Zerlegung von $V(1)$ in zyklische Unterräume:

Es gilt $V(1) = L_{A-1\cdot 1_3}\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right)$, denn $L_{A-1\cdot 1_3}\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right) = \operatorname{span}\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}\right) = V(1)$.

~~eigentlich~~ nach diesen beiden Vektoren käme $(A - 1\cdot 1_3)\begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} = 0$, fällt weg

Für Spaß Jordannormalform:

$$\begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix} 1 & 1 \\ & 1 \end{matrix}} & \\ & \boxed{2} \end{pmatrix},$$

eine mögliche Jordanbasis ist: $\begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$.

Ferner gilt: $p_A(x) = (x-1)^2(x-2)$ (Minimalpolynom).

iii) Ges.: Verallgemeinerte Eigenräume zu $C = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 0 \\ -1 & 2 & -2 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \in M(3\times 3, \mathbb{R})$.

Dazu: Char. Polynom: $\chi_C(t) = -(t-2)^3$.

Also: Es gibt nur einen Eigenwert, und das charakteristische Polynom zerfällt in Linearfaktoren
also $V(2) = \mathbb{R}^3$.

Für Spaß Zerlegung von $V(2)$ in zyklische Unterräume:

$$\ker(A - 2\cdot 1_3) = \ker\begin{pmatrix} 0 & -2 & 0 \\ -1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \operatorname{span}\left(\begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$$

$$\ker(A - 2\cdot 1_3)^2 = \ker\begin{pmatrix} 2 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & -2 \end{pmatrix} = \operatorname{span}\left(\begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right)$$

$$\ker(A - 2\cdot 1_3)^3 = \ker\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \operatorname{span}\left(\begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right) = \mathbb{R}^3$$

Wähle $w_1 := \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, dann $L_{A-2\cdot 1_3}(w_1) = \operatorname{span}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}\right)$.

Somit $V(2) = L_{A-2\cdot 1_3}(w_1)$.

Für Spaß Jordannormalform:

$\begin{pmatrix} 2 & 1 & \\ & 2 & 1 \\ & & 2 \end{pmatrix}$, mögliche Basis: $\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Für Spaß Minimalpolynom: $p_C(X) = (X-2)^3$.

Blatt 3, Aufgabe 11

Ges.: Jordansche Normalform von $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in M(2\times 2, \mathbb{C})$.

wichtig!

Dazu: Char. Polynom:

$$\chi_A(t) = \det\begin{pmatrix} a-t & b \\ c & d-t \end{pmatrix} = (a-t)(d-t) - bc = t^2 - t(a+d) - bc.$$

Diskriminante: $D := (a+d)^2 - 4(-bc) = a^2 + 2ad + d^2 + 4bc.$

Fall 1: $D \neq 0$.

Dann gibt es zwei verschiedene Eigenwerte, $\frac{1}{2}(a+d \pm \sqrt{D}) =: \lambda_{1,2}$,

Somit ist die JNF:

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & \\ & \lambda_2 \end{pmatrix}.$$

Fall 2: $D = 0$.

Dann gibt es nur einen Eigenwert, $\lambda_1 = \frac{1}{2}(a+d)$.

Dann gibt es folgende Möglichkeiten für die JNF:

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & 1 \\ & \lambda_1 \end{pmatrix} \quad \text{oder} \quad \begin{pmatrix} \lambda_1 & \\ & \lambda_1 \end{pmatrix}.$$

Zur Klärung bestimmen wir das Minimalpolynom von A.

Das char. Polynom schreibt sich als $(t-\lambda_1)^2$,

als Möglichkeiten für das Minimalpolynom gibt es daher

$t - \lambda_1$ (zweite Variante) und $(t-\lambda_1)^2$ (erste Variante).

Es gilt:

$$A - \lambda_1 1_2 = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}(a-d) & b \\ c & \frac{1}{2}(d-a) \end{pmatrix}$$

Also: $A - \lambda_1 1_2 = 0 \iff \{ a-d = 0 \text{ und } b = 0 \text{ und } c = 0 \}$.

Fazit:

Fall i: $a=d$ und $b=c=0$: Dann gilt $p_A(X) = (X-\lambda_1)$, also JNF: $\begin{pmatrix} \lambda_1 & \\ & \lambda_1 \end{pmatrix}$

Fall ii: sonst: Dann $p_A(X) = (X-\lambda_1)^2$, also JNF: $\begin{pmatrix} \lambda_1 & 1 \\ & \lambda_1 \end{pmatrix}$

In der Datei blatt3-aufgabe11.jpeg fehlt ein Summand im charakteristischen Polynom (ganz oben): Es muss heissen

$$t^2 - t(a + d) + ad - bc.$$

In der Diskriminante fehlt das ad dann auch, es muss heissen

$$D = a^2 + 2ad + d^2 - 4ad + 4bc.$$

Der Rest stimmt.

<u>Blatt 3, Aufgabe 12</u>

Sei $A \in M(n \times n, K)$, χ_A zerfalle in Linearfaktoren (sonst gibt es die Jordannormalform nicht).
Sei $a(\lambda, \geq m)$ die Anzahl der Jordanblöcke zum Eigenwert λ mit Größe $\geq m$.

<u>Beh.:</u> $a(\lambda, \geq m) = \dim \ker (A - \lambda \mathbb{1})^m - \dim \ker (A - \lambda \mathbb{1})^{m-1}$.

<u>Bew.:</u> Gelte $A = SJS^{-1}$, wobei J die Jordannormalform von A sei:

$$J = \begin{pmatrix} J_1 & & \\ & \ddots & \\ & & J_\ell \end{pmatrix} \quad \text{mit } J_i = \begin{pmatrix} \lambda_i & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ & & & \lambda_i \end{pmatrix} \in M(k_i \times k_i, K).$$

Die $J_1, \ldots, J_\ell$ sollen also die einzelnen Jordanblöcke sein.

Dann gilt:

$$\begin{aligned} &\dim \ker (A - \lambda \mathbb{1})^m - \dim \ker (A - \lambda \mathbb{1})^{m-1} \\ &\overset{1)}{=} \dim \ker (J - \lambda \mathbb{1})^m - \dim \ker (J - \lambda \mathbb{1})^{m-1} \\ &\overset{2)}{=} \sum_{i=1}^{\ell} \left(\dim \ker (J_i - \lambda \mathbb{1})^m - \dim \ker (J_i - \lambda \mathbb{1})^{m-1} \right) \\ &\overset{3)}{=} a(\lambda, \geq m). \end{aligned}$$

<u>Zu 1):</u> Es gilt: $A - \lambda \mathbb{1} = SJS^{-1} - \lambda \underbrace{S \mathbb{1} S^{-1}}_{= \mathbb{1}} = S(J - \lambda \mathbb{1})S^{-1}$,

außerdem: $(A - \lambda \mathbb{1})^r = S(J - \lambda \mathbb{1})^r S^{-1}$ für alle $r \geq 0$.

Somit geht $(J - \lambda \mathbb{1})^r$ aus $(A - \lambda \mathbb{1})^r$ durch einen Basiswechsel hervor, also gilt

$$\dim \ker (A - \lambda \mathbb{1})^r = \dim \ker (J - \lambda \mathbb{1})^r \quad \text{für alle } r \geq 0,$$

insbesondere gilt das für $r = m$ und $r = m - 1$.

<u>Zu 2):</u> Die Matrix $(J - \lambda \mathbb{1})^r$ sieht für $r \geq 0$ so aus:

$$(J - \lambda \mathbb{1})^r = \begin{pmatrix} (J_1 - \lambda \mathbb{1})^r & & \\ & \ddots & \\ & & (J_\ell - \lambda \mathbb{1})^r \end{pmatrix},$$

ist also eine „Blockdiagonalmatrix" (nicht zu verwechseln mit „Diagonalmatrix"!).
An der Form erkennt man, dass

$$\dim \ker (J - \lambda \mathbb{1})^r = \sum_{i=1}^{\ell} \dim \ker (J_i - \lambda \mathbb{1})^r$$

gelten muss — beim Berechnen des Kerns können sich die ℓ Blöcke gegenseitig nicht „beeinflussen".

Zu 3): Sei $i \in \{1, \dots, l\}$ fest. Wir wollen den i-ten Block untersuchen.

Klar ist:

Gilt $\lambda_i \neq \lambda$, so ist $\dim \ker (J_i - \lambda)^r = 0$ für alle $r \geq 0$.

Daher folgt:

Gilt $\lambda_i \neq \lambda$, so ist $\dim \ker (J_i - \lambda \mathbb{1})^m - \dim \ker (J_i - \lambda \mathbb{1})^{m-1} = 0 - 0 = 0$.

Also:

Gilt $\lambda_i \neq \lambda$, so ist der i-te Summand in der Summe 0.

Das ist auch richtig, denn J_i ist in diesem Fall kein Jordanblock zum Eigenwert λ.

Sei nun $\lambda_i = \lambda$. Betrachte:

$$J_i - \lambda_i \mathbb{1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & & 1 \\ & & & 0 \end{pmatrix}, \quad (J_i - \lambda_i \mathbb{1})^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & 1 \\ & & & & 0 \\ & & & & 0 \end{pmatrix},$$

$$(J_i - \lambda_i \mathbb{1})^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & 1 \\ & & & & & 0 \\ & & & & & 0 \\ & & & & & 0 \end{pmatrix}, \quad \dots, \quad (J_i - \lambda_i \mathbb{1})^{k_i - 1} = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & 1 \\ \vdots & & & 0 \\ \vdots & & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$(J_i - \lambda_i \mathbb{1})^{k_i} = 0.$$

Also: $\dim \ker (J_i - \lambda_i \mathbb{1})^r = \begin{cases} r, & \text{falls } r \leq k_i \\ k_i, & \text{falls } r > k_i \end{cases}$.

Daher:

$$\dim \ker (J_i - \lambda_i \mathbb{1})^m - \dim \ker (J_i - \lambda_i \mathbb{1})^{m-1}$$

$$= \begin{cases} m - (m-1), & \text{falls } k_i \geq m \text{ und } k_i \geq m-1 \\ k_i - k_i, & \text{falls } k_i < m \text{ und } k_i \geq m-1 \\ k_i - k_i, & \text{falls } k_i < m \text{ und } k_i < m-1 \end{cases} = \begin{cases} 1, & \text{falls } k_i \geq m \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}.$$

Also ist der i-te Summand genau dann 1, wenn $k_i \geq m$, und 0 sonst.

Die Summe über alle Summanden ist somit gleich der Anzahl derjenigen Blöcke,

deren Eigenwert gleich λ ist

und

deren Größe (k_i) mindestens m ist.

Bem.: In Anbetracht des Kochrezepts zum Aufstellen der Jordanbasis (eigentlich: „einer möglichen Jordanbasis“, denn i.A. gibt es unendlich viele) überrascht die Aussage der Aufgabe nicht: Denn für einen Block der Größe mindestens m benötigt man ja einen Vektor aus

$$\ker(A - \lambda \mathbb{1})^m,$$

welcher aber nicht in

$$\ker(A - \lambda \mathbb{1})^{m-1}$$

liegt.

Blatt 4, Aufgabe 13

i) Sei $A = SJS^{-1}$ für $A, J, S \in M(n\times n, K)$.

Beh.: $A^n = SJ^nS^{-1}$!

Bew.: $A^n = A\cdots A = \underbrace{SJ\cancel{S^{-1}}\cancel{S}J\cancel{S^{-1}}\cdots\cancel{S}J\cancel{S^{-1}}\cancel{S}JS^{-1}}_{n \text{ Mal } SJS^{-1}} = S\underbrace{J\cdots J}_{n \text{ Mal}}S^{-1} = SJ^nS^{-1}$.

ii) Sei $A = \begin{pmatrix} -11 & 0 & -12 \\ -6 & 1 & -6 \\ 10 & 0 & 11 \end{pmatrix} \in M(3\times 3, \mathbb{R})$.

Ges.: A^n für alle $n \geq 1$.

Dazu: Schnelle Möglichkeit (Glück, dass es hier so einfach ist):

$$A^2 = \begin{pmatrix} -11 & 0 & -12 \\ -6 & 1 & -6 \\ 10 & 0 & 11 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & 1 \end{pmatrix},$$

daher $A^3 = A^2 \cdot A = \mathbb{1}\cdot A = A$,

$A^4 = A^3 \cdot A = A \cdot A = A^2 = \mathbb{1}$,

$A^5 = A^4 \cdot A = \mathbb{1}\cdot A = A, \quad \ldots,$

also $A^n = \begin{cases} A, & n \text{ ungerade} \\ \mathbb{1}, & n \text{ gerade} \end{cases}$.

Systematische Möglichkeit:

Berechne Jordanform von A!

Entwicklung nach zweiter Spalte

Char. Poly: $\chi_A(t) = \det\begin{pmatrix} -11-t & 0 & -12 \\ -6 & 1-t & -6 \\ 10 & 0 & 11-t \end{pmatrix} = (1-t)\underbrace{\det\begin{pmatrix} -11-t & -12 \\ 10 & 11-t \end{pmatrix}} = -(t-1)^2(t+1)$

$= -(11+t)(11-t) + 120$

$= t^2 - 1 = (t-1)(t+1)$

Also Jordannormalform:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & \\ & 1 & \\ & & -1 \end{pmatrix} \text{ oder } \begin{pmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & -1 \end{pmatrix}.$$

$\ker(A - \mathbb{1}) = \ker\begin{pmatrix} -12 & 0 & -12 \\ -6 & 0 & -6 \\ 10 & 0 & 10 \end{pmatrix} = \operatorname{span}\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}\right)$, also zwei Jordanblöcke zum Eigenwert 1, also JNF:

$$J := \begin{pmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & -1 \end{pmatrix}.$$

$\ker(A + \mathbb{1}) = \ker\begin{pmatrix} -10 & 0 & -12 \\ -6 & 2 & -6 \\ 10 & 0 & 12 \end{pmatrix} = \cancel{\ker}\operatorname{span}\left(\begin{pmatrix} 6 \\ 3 \\ -5 \end{pmatrix}\right)$.

Also: $A = SJS^{-1}$ mit $S = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 6 \\ 1 & 0 & 3 \\ 0 & -1 & -5 \end{pmatrix}$, $S^{-1} = \text{(Nebenrechnung)} = \begin{pmatrix} -3 & 1 & -3 \\ -5 & 0 & -6 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Es gilt: $J^n = \begin{pmatrix} 1^n & & \\ & 1^n & \\ & & (-1)^n \end{pmatrix} = \begin{cases} \mathbb{1}, & n \text{ gerade} \\ J, & n \text{ ungerade} \end{cases}$.

Also für n gerade: $A^n = SJ^nS^{-1} = S\mathbb{1}S^{-1} = \mathbb{1}$,

für n ungerade: $A^n = SJ^nS^{-1} = S\begin{pmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & -1 \end{pmatrix}S^{-1} = \begin{pmatrix} -11 & 0 & -12 \\ -6 & 1 & -6 \\ 10 & 0 & 11 \end{pmatrix} = A$.

Blatt ~~0~~4, Aufgabe 4

Geg: $a, b \in \mathbb{C}$.

Ges: Komplexer Lösungsraum von

$$y'' + ay' + by \overset{!}{=} 0. \qquad (*)$$

Dazu: Definiere $v := y'$. Dann gilt:

$$\begin{pmatrix} y \\ v \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} y' \\ v' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v \\ y'' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v \\ -ay'-by \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v \\ -av-by \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -b & -a \end{pmatrix}}_{=:A} \begin{pmatrix} y \\ v \end{pmatrix} \qquad (**)$$

Nach Vorlesung gilt daher:

Lösungsraum von $(**)$ $= \{ (t \mapsto c_1(\text{erste Spalte von } e^{At}) + c_2(\text{zweite Spalte von } e^{At})) \mid c_1, c_2 \in \mathbb{C} \}$

Und für den Lösungsraum von $(*)$ gilt:

Lösungsraum von $(*)$ $= \{ (t \mapsto c_1(\text{erste Komponente der ersten Spalte von } e^{At})$
$+ c_2(\text{erste Komponente der zweiten Spalte von } e^{At})) \mid c_1, c_2 \in \mathbb{C} \}$ $(\#)$

Denn die eigentlich gesuchte Funktion y ist ja die erste (obere) Komponente von $\begin{pmatrix} y \\ v \end{pmatrix}$.

Wir müssen also nur noch e^{At} ausrechnen. Dazu benötigen wir zunächst die Jordannormalform (samt -Basis) von A.

Char. Polynom: $\chi_A(t) = \det \begin{pmatrix} 0-t & 1 \\ -b & -a-t \end{pmatrix} = (-t)(-a-t) + b = t^2 + at + b.$

Diskriminante: $\Delta = a^2 - 4b$.

Fall 1: $\Delta \neq 0$.

Eigenwerte: $\lambda_{1,2} = \frac{1}{2}(-a \pm \sqrt{\Delta})$, $\lambda_1 \neq \lambda_2$, also Jordannormalform: $J = \begin{pmatrix} \lambda_1 & \\ & \lambda_2 \end{pmatrix}$.

$$\ker(A - \lambda_1 \mathbb{1}) = \ker \begin{pmatrix} -\lambda_1 & 1 \\ -b & -a-\lambda_1 \end{pmatrix} = \ker \begin{pmatrix} -\lambda_1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \operatorname{span}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ \lambda_1 \end{pmatrix}\right)$$

$II' := II + (a+\lambda_1) I$

Nebenrechnung: $-b + \underbrace{(a+\lambda_1)}_{=\frac{1}{2}(a+\sqrt{\Delta})}\underbrace{(-\lambda_1)}_{=\frac{1}{2}(a-\sqrt{\Delta})} = -b + \frac{1}{4}\underbrace{(a^2 - \Delta)}_{=4b} = -b + b = 0.$

analog: $\ker(A - \lambda_2 \mathbb{1}) = \operatorname{span}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ \lambda_2 \end{pmatrix}\right)$.

Also: $A = SJS^{-1}$ mit $S = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 \end{pmatrix}$, $S^{-1} = \frac{1}{\lambda_2 - \lambda_1} \begin{pmatrix} \lambda_2 & -1 \\ -\lambda_1 & 1 \end{pmatrix}$.

Somit:
$$e^{At} = S e^{Jt} S^{-1} = S e^{\begin{pmatrix} \lambda_1 t & \\ & \lambda_2 t \end{pmatrix}} S^{-1}$$
$$= S \begin{pmatrix} e^{\lambda_1 t} & \\ & e^{\lambda_2 t} \end{pmatrix} S^{-1}$$
$$= \frac{1}{\lambda_2 - \lambda_1} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 \end{pmatrix} \underbrace{\begin{pmatrix} e^{\lambda_1 t} & \\ & e^{\lambda_2 t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_2 & -1 \\ -\lambda_1 & 1 \end{pmatrix}}_{= \begin{pmatrix} \lambda_2 e^{\lambda_1 t} & -e^{\lambda_1 t} \\ -\lambda_1 e^{\lambda_2 t} & e^{\lambda_2 t} \end{pmatrix}}$$

$$= \frac{1}{\lambda_2 - \lambda_1} \begin{pmatrix} \lambda_2 e^{\lambda_1 t} - \lambda_1 e^{\lambda_2 t} & e^{\lambda_2 t} - e^{\lambda_1 t} \\ \dots & \dots \end{pmatrix}$$

benötigen wir für die Antwort (#) gar nicht

<u>Fall 2:</u> $D = 0$

Dann gibt es nur einen Eigenwert, $\lambda = -\frac{a}{2}$, die Jordannormalform ist $\begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$ oder $\begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$.

$$\ker(A - \lambda \mathbb{1}) = \ker \begin{pmatrix} -\lambda & 1 \\ -b & -a-\lambda \end{pmatrix} \underset{II' := II + (a+\lambda) I}{=} \ker \begin{pmatrix} -\lambda & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \operatorname{span}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ \lambda \end{pmatrix}\right)$$

$\operatorname{Rang}\begin{pmatrix} -\lambda & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = 1$, also dim $\ker \begin{pmatrix} -\lambda & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = 2 - 1 = 1$

Also gibt es nur einen Jordanblock, die Jordannormalform ist: $J := \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$.

Zur Bestimmung der Jordanbasis benötigen wir einen Vektor $w \in \ker(A - \lambda \mathbb{1})^2 \setminus \ker(A-\lambda \mathbb{1})$. Da $\ker(A - \lambda \mathbb{1})^2 = \mathbb{R}^2$ (es gibt keine andere Möglichkeit, wir können uns die Rechnung dazu sparen).

Wähle $w := \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, dann $(A - \lambda \mathbb{1}) w = \begin{pmatrix} 1 \\ -a-\lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -a/2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ \lambda \end{pmatrix}$.

Somit Jordanbasis: $\begin{pmatrix} 1 \\ \lambda \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $S = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \lambda & 1 \end{pmatrix}$, $S^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\lambda & 1 \end{pmatrix}$.

Also:
$$e^{At} = S e^{\begin{pmatrix} \lambda t & t \\ 0 & \lambda t \end{pmatrix}} S^{-1} \underset{\text{Beispiel aus Vorlesung}}{=} S \begin{pmatrix} e^{\lambda t} & t e^{\lambda t} \\ 0 & e^{\lambda t} \end{pmatrix} S^{-1} = \begin{pmatrix} e^{\lambda t} - \lambda t e^{\lambda t} & t e^{\lambda t} \\ \dots & \dots \end{pmatrix}$$

brauchen wir nicht

Nachtrag zu Blatt 5, Aufgabe 19

Bei iii) war noch zu zeigen:

Beh.: $Bil_+(V) \cap Bil_-(V) = \{0\}$.

Bew.: „⊇": ✓

„⊆": Sei $\lambda \in Bil_+(V) \cap Bil_-(V)$ beliebig.

Dann gilt für alle $x, y \in V$:

$$\lambda(x,y) = \lambda(y,x), \quad \text{da } \lambda \text{ symmetrisch.}$$

Andererseits gilt auch

$$\lambda(x,y) = -\lambda(y,x), \quad \text{da } \lambda \text{ schiefsymmetrisch.}$$

Somit folgt

$$\lambda(y,x) = -\lambda(y,x),$$

also

$$\lambda(y,x) = 0.$$

Nullfunktion

Da dies für alle $x,y \in V$ stimmt, gilt also $\lambda = 0$.

Lösungsvorschlag zu Aufgabe 23 von Blatt 6

Sei V endlich-dimensionaler K-Vektorraum und seien die Mengen

$$M_1 := \{f\colon V \to V^\star \mid f \text{ Isomorphismus}\}$$

und

$$M_2 := \{\lambda\colon V \times V \to K \mid \lambda \text{ nicht ausgeartete Bilinearform}\}$$

gegeben.

Behauptung. *Es gibt eine Bijektion zwischen M_1 und M_2.*

Beweis. Durch kanonische Überlegung kommt man auf die Abbildung

$$\begin{aligned} \varphi\colon\ M_1 &\longrightarrow M_2 \\ f &\longmapsto \varphi(f) = ((x,y) \mapsto f(x)(y)) \end{aligned}$$

Dabei ist mit $\varphi(f)$ also folgende Abbildung gemeint,

$$\begin{aligned} \varphi(f)\colon\ V \times V &\longrightarrow K \\ (x,y) &\longmapsto f(x)(y), \end{aligned}$$

und die Schreibweise $f(x)(y)$ ergibt Sinn, denn da $f \in M_1$, ist $f(x)$ ein Element von $V^\star$, insbesondere also eine Abbildung, die ein Argument $y \in V$ auf ein Element von K schickt.

Warnung: Nicht φ mit $\varphi(f)$, und nicht f mit $f(x)$ verwechseln!

Es ist nun zu zeigen, dass φ wohldefiniert, injektiv und surjektiv ist.

– *Wohldefiniertheit:* Zu zeigen ist, dass die Abbildung $\varphi(f)$ für jedes $f \in M_1$ wirklich ein Element von M_2 ist, d. h. dass $\varphi(f)$ bilinear und nicht ausgeartet ist.

  Additivität im ersten Argument: $\varphi(f)(x+\tilde{x},y) = f(x+\tilde{x})(y) = (f(x)+f(\tilde{x}))(y) = f(x)(y)+f(\tilde{x})(y) = \varphi(f)(x,y)+\varphi(f)(\tilde{x},y)$ für alle $x,\tilde{x},y \in V$ (dabei folgt das zweite Gleichheitszeichen wegen der Linearität von f und das dritte nach Definition der Addition von Abbildungen)

  Homogenität im ersten Argument: $\varphi(f)(ax,y) = f(ax)(y) = (af(x))(y) = af(x)(y) = a\varphi(f)(x,y)$ für alle $x,y \in V$, $a \in K$ (das zweite Gleichheitszeichen folgt wegen der Linearität von f, das dritte nach Definition der Skalarmultiplikation von Abbildungen mit Körperelementen)

  Additivität im zweiten Argument: $\varphi(f)(x,y+\tilde{y}) = f(x)(y+\tilde{y}) = f(x)(y) + f(x)(\tilde{y}) = \varphi(f)(x)+\varphi(f)(y)$ für alle $x,y,\tilde{y} \in V$ (dabei folgt das zweite Gleichheitszeichen wegen der Linearität von $f(x)$)

  Homogenität im zweiten Argument: $\varphi(f)(x,ay) = f(x)(ay) = af(x)(y) = a\varphi(f)(x,y)$ für alle $x,y \in V$, $a \in K$ (das zweite Gleichheitszeichen folgt wegen der Linearität von $f(x)$)

Nicht-Ausgeartetheit, Teil 1: Sei $x \in V$ fest. Sei $\varphi(f)(x,y) = 0$ für alle $y \in V$, wir müssen zeigen, dass $x = 0$. Nach Voraussetzung gilt also $f(x)(y) = 0$ für alle $y \in V$, also ist schon die Abbildung $f(x)$ die Nullabbildung, d. h. es gilt $f(x) = 0$. Da f insbesondere injektiv ist, folgt $x = 0$.

Nicht-Ausgeartetheit, Teil 2: Sei $y \in V$ fest und gelte $\varphi(f)(x,y) = 0$ für alle $x \in V$, wir müssen zeigen, dass $y = 0$. Dazu zeigen wir, dass $\alpha(y) = 0$ für alle $\alpha \in V^\star$, nach Vorlesung folgt dann schon, dass $y = 0$. Sei also $\alpha \in V^\star$ beliebig. Da f insbesondere surjektiv ist, gibt es ein $x \in V$ mit $f(x) = \alpha$. Somit folgt $\alpha(y) = f(x)(y) = 0$.

– *Injektivität:* Seien $f, g \in M_1$ mit $\varphi(f) = \varphi(g)$, wir müssen zeigen, dass $f = g$.

  Nach Voraussetzung folgt zunächst, dass $f(x)(y) = g(x)(y)$ für alle $x, y \in V$. Da diese Gleichheit für alle $y \in V$ gilt, folgt $f(x) = g(x)$. Da wiederum diese Gleichheit für alle $x \in V$ gilt, folgt $f = g$.

  Warnung: Da M_1 und M_2 keine Vektorräume sind, hat φ auch keine Chance, linear zu sein. Daher genügt es ohne gesonderte Begründung hier nicht, den typischen Ansatz $\varphi(f) = 0$ zu machen und danmn zu versuchen, $f = 0$ zu folgern.

– *Surjektivität:* Sei $\lambda \in M_2$ eine beliebige nicht ausgeartete Bilinearform. Wir müssen ein $f \in M_1$ mit $\varphi(f) = \lambda$ finden; ausgeschrieben bedeutet das, dass $\varphi(f)(x,y) = f(x)(y) = \lambda(x,y)$ für alle $x, y \in V$ gelten soll.

  Davon inspiriert definieren wir:

$$\begin{array}{rccl} f\colon & V & \longrightarrow & V^\star \\ & x & \longmapsto & f(x) = (y \mapsto \lambda(x,y)) \end{array}$$

  Dabei ist mit $f(x)$ also die Abbildung

$$\begin{array}{rccl} f(x)\colon & V & \longrightarrow & K \\ & y & \longmapsto & f(x)(y) = \lambda(x,y) \end{array}$$

  gemeint. Direkt nach Definition ist dann klar, dass $\varphi(f) = \lambda$; wir müssen aber noch zeigen, dass f wohldefiniert und wirklich ein Element von M_1 ist.

  Wohldefiniertheit: Zu zeigen ist, dass $f(x)$ für alle $x \in V$ wirklich ein Element von $V^\star$ ist, also wirklich eine lineare Abbildung von V nach K ist. Wir müssen also nachprüfen, ob

$$f(x)(y + \tilde{y}) = f(x)(y) + f(x)(\tilde{y}) \quad \text{und} \quad f(x)(ay) = af(x)(y)$$

  für alle $y, \tilde{y} \in V$ und $a \in K$ gilt. Wenn wir die Definition von $f(x)$ einsetzen, folgt das sofort über die Linearität von λ im zweiten Argument.

  Um zu zeigen, dass f ein Element von M_1 ist, müssen wir zeigen, dass f linear, injektiv und surjektiv ist.

  Linearität von f: Zu zeigen ist, dass

$$f(x + \tilde{x}) = f(x) + f(\tilde{x}) \quad \text{und} \quad f(ax) = af(x)$$

für alle $x, \tilde{x} \in V$ und $a \in K$ gilt. Da auf den linken und rechten Seiten jeweils Abbildungen (von V nach K) stehen, sind diese Aussagen gleichbedeutend damit, dass

$$f(x + \tilde{x})(y) = f(x)(y) + f(\tilde{x})(y) \quad \text{und} \quad f(ax)(y) = af(x)(y)$$

für alle $x, \tilde{x}, y \in V$ und $a \in K$ gilt. Wenn wir die Definition von f einsetzen, folgt das sofort über die Linearität von λ im ersten Argument.

Injektivität von f: Sei $f(x) = 0$ (Nullabbildung von V nach K), wir müssen zeigen, dass $x = 0$. Nach Voraussetzung gilt also $f(x)(y) = 0(y) = 0$ für alle $y \in V$; nach Definition folgt somit $\lambda(x, y) = 0$ für alle $y \in V$. Da λ nicht ausgeartet ist, gilt somit $x = 0$.

Surjektivität von f: Dazu hilft die Dimensionsformel:

$$\dim \operatorname{im} f = \dim V - \dim \ker f = \dim V - 0 = \dim V = \dim V^\star,$$

also folgt $\operatorname{im} f = V^\star$ und damit die Surjektivität von f. □

Abschließend noch ein paar Bemerkungen:

1. Die Hauptaufgabe bestand darin, auf die Abbildungsvorschrift von φ zu kommen. Danach waren zwar noch viele Nachweise zu erbringen, die meisten konnte man aber recht knapp erledigen. Um Unklarheiten vorzubeugen, wollte ich hier auch nichts abkürzen; in der Klausur hätte man aber an einigen Stellen (beispielsweise bei den Lineaeritätsprüfungen) auch einfach „klar“ hinschreiben können.

2. In der Linearen Algebra I hatten wir uns überlegt, dass es stets einen kanonischen Isomorphismus von V in den Bidualraum $(V^\star)^\star$ gibt. Die Aufgabe zeigt, dass es im Allgemeinen aber keinen kanonischen Isomorphismus von V nach $V^\star$ gibt, da es im Allgemeinen auch keine kanonische Bilinearform auf V gibt.

   Ist V allerdings nicht irgendein Vektorraum, sondern ein euklidischer, so kommt V ja mit einem Skalarprodukt $\langle\cdot,\cdot\rangle$ daher; nach Definition ist das Skalarprodukt gerade eine nicht ausgeartete Bilinearform, also ein Element von M_2, womit man in diesem Fall doch einen kanonischen Isomorphismus von V nach $V^\star$ angeben kann, nämlich $\varphi^{-1}(\langle\cdot,\cdot\rangle)$.

3. Im Kontext der Programmiersprache Haskell kommt der Übergang von M_1 zu M_2 sehr häufig vor. Man spricht da von „Currying“, nach dem Mathematiker und Logiker Haskell Curry.

Blatt 6, Aufgabe 24

$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ symmetrisch.

i) Ges.: rk A, Signatur(A).

ii) Ges.: $T \in GL_n(\mathbb{R})$ derart, dass ${}^tTAT$ Sylvesterform hat.

Wir erledigen beides zusammen. Um die Sylvesterform zu finden, muss man A mittels „simultaner Zeilen- und Spaltenumformungen" umformen:

$$\begin{array}{c} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ \hline \begin{pmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & 1 \end{pmatrix} \end{array} \xrightarrow[\substack{\text{Zeilen:} \\ II' := II - I \\ III' := III - 2I}]{} \begin{array}{c} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & -2 & -2 \\ 0 & -2 & -3 \end{pmatrix} \\ \hline \begin{pmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & 1 \end{pmatrix} \end{array} \xrightarrow[\substack{\text{Spalten:} \\ \text{genauso}}]{} \begin{array}{c} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & -2 \\ 0 & -2 & -3 \end{pmatrix} \\ \hline \begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{array} \longrightarrow$$

„die untere Matrix macht nur die Spaltenumformungen mit"

$$\xrightarrow[\substack{\text{Zeilen:} \\ III' := III - II}]{} \begin{array}{c} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \\ \hline \begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{array} \xrightarrow[\substack{\text{Spalten:} \\ \text{genauso}}]{} \begin{array}{c} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \\ \hline \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{array} \longrightarrow$$

$$\xrightarrow[\substack{\text{Zeilen:} \\ II' := \frac{1}{\sqrt{2}} II}]{} \begin{array}{c} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2/\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \\ \hline \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{array} \xrightarrow[\substack{\text{Spalten:} \\ \text{genauso}}]{} \begin{array}{c} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \\ \hline \begin{pmatrix} 1 & -1/\sqrt{2} & -1 \\ 0 & 1/\sqrt{2} & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{array}$$

Wichtige Warnung:
Die Sylvesterform symmetrischer Matrizen nicht mit der Diagonalform (falls existent) verwechseln!

Fazit: Definiert man $T := \begin{pmatrix} 1 & -1/\sqrt{2} & -1 \\ 0 & 1/\sqrt{2} & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, so hat ${}^tTAT$ Sylvesterform, nämlich $\begin{pmatrix} 1 & & \\ & -1 & \\ & & -1 \end{pmatrix}$.

Die Signatur ist 2 (zwei (−1)'er in der Sylvesterform), der Rang ist 0 (keine 0er in der Sylvesterform).

Bem.: Wäre man wirklich nur an Rang und Signatur interessiert gewesen, hätte man die Sylvesterform nicht unbedingt bestimmen müssen: Die Eigenwerte genügen.

$$\chi(t) = \det \begin{pmatrix} 1-t & 1 & 2 \\ 1 & -1-t & 0 \\ 2 & 0 & 1-t \end{pmatrix} = 2\big(1\cdot 0 - (-1-t)\cdot 2\big) + (1-t)\big((1-t)(-1-t) - 1\cdot 1\big)$$

Entwicklung nach dritter Zeile

$$= 4(t+1) + (1-t)(t^2-2)$$ — hiervon die Nullstellen zu finden, ist aber nicht leicht!

Daher ist dieses Verfahren i.A. vorzuziehen.

Blatt 6 Aufgabe 24 (Forts.)

Falls interessiert, hier eine grobe Erklärung dafür, wieso das Verfahren funktioniert, und wieso „die untere Matrix nur Spaltenumformungen mitmacht".

Angenommen, wir haben schon ein paar Schritte des Verfahrens (vielleicht auch null Schritte) ausgeführt, momentan liege das Tableau

$$\frac{\tilde{A}}{T}$$

vor und es gelte ${}^tTAT = \tilde{A}$.

Das Anwenden einer Zeilentransformation lässt sich wie folgt ausdrücken:

$$\frac{R\tilde{A}}{T}$$

Beispiel: Zur Zeilentransformation

$$\mathrm{II}' := \mathrm{II} - 3\cdot \mathrm{I}$$
$$\mathrm{III}' := \mathrm{III} - 5\cdot \mathrm{I}$$

gehört die Matrix

$$R = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & 0 \\ -5 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

denn sei beispielsweise $\tilde{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 0 \end{pmatrix}$ (Matrix nach der Transformation: $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -2 & 2 & 0 \\ -1 & 5 & -5 \end{pmatrix}$),

dann gilt:

$$R\tilde{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & 0 \\ -5 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -2 & 2 & 0 \\ -1 & 5 & -5 \end{pmatrix}$$

Die zugehörige Spaltentransformation ergibt sich durch

$$R\tilde{A}\,{}^tR = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -2 & 2 & 0 \\ -1 & 5 & -5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -3 & -5 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -3 & -4 \\ -2 & 8 & 10 \\ -1 & 8 & 0 \end{pmatrix}.$$

Folglich schreibt sich das Tableau nach Anwenden der zugehörigen Spaltentransformation als

$$\frac{R\tilde{A}\,{}^tR}{T\,{}^tR}$$

Um die Korrektheit dieses Verfahrensschritts einzusehen, müssen wir zeigen, dass weiterhin

^{t}(untere Matrix) $\cdot$ A $\cdot$ (untere Matrix) = (obere Matrix)

gilt.

Dazu: $^t(T\,^tR)\,A\,(T\,^tR) = R(^tT)AT(^tR) = R\tilde{A}\,^tR$ ✓

^{t}(untere Matrix) $\cdot$ A $\cdot$ (untere Matrix) obere Matrix

Damit haben wir allgemein gezeigt: Liegt ein korrektes Tableau vor, so ist auch das Nachfolgertableau korrekt.

Das Starttableau $\dfrac{A}{1_n}$ ist ebenfalls korrekt, da ^{t}(untere Matrix) $\cdot$ A $\cdot$ (untere Matrix) = $1_n A 1_n = A$ = (obere Matrix).

In der Datei blatt6-aufgabe24-seite1.jpeg steht unten im Fazit, dass der Rang der Matrix 0 sei. Das ist falsch: Der Rang ist 3, da es eben keine Nuller auf der Hauptdiagonale der Sylvesterform gibt.

Gaebe es genau eine Null auf der Hauptdiagonale, waere der Rang 2; bei zwei Nullern waere er 1; und bei drei Nullern waere er 0.

Blatt 7, Aufgabe 26

$V = \mathbb{R}^4$, $v_1 = \begin{pmatrix}1\\1\\0\\0\end{pmatrix}$, $v_2 = \begin{pmatrix}0\\0\\1\\1\end{pmatrix}$, $W = \mathrm{span}(v_1, v_2)$ (dim $W = 2$, da v_1, v_2 lin. unabh.)

$\pi: \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^4/W$, $v \mapsto [v]$

i) $B = \{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ Standardbasis in $\mathbb{R}^4$.

Beh.: $B_1 := \{[e_1], [e_3]\}$ ist eine Basis von $\mathbb{R}^4/W$.

Bew.: Da $\dim \mathbb{R}^4/W = \dim \mathbb{R}^4 - \dim W = 4 - 2 = 2$ und B_1 aus zwei Vektoren besteht, genügt es zu zeigen, dass B_1 lin. unabh. ist.

Sei also $\alpha_1 [e_1] + \alpha_3 [e_3] = 0$, zu zeigen: $\alpha_1 = \alpha_3 = 0$.

$$\alpha_1 [e_1] + \alpha_3 [e_3] = \left[\begin{pmatrix}\alpha_1\\0\\0\\0\end{pmatrix}\right] + \left[\begin{pmatrix}0\\0\\\alpha_3\\0\end{pmatrix}\right] = \left[\begin{pmatrix}\alpha_1\\0\\\alpha_3\\0\end{pmatrix}\right]$$

siehe (*) auf zweiter Seite!

$$\overset{(*)}{\Rightarrow} \begin{pmatrix}\alpha_1\\0\\\alpha_3\\0\end{pmatrix} \in W \Longrightarrow \begin{pmatrix}\alpha_1\\0\\\alpha_3\\0\end{pmatrix} = \beta_1 v_1 + \beta_2 v_2 = \begin{pmatrix}\beta_1\\\beta_1\\\beta_2\\\beta_2\end{pmatrix} \text{ für gewisse } \beta_1, \beta_2 \in \mathbb{R}$$

$$\Rightarrow \left\{\begin{array}{l}\alpha_1 = \beta_1\\ 0 = \beta_1\\ \alpha_3 = \beta_2\\ 0 = \beta_2\end{array}\right\} \Longrightarrow \alpha_1 = \alpha_3 = 0.$$

ii) Ges.: Matrix von π bzgl. der Basis B im Quellraum und der Basis B_1 im Zielraum

Bew.: Wir müssen die Bilder der Basisvektoren aus B unter der linearen Abbildung π als Linearkombinationen der Basisvektoren aus B_1 schreiben.

$\pi(e_1) = [e_1] = 1 \cdot [e_1] + 0 \cdot [e_3]$.

$\pi(e_2) = [e_2] = \left[\begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\end{pmatrix}\right] \underset{(\#)}{=} \left[\begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\end{pmatrix}\right] - \underbrace{\left[\begin{pmatrix}1\\1\\0\\0\end{pmatrix}\right]}_{\underset{(*)}{=0}} = \left[\begin{pmatrix}-1\\0\\0\\0\end{pmatrix}\right] = (-1)[e_1] + 0 \cdot [e_3]$.

$\pi(e_3) = [e_3] = 0 \cdot [e_1] + 1 \cdot [e_3]$.

$\pi(e_4) = [e_4] = \left[\begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\end{pmatrix}\right] \underset{(\#)}{=} \left[\begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\end{pmatrix}\right] - \underbrace{\left[\begin{pmatrix}0\\0\\1\\1\end{pmatrix}\right]}_{\underset{(*)}{=0}} = \left[\begin{pmatrix}0\\0\\-1\\0\end{pmatrix}\right] = 0 \cdot [e_1] + (-1) \cdot [e_3]$.

Also ist die gesuchte Matrix:

$$\begin{pmatrix}1 & -1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & -1\end{pmatrix}.$$

siehe (#) auf dritter Seite!

iii) Beh.: $B' := \{e_1, e_3, v_1, v_2\}$ ist eine Basis von $\mathbb{R}^4$.

Bew.: Da $\dim \mathbb{R}^4 = 4$ und B' vier Vektoren enthält, genügt es zu zeigen, dass B' linear unabhängig ist.

Erste Methode: $\det(e_1 | e_3 | v_1 | v_2) = \det\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \underset{\substack{\text{Entwicklung}\\ \text{nach erster}\\ \text{Spalte}}}{=} \det\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \underset{\substack{\text{Entwicklung}\\ \text{nach dritter}\\ \text{Zeile}}}{=} \det\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = -1 \neq 0.$ ✓

Zweite Methode: Sei $\alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_3 + \alpha_3 v_1 + \alpha_4 v_2 = 0$.

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} \alpha_1 + \alpha_3 \\ \alpha_3 \\ \alpha_2 + \alpha_4 \\ \alpha_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} \alpha_1 + \alpha_3 = 0 \\ \alpha_3 = 0 \\ \alpha_2 + \alpha_4 = 0 \\ \alpha_4 = 0 \end{cases} \Rightarrow \alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = \alpha_4 = 0. \checkmark$$

Gs: Matrix von π bzgl. der Basis B' im Quellraum und B_1 im Zielraum.

Dazu: $\pi(e_1) = [e_1] = 1 \cdot [e_1] + 0 \cdot [e_3]$.

$\pi(e_3) = [e_3] = 0 \cdot [e_1] + 1 \cdot [e_3]$.

$\pi(v_1) = [v_1] \overset{(*)}{=} 0 = 0 \cdot [e_1] + 0 \cdot [e_3]$.

$\pi(v_2) = [v_2] \overset{(*)}{=} 0 = 0 \cdot [e_1] + 0 \cdot [e_3]$.

Also ist die gesuchte Matrix:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Zu (*): Wichtige Rechenregel im Umgang mit Quotientenvektorräumen V/U ist folgende:

Sei $x \in V$ beliebig.

Dann gilt: $[x] = 0 \in V/U \iff x \in U$.

Bew.: „$\Rightarrow$": Sei $[x] = 0 = [0]$.

$\Rightarrow x - 0 \in U \Rightarrow x \in U$

„$\Leftarrow$": Sei $x \in U$. $\Rightarrow x - 0 \in U \Rightarrow [x] = [0] = 0$.

Zu (#): In übersichtlichen Fällen wie hier kann man vielleicht die notwendige Ergänzung schnell sehen. Allgemein geht das so:

Wir wollen beispielsweise $\left[\begin{pmatrix}1\\2\\3\\4\end{pmatrix}\right]$ als Linearkombination der Basisvektoren von $\mathcal{B}_1$ schreiben.

Dazu: $\left[\begin{pmatrix}1\\2\\3\\4\end{pmatrix}\right] = \alpha \cdot [e_1] + \beta [e_3]$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{pmatrix}1\\2\\3\\4\end{pmatrix}\right] = \left[\begin{pmatrix}\alpha\\0\\\beta\\0\end{pmatrix}\right]$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{pmatrix}1-\alpha\\2\\3-\beta\\4\end{pmatrix}\right] = 0$$

$$\overset{(*)}{\Leftrightarrow} \begin{pmatrix}1-\alpha\\2\\3-\beta\\4\end{pmatrix} \in W$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix}1-\alpha\\2\\3-\beta\\4\end{pmatrix} = \lambda v_1 + \mu v_2 = \begin{pmatrix}\lambda\\\lambda\\\mu\\\mu\end{pmatrix} \text{ für gewisse } \lambda, \mu \in \mathbb{R}$$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{r} 1-\alpha = \lambda \\ 2 = \lambda \\ 3-\beta = \mu \\ 4 = \mu \end{array}\right\} \text{ für gewisse } \lambda, \mu \in \mathbb{R}$$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} \alpha = 1-\lambda = -1 \\ \lambda = 2 \\ \beta = 3-\mu = -1 \\ \mu = 4 \end{array}\right\} \text{ —— '' ——}$$

$$\Leftrightarrow \alpha = -1, \quad \beta = -1.$$

Also: $\left[\begin{pmatrix}1\\2\\3\\4\end{pmatrix}\right] = (-1)[e_1] + (-1)[e_3]$.

Blatt 7, Aufgabe 27

$f: \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3, \quad x \longmapsto Ax, \qquad A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$

i) Gs: Irgendeine Basis von $\mathbb{R}^3 / \ker A$.

Dazu: Laut Vorlesung müssen wir dazu zunächst eine Basis von $\ker A$ zu einer Basis des Gesamtraums $\mathbb{R}^3$ ergänzen.

$\ker A = \ker \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \underset{\text{Zeilen: } II' := II + I}{=} \ker \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \operatorname{Span}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}\right),$ also eine mögliche Basis von $\ker A$: $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$.

Eine mögliche Ergänzung zu einer Basis von $\mathbb{R}^3$ ist beispielsweise:

$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$

Denn diese drei Vektoren sind linear unabhängig:

$\det \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \underset{\text{Spalten: } I \leftrightarrow II}{=} \det \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \underset{\text{Spalten: } II \leftrightarrow III}{=} \det \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \underset{\text{ist eine obere Dreiecksmatrix}}{=} 1 \cdot 1 \cdot (-1) = (-1) \neq 0.$ ✓

Nach Vorlesung ~~sind dann die~~

Nach Vorlesung bilden dann die Äquivalenzklassen der ergänzten Basisvektoren eine Basis des Quotientenvektorraums:

$\left[\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right], \left[\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right].$

ii) Gs: Matrix von $\bar{f}$ bzgl. der Basis $\mathcal{B}$ im Quellraum und der Standardbasis in $\mathbb{R}^2$ im Zielraum, wobei

$\bar{f}: \mathbb{R}^3 / \ker A \longrightarrow \mathbb{R}^2$

$[v] \longmapsto f(v).$

Dazu: $\bar{f}\left(\left[\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right]\right) \underset{\text{Def. } \bar{f}}{=} f\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = A\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$

$\bar{f}\left(\left[\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right]\right) = f\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = A\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$

Also Matrix: $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}.$

Bem.: Wer in i) eine andere Basis gewählt hat, wird in ii) wahrscheinlich eine andere Matrix als Ergebnis erhalten. Das ist völlig okay.

Blatt 7, Aufgabe 28

i) Beh.: $\overline{\int_0^{2\pi}} : V/\mathrm{im}\, d \longrightarrow \mathbb{R}$ ist ein Isomorphismus

$$[f] \longmapsto \int_0^{2\pi} f$$

Bew.: 1) $\overline{\int_0^{2\pi}}$ ist wohldefiniert:

Dazu ist zu zeigen, dass

$$\overline{\int_0^{2\pi}}([f]) = \overline{\int_0^{2\pi}}([\tilde{f}]) \quad \text{für alle } f, \tilde{f} \in V \text{ mit } [f] = [\tilde{f}].$$

Das folgt so:

Sei $[f] = [\tilde{f}]$. $\overset{\text{Def.}}{\Longrightarrow} f - \tilde{f} \in \mathrm{im}\, d \overset{!}{=} \ker \int_0^{2\pi} \Rightarrow \int_0^{2\pi} (f - \tilde{f}) = 0.$

$$\Rightarrow \overline{\int_0^{2\pi}}([f]) = \int_0^{2\pi} f(x)\, dx = \int_0^{2\pi} \tilde{f}(x)\, dx = \overline{\int_0^{2\pi}}([\tilde{f}]). \checkmark$$

2) Linearität:

$$\overline{\int_0^{2\pi}}([f] + [\tilde{f}]) = \overline{\int_0^{2\pi}}([f + \tilde{f}]) = \int_0^{2\pi} (f + \hat{f}) = \int_0^{2\pi} f + \int_0^{2\pi} \hat{f} = \overline{\int_0^{2\pi}}([f]) + \overline{\int_0^{2\pi}}([\hat{f}]). \checkmark$$

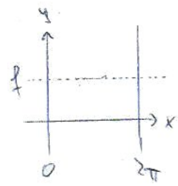
Homogenität analog.

3) Injektivität:

Sei $\overline{\int_0^{2\pi}}([f]) = 0. \Rightarrow \int_0^{2\pi} f(x)\, dx = 0 \Rightarrow f \in \ker \int_0^{2\pi} \Rightarrow [f] = 0 \in V/\mathrm{im}\, d$

$\mathrm{im}\, d = \ker \int_0^{2\pi}$

4) Surjektivität:



Sei $c \in \mathbb{R}$ beliebig.

Definiere $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto \frac{1}{2\pi} \cdot c$.

Dann gilt $f \in V$, denn f ist 2π-periodisch und unendlich oft differenzierbar.

Ferner gilt:

$$\overline{\int_0^{2\pi}}([f]) = \int_0^{2\pi} f(x)\, dx = \int_0^{2\pi} \frac{1}{2\pi} \cdot c\, dx = 2\pi \cdot \frac{1}{2\pi} \cdot c = c. \checkmark$$

Blatt 8, Aufgabe 29 ii)

Gesucht: Irgendeine Orthonormalbasis von $\mathbb{R}^3$ bzgl. des Skalarproduktes $\langle \cdot , \cdot \rangle$ mit

$$\langle x, y \rangle = {}^t x \, A \, y,$$

wobei

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Dazu: Wir beginnen mit irgendeiner Basis des $\mathbb{R}^3$, bspw.

$$b_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad b_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad b_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Diese müssen wir jetzt orthonormieren, mit dem Gram-Schmidt-Verfahren.

1) $$\tilde{a}_1 := b_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad a_1 := \tilde{a}_1 / \|\tilde{a}_1\| = \frac{1}{\sqrt{{}^t\tilde{a}_1 A \tilde{a}_1}} = \frac{1}{\sqrt{1}} \tilde{a}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

2) $$\tilde{a}_2 := b_2 - \langle b_2, a_1 \rangle a_1$$

$$= \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} - \underbrace{(0\ 1\ 0) \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}}_{= \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}}}_{= 1} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

$$a_2 := \tilde{a}_2 / \|\tilde{a}_2\| = \frac{1}{\sqrt{(-1\ 1\ 0) A \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}}} \cdot \tilde{a}_2 = \frac{1}{\sqrt{(-1\ 1\ 0)\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}}} \cdot \tilde{a}_2 = 1 \cdot \tilde{a}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

3) $$\tilde{a}_3 := b_3 - \langle b_3, a_1 \rangle a_1 - \langle b_3, a_2 \rangle a_2$$

$$= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} - \underbrace{(0\ 0\ 1) \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}}_{= \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}}}_{= 0} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} - \underbrace{(0\ 0\ 1) \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}}_{= \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}}}_{= 0} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$a_3 := \tilde{a}_3 / \|\tilde{a}_3\| = \frac{1}{\sqrt{(0\ 0\ 1) A \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}}} \cdot \tilde{a}_3 = \frac{1}{\sqrt{1}} \cdot \tilde{a}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Also ist eine mögliche Orthonormalbasis von $\mathbb{R}^3$ bzgl. $\langle \cdot , \cdot \rangle$: $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Blatt 8, Aufgabe 31

$\mathbb{R}^n$ mit dem Standardskalarprodukt.

i) $A \in O(n)$ = Menge der orthogonalen $(n\times n)$-Matrizen

$= \{ M \in \mathbb{R}^{n\times n};\ {}^tM \cdot M = \mathbb{1}_n \}$

$= \{ M \in \mathbb{R}^{n\times n};$ die Spalten von M ~~bilden~~ sind eine Orthonormalbasis von $\mathbb{R}^n \}$,

λ ein Eigenwert von A.

Beh.: $\lambda = \pm 1$.

Bew.: Sei $v \in \mathbb{R}^n$ irgendein Eigenvektor von A zum Eigenwert λ.
Nach Definition gilt somit $v \neq 0$ und $Av = \lambda v$.

Somit gilt: $\|Av\| = \|\lambda v\| = |\lambda|\ \|v\|$

$\underset{A \text{ orthogonal}}{=} \|v\|$ $\underset{\|v\| \neq 0}{\Longrightarrow} |\lambda| = 1 \Longrightarrow \lambda = \pm 1$.

ii) Sei $A \in O(n)$.

Beh.: $\det A = \pm 1$.

Bew.: Es gilt $\det({}^tA \cdot A) = \det(\mathbb{1}_n) = 1$

$= \det {}^tA \cdot \det A$

$= \det A \cdot \det A$ $\Longrightarrow (\det A)^2 = 1$

$\Longrightarrow \det A = \pm 1$

Frage: Gilt die umgekehrte Richtung?

Antwort: Nein, Gegenbeispiel:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & & & \\ & 1/2 & & \\ & & 1 & \\ & & & \ddots & \\ & & & & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n\times n}.$$

A ist nicht orthogonal (denn ${}^tA \cdot A = \begin{pmatrix} 4 & & & \\ & 1/4 & & \\ & & 1 & \\ & & & \ddots & \\ & & & & 1 \end{pmatrix} \neq \mathbb{1}_n$), aber $\det A = 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot 1 \cdots 1 = 1$.

Blatt 8, Aufgabe 31 (Forts.)

iii) Beh.: $SO(n) \subseteq O(n)$ ist ein Normalteiler.

Bew.: Zu zeigen ist:

$$\forall A \in SO(n) \ \forall B \in O(n): \quad B^{-1}AB \in SO(n)$$

Seien also $A \in SO(n)$, $B \in O(n)$ beliebig.

Dann gilt:

$$\det(B^{-1}AB) = \cancel{(\det B)^{-1}}(\det A)\cancel{(\det B)} = \det A = +1,$$

also in der Tat

$$B^{-1}AB \in SO(n).$$

Beh.: $O(n)/SO(n) \overset{(*)}{=} \left\{\left[\begin{pmatrix}1 & & \\ & \ddots & \\ & & 1\end{pmatrix}\right], \left[\begin{pmatrix}-1 & & & \\ & 1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & 1\end{pmatrix}\right]\right\}$, insbesondere hat $O(n)/SO(n)$ also genau zwei Elemente.

Bew.: Es gilt für alle $A, B \in O(n)$:

$$[A] = [B] \in SO(n)$$

$\iff B^{-1}A \in SO(n)$

$\iff B^{-1}A$ orthogonal und $\det(B^{-1}A) = 1$

$\iff \det(B^{-1}A) = 1$ (da $B^{-1}A$ eh orthogonal ist, da A, B^{-1} orthogonal)

$\iff (\det B)^{-1}(\det A) = 1$

$\iff \det A = \det B$.

Somit:

1) Jede Matrix $A \in O(n)$ erfüllt $\det A = +1$ oder $\det A = -1$,

also $[A] = \left[\begin{pmatrix}1 & & \\ & \ddots & \\ & & 1\end{pmatrix}\right]$ oder $[A] = \left[\begin{pmatrix}-1 & & & \\ & 1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & 1\end{pmatrix}\right]$.

Damit ist ~~die~~ „$\subseteq$" gezeigt, „$\supseteq$" ist eh klar.

2) $\left[\begin{pmatrix}1 & & \\ & \ddots & \\ & & 1\end{pmatrix}\right] \neq \left[\begin{pmatrix}-1 & & & \\ & 1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & 1\end{pmatrix}\right]$, denn $\det\begin{pmatrix}1 & & \\ & \ddots & \\ & & 1\end{pmatrix} = 1 \neq -1 = \det\begin{pmatrix}-1 & & & \\ & 1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & 1\end{pmatrix}$.

~~Also~~

Also: 1) zeigt $(*)$, 2) beweist, dass die beiden Elemente $\left[\begin{pmatrix}1 & & \\ & \ddots & \\ & & 1\end{pmatrix}\right]$ und $\left[\begin{pmatrix}-1 & & & \\ & 1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & 1\end{pmatrix}\right]$ wirklich verschieden sind. Damit ist alles gezeigt.

1

Lösungen Blatt 9

Aufgabe 33:

$$A = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

i) Beh: $A \in O(3)$

Beweis: z.z. ${}^tA\,A = \mathbb{1}$

$$\begin{array}{cc} & \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix} \\ \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 \\ -1 & 2 & 2 \\ 2 & -1 & 2 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{array}$$

ii) Beh:

$$S = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{2}{\sqrt{6}} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \text{ und } {}^tSAS = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) \\ 0 & \sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{pmatrix}, \alpha = \frac{\pi}{3}$$

Beweis:

Nach Vorlesg hat A entweder EW 1 oder EW -1

$$\mathrm{Eig}(1) = \ker \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -1 & -1 & 2 \\ 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \end{pmatrix} = \ker \begin{pmatrix} -1 & -1 & 2 \\ 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \end{pmatrix} = \ker \begin{pmatrix} -1 & -1 & 2 \\ 0 & -3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$= \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$$

Ergänze zu einer Basis von $\mathbb{R}^3$ und orthonormalisiere:

$$w_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad w_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad w_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$v_1 = \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$v_2' = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} - \left\langle \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} \\ -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} \end{pmatrix} \Rightarrow v_2 = \frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$w_3' = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} - \left\langle \frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle \frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} - \left\langle \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow v_3 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

(2)

$\Rightarrow$ ONB : $\frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$, $\frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix}2\\-1\\-1\end{pmatrix}$, $\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix}$

Setze $S = \left(v_1 \middle| v_2 \middle| v_3\right) \in O(3) \Rightarrow S^{-1} = {}^tS = \begin{pmatrix} {}^tv_1 \\ {}^tv_2 \\ {}^tv_3 \end{pmatrix}$

und

$${}^tS\ A\ S = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1/\sqrt{3} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{2}{\sqrt{6}} & -1/\sqrt{6} & -\frac{1}{\sqrt{6}} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{2}{\sqrt{6}} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} & -1/\sqrt{2} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & -1/2\sqrt{3} \\ 0 & 1/2\sqrt{3} & 1/2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\frac{\pi}{3} & -\sin\frac{\pi}{3} \\ 0 & \sin\frac{\pi}{3} & \cos\frac{\pi}{3} \end{pmatrix}$$

(3) Aufgabe 34:

$$U = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} \sqrt{2}+i(\sqrt{2}-2) & (\sqrt{2}+2)-i\sqrt{2} \\ -(\sqrt{2}+2)+i\sqrt{2} & \sqrt{2}+i(\sqrt{2}-2) \end{pmatrix}$$

i) Beh: U ist unitär

Beweis: z.z. $^t\bar{U} \cdot U = \mathbb{1}$

$$^t\bar{U} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} \sqrt{2}-i(\sqrt{2}-2) & -(\sqrt{2}+2)-i\sqrt{2} \\ (\sqrt{2}+2)+i\sqrt{2} & \sqrt{2}-i(\sqrt{2}-2) \end{pmatrix}$$

$$^t\bar{U} \cdot U = \frac{1}{16}\begin{pmatrix} \sqrt{2}-i(\sqrt{2}-2) & -(\sqrt{2}+2)-i\sqrt{2} \\ (\sqrt{2}+2)+i\sqrt{2} & \sqrt{2}-i(\sqrt{2}-2) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \sqrt{2}+i(\sqrt{2}-2) & (\sqrt{2}+2)-i\sqrt{2} \\ -(\sqrt{2}+2)+i\sqrt{2} & \sqrt{2}+i(\sqrt{2}-2) \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{16}\begin{pmatrix} 2+(\sqrt{2}-2)^2+(\sqrt{2}+2)^2+2 & 0 \\ 0 & (\sqrt{2}+2)^2+2+2+(\sqrt{2}-2)^2 \end{pmatrix} = \mathbb{1}$$

ii) Beh:

$$T = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -i & i \end{pmatrix} \quad \text{und } T^{-1}UT = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}$$

Beweis:

$$\chi_U(x) = \det(U - x\mathbb{1}) \overset{\det(r\cdot A) = r^n \cdot \det(A)}{=} \frac{1}{16}\det\begin{pmatrix} \sqrt{2}+i(\sqrt{2}-2)-4x & (\sqrt{2}+2)-i\sqrt{2} \\ -(\sqrt{2}+2)+i\sqrt{2} & \sqrt{2}+i(\sqrt{2}-2)-4x \end{pmatrix}$$

$$= x^2 - \tfrac{1}{2}x\left(\sqrt{2}+i(\sqrt{2}-2)\right) + \frac{\sqrt{2}}{2} = (x+i)\left(x-\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}i\right)$$

$\Rightarrow$ EW $\lambda_1 = -i$, $\lambda_2 = \frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}$

(4) $\operatorname{Eig}(-i) = \ker(U + i\mathbb{1})$

$$= \ker \begin{pmatrix} \sqrt{2} + i(\sqrt{2}-2) + 4i & -(\sqrt{2}+2) + i\sqrt{2} \\ (\sqrt{2}+2) - i\sqrt{2} & \sqrt{2} + i(\sqrt{2}-2) + 4i \end{pmatrix}$$

Es ist $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix} \in \operatorname{Eig}(-i)$

Ergänze zu einer ONB von $\mathbb{C}^2$

Suche w_2 mit $\begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix} \perp w$, d.h.

$$^t w_2 \circ \bar{v}_1 = 0 \iff (w_2^1 \; w_2^2) \circ \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix} = 0 \iff w_2^1 + i w_2^2 = 0$$

$$\iff w_2^1 = -i \cdot w_2^2$$

Setze $w_2^1 = 1 \Rightarrow w_2^2 = i$

Also $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix}$, $w_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix}$ orthogonale Basis

Orthonormalisiere:

$$w_1 = \frac{v_1}{\|v_1\|} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix}$$

$$w_2 = \frac{v_2}{\|v_2\|} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix} \qquad \Rightarrow w_1, w_2 \text{ ist ONB}$$

Setze $T = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -i & i \end{pmatrix}$, dann ist $^t\bar{T} = T^{-1} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & +i \\ 1 & -i \end{pmatrix}$

$$^t\bar{T} \circ A \circ T = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}$$

Blatt 9 Aufgabe 35

Ges: Isomorphismus zwischen $U(1)$ und $SO(2)$.

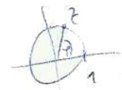
Erin.: $U(1) = \{ (z) \in M(1 \times 1, \mathbb{C});\ \ {}^t\overline{(z)} \cdot (z) = \mathbb{1} \} = \{ (z) \in M(1 \times 1, \mathbb{C});\ \ z\bar{z} = 1 \}$

$SO(2) = \{ A \in M(2 \times 2, \mathbb{R});\ \ {}^tA \cdot A = \mathbb{1},\ \det A = 1 \}$.

Bew.: Definiere:

$$\varphi: U(1) \longrightarrow SO(2)$$
$$(z) \longmapsto \begin{pmatrix} \operatorname{Re} z & -\operatorname{Im} z \\ \operatorname{Im} z & \operatorname{Re} z \end{pmatrix}$$

Matrix zur Drehung um den Winkel, den z zur Re-Achse hat



Dann gilt:

0) φ ist wohldefiniert, d.h. zu zeigen ist, dass $\varphi((z))$ für $(z) \in U(1)$ in der Tat ein Element von $SO(2)$ ist.

Also: $${}^t\varphi((z))\,\varphi((z)) = \begin{pmatrix} \operatorname{Re} z & \operatorname{Im} z \\ -\operatorname{Im} z & \operatorname{Re} z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \operatorname{Re} z & -\operatorname{Im} z \\ \operatorname{Im} z & \operatorname{Re} z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (\operatorname{Re} z)^2 + (\operatorname{Im} z)^2 & 0 \\ 0 & (\operatorname{Re} z)^2 + (\operatorname{Im} z)^2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} |z|^2 & 0 \\ 0 & |z|^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z\bar{z} & 0 \\ 0 & z\bar{z} \end{pmatrix} = \mathbb{1} \checkmark$$

$$\det \varphi((z)) = (\operatorname{Re} z)^2 - (\operatorname{Im} z)(-\operatorname{Im} z) = (\operatorname{Re} z)^2 + (\operatorname{Im} z)^2 = |z|^2 = 1 \checkmark$$

1) φ ist ein Gruppenhomomorphismus:

- $\varphi(\mathbb{1}) = \varphi((1)) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \mathbb{1} \checkmark$
- $\varphi((z)(w)) = \varphi((zw)) = \begin{pmatrix} \operatorname{Re}(zw) & -\operatorname{Im}(zw) \\ \operatorname{Im}(zw) & \operatorname{Re}(zw) \end{pmatrix}$ $= \checkmark$ (Formel für Multiplikation in $\mathbb{C}$)

$$\varphi((z))\,\varphi((w)) = \begin{pmatrix} \operatorname{Re} z & -\operatorname{Im} z \\ \operatorname{Im} z & \operatorname{Re} z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \operatorname{Re} w & -\operatorname{Im} w \\ \operatorname{Im} w & \operatorname{Re} w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (\operatorname{Re} z)(\operatorname{Re} w) - (\operatorname{Im} z)(\operatorname{Im} w) & -(\operatorname{Re} z)(\operatorname{Im} w) - (\operatorname{Im} z)(\operatorname{Re} w) \\ (\operatorname{Im} z)(\operatorname{Re} w) + (\operatorname{Re} z)(\operatorname{Im} w) & -(\operatorname{Im} z)(\operatorname{Im} w) + (\operatorname{Re} z)(\operatorname{Re} w) \end{pmatrix}$$

2) Injektivität: Sei $\varphi((z)) = \varphi((w))$. Dann folgt $\operatorname{Re} z = \operatorname{Re} w$ und $\operatorname{Im} z = \operatorname{Im} w$, also in der Tat $z = w$ und somit auch $(z) = (w)$.

3) Surjektivität: Aus der Vorlesung wissen wir, dass jede Matrix aus $SO(2)$ von der Form $\begin{pmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi \\ \sin \varphi & \cos \varphi \end{pmatrix}$ für ein $\varphi \in \mathbb{R}$ ist. Wegen $e^{i\varphi} = \cos \varphi + i \sin \varphi$ folgt: $\varphi((e^{i\varphi})) = \begin{pmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi \\ \sin \varphi & \cos \varphi \end{pmatrix}$, also liegt in der Tat jede Matrix aus $SO(2)$ in der Wertemenge von φ, das war zu zeigen.

Beispiele zur Jordannormalform (ohne Basis)

1) $A = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 4 & 3 & 0 \\ -2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \in M(3 \times 3, \mathbb{R})$.

Char. Polynom: $\chi_A(t) = \det \begin{pmatrix} 5-t & 0 & 0 \\ 4 & 3-t & 0 \\ -2 & 1 & 3-t \end{pmatrix} = (3-t)^2(5-t)$. (1)

Möglichkeiten fürs Minimalpolynom μ_A: Alle normierten Teiler von χ_A, also:

1 (konstantes Einspolynom): scheidet aus, da das konstante Einspolynom niemals Minimalpolynom ist [außer wenn $A = ()$ die 0×0-Matrix ist...]

$(t-3)$: scheidet aus, hat nicht dieselben Nullstellen wie χ_A

$(t-5)$: ——— " ———

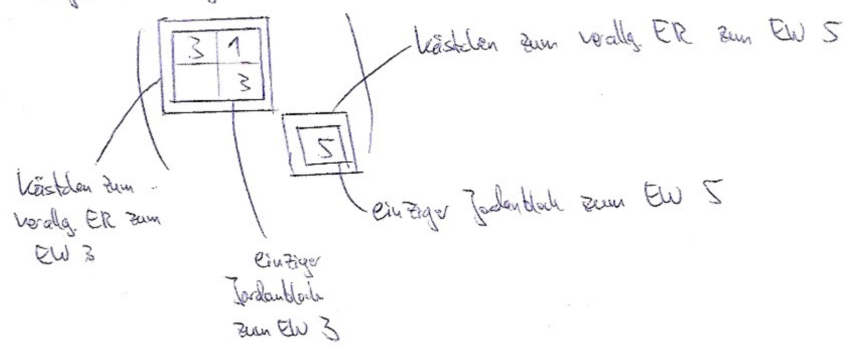
$(t-3)(t-5)$: $(A - 3\mathbb{1}_3)(A - 5\mathbb{1}_3) = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 4 & -2 & 0 \\ -2 & 1 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 4 & -2 & 0 \end{pmatrix} \neq 0$, scheidet also auch aus

$(t-3)^2(t-5)$: einzig verbliebene Möglichkeit. (2)

Nach Schritt (1) hat man schon sagen können, dass die JNF wie folgt aussehen muss:

$$\begin{pmatrix} \boxed{\begin{smallmatrix} 3 & 1 \\ & 3 \end{smallmatrix}} & \\ & \boxed{5} \end{pmatrix} \quad \text{oder} \quad \begin{pmatrix} \boxed{\boxed{3}\,\boxed{3}} & \\ & \boxed{5} \end{pmatrix}.$$

Der Exponent im Minimalpolynom gibt die Größe des größten Jordanblocks eines Eigenwerts. Da dieser für den Eigenwert 3 gleich 2 ist, muss es einen 2×2-Jordanblock für den Eigenwert 3 geben. Die JNF ist somit:



2) $A = \begin{pmatrix} -2 & -4 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \in M(3\times 3, \mathbb{R})$.

Char. Polynom: $\chi_A(t) = -t^3$.

A besitzt also nur einen Eigenwert, 0: die JNF muss sein:

$$\begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix} 0 & 1 & \\ & 0 & 1 \\ & & 0 \end{matrix}} \end{pmatrix} \quad \text{oder} \quad \begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix} 0 & 1 \\ & 0 \end{matrix}} & \\ & \boxed{0} \end{pmatrix} \quad \text{oder} \quad \begin{pmatrix} \boxed{0} & & \\ & \boxed{0} & \\ & & \boxed{0} \end{pmatrix}$$

Kästchen zu V(0), enthält einen Jordanblock

Kästchen zu V(0), enthält zwei Jordanblöcke

Kästchen zu V(0), enthält drei Jordanblöcke

Als nächstes bestimmen wir das Minimalpolynom, um herauszufinden, wie groß der größte der Jordanblöcke sein muss.

Möglichkeiten fürs Minimalpolynom p_A sind alle normierten Teiler von χ_A, also:

1: scheidet wie immer aus

X: scheidet aus, denn $A \neq 0$

X^2: $A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 0$ ✓, also ist $p_A(X) = X^2$ das Minimalpolynom.

(X^3: $A^3 = 0$, aber X^2 hat kleineren Grad.)

Somit hat der größte Jordanblock Größe 2x2. Somit liegt Variante 2 vor, die JNF ist:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & \\ & 0 & \\ & & 0 \end{pmatrix}.$$

<u>Bem:</u> Variante 3 hätte man auch aus einem anderen Grund ausschließen können: Denn die Matrix von Variante 3 hat Rang 0, A aber hat Rang 1, ~~Also~~ und der Rang ändert sich bei Basistransformationen nicht.

Analog hätte man über ein Rangargument auch Variante 1 ausschließen können.

$\tilde{2}$) $A = \begin{pmatrix} -2 & -4 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 7 \end{pmatrix} \in M(3\times 3, \mathbb{R})$.

Char. Polynom: $\chi_A(t) = -(t-7)\,t^2$.

Die JNF sieht also so aus:

$$\begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix} 0 & 1 \\ & 0 \end{matrix}} & \\ & \boxed{7} \end{pmatrix} \quad \text{oder} \quad \begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix} \boxed{0} & \\ & \boxed{0} \end{matrix}} & \\ & \boxed{\boxed{7}} \end{pmatrix}$$

Kästchen zu $V(0)$, enthält zwei Jordanblöcke

Kästchen zu $V(0)$, enthält einen Jordanblock

Kästchen zu $V(7)$, enthält einen Jordanblock

Argumentationsmöglichkeiten zur Klärung, welcher Fall vorliegt:

a) Minimalpolynom bestimmen, normierte Teiler von χ_A sind:

1: scheidet aus.

t: scheidet aus, hat nicht auch 7 als Nullstelle

$t-7$: — " — — " — — " —

$t(t-7)$: $A(A-7\cdot \mathbb{1}_3) = \begin{pmatrix} -2 & -4 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 7 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -9 & -4 & 0 \\ 1 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 14 & 28 & 0 \\ -7 & -14 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \neq 0$, scheidet aus

$t^2(t-7)$: einzige verbliebene Möglichkeit.

Also ist der größte Jordanblock zum EW 0 ein 2x2-Block, die JNF ist also

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & \\ & 0 & \\ & & 7 \end{pmatrix}.$$

b) $\operatorname{rk} A = 2$, $\operatorname{rk}\begin{pmatrix} 0 & 1 & \\ & 0 & \\ & & 7 \end{pmatrix} = 2$, $\operatorname{rk}\begin{pmatrix} 0 & 0 & \\ & 0 & \\ & & 7 \end{pmatrix} = 1$,

also scheidet die zweite Variante aus, also muss die JNF die erste Variante sein.

Bem.: In komplizierteren Fällen kann die Rangargumentation i.A. nicht alle bis auf eine Variante verwerfen, das war hier „Glück".

Beispiele zur Jordannormalform inkl. Jordanbasis

1) $A = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 4 & 3 & 0 \\ -2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \in M(3\times 3, \mathbb{R})$

Char. Polynom: $\chi_A(t) = -(t-3)^{2}(t-5)^{1}$

Verallg. Eigenräume:

Zum EW 3: Aus dem char. Poly wissen wir schon, dass dieser 2-dimensional sein muss.

$\ker(A - 3\mathbb{1}_3) = \ker\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \operatorname{span}\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$, noch nicht 2-dimensional!

$\ker(A - 3\mathbb{1}_3)^2 = \ker\begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 8 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \underbrace{\operatorname{span}\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right)}_{= V(3)}$, ist 2-dimensional, fertig!

Zum EW 5: Aus χ_A wissen wir, dass $V(5)$ 1-dimensional sein muss.

$\ker(A - 5\mathbb{1}_3) = \ker\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 4 & -2 & 0 \\ -2 & 1 & -2 \end{pmatrix} = \underbrace{\operatorname{span}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}\right)}_{= V(5)}$, ist 1-dimensional, fertig!

Zusammenstellung der Jordanbasis:

Zu $V(5)$: nehme einfach $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Zu $V(3)$: nehme als Erzeuger einen Vektor aus $\ker((A-3\mathbb{1}_3)^2)$, welcher nicht in $\ker(A-3\mathbb{1}_3)^1$ liegt, also beispielsweise $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Den zweiten Basisvektor erhält man dann, indem man ausrechnet:

$$(A - 3\mathbb{1}_3)\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix},$$

also $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

In umgekehrter Reihenfolge (damit die „Jordaneinser" oben statt unten stehen):

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Also Gesamtbasis: $\underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}}_{\text{für EW } 3}, \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}}_{\text{für EW } 5}$.

Matrix zu dieser Basis: $\begin{pmatrix} 3 & 1 & \\ & 3 & \\ & & 5 \end{pmatrix}$, Probe (rein logisch nicht benötigt):

$A\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = 3 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. ✓

$A\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} = 1 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + 3 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$. ✓

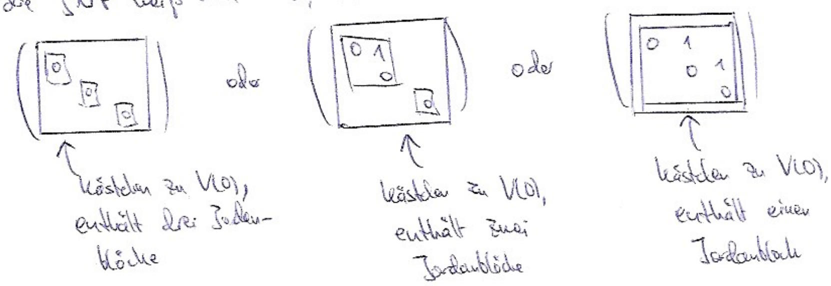
$A\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 10 \\ 0 \end{pmatrix} = 5 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$. ✓

2) $A = \begin{pmatrix} -2 & -4 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \in M(3 \times 3, \mathbb{R})$.

Char. Polynom: $\chi_A(t) = \det\begin{pmatrix} -2-t & -4 & 0 \\ 1 & 2-t & 0 \\ 0 & 0 & -t \end{pmatrix} = (-t)(t^2 - 4 + 4) = -t^3$.

A besitzt also nur einen Eigenwert, nämlich 0.

Über die JNF weiß man schon, dass sie so aussehen muss:



Eigenraum zum Eigenwert 0: $\ker(A - 0 \cdot 1_3) = \operatorname{span}\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right)$.

Dieser ist also zwei ~~eindimensional~~dimensional, folglich gibt es ~~einen~~ zwei Jordanblöcke zum Eigenwert 0.

Die JNF sieht also so aus:

$\cancel{\begin{pmatrix} 0 & 1 & \\ & 0 & 1 \\ & & 0 \end{pmatrix}}$. $\begin{pmatrix} 0 & 1 & \\ & 0 & \\ & & 0 \end{pmatrix}$.

Rechne: $\ker((A - 0 \cdot 1_3)^2) = \ker\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \mathbb{R}^3$, das muss der verallg. ER zum EW 0 sein.

Zur Jordanbasis:

Für das 2x2-Kästchen: Wähle einen Vektor in $\ker((A - 0 \cdot 1_3)^2)$, welcher nicht in $\ker((A - 0 \cdot 1_3)^1)$ liegt, beispielsweise $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.
Berechne dann $(A - 0 \cdot 1_3)\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.
In umgekehrter Reihenfolge: $\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Für das 1x1-Kästchen: Wähle einen Vektor in $\ker((A - 0 \cdot 1_3)^1)$, welcher nicht in $\ker((A - 0 \cdot 1_3)^0)$ liegt, und welcher linear unabhängig zu den bisherigen Basisvektoren ist.
Da $\ker((A - 0 \cdot 1_3)^0) = \ker 1_3 = \{0\}$, muss man hier auf nichts besonderes achten.
Wir wählen $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Also: Eine mögliche Basis ist $\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$,
und es gilt: $\mathbb{R}^3 = V(0)$, $V(0) = \underbrace{L_{A-0\cdot 1_3}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right)}_{= \operatorname{span}\left(\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right)} \oplus \underbrace{L_{A-0\cdot 1_3}\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right)}_{= \operatorname{span}\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right)}$.

Minimalpolynom: $\mu_A(X) = X^2$.

5) $A = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & -2 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \in M(3\times 3, \mathbb{R})$.

Char. Polynom: $\chi_A(t) = \det\begin{pmatrix} -t & -2 & 0 \\ 1 & -t & -2 \\ 0 & -1 & -t \end{pmatrix} = (-t)(t^2-2) - (2t) = t(2-t^2-2) = -t^3$.

Man weiß jetzt schon: Es gibt nur einen Eigenwert, nämlich 0. Der verallgemeinerte Eigenraum zum EW 0 ist daher $\mathbb{R}^3$. Man weiß aber noch nicht, wie viele Jordanblöcke der EW 0 besitzt. Mögliche Jordannormalformen:

$$\begin{pmatrix} \boxed{0} & & \\ & \boxed{0} & \\ & & \boxed{0} \end{pmatrix} \quad \text{oder} \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 & \\ & 0 & \\ & & 0 \end{pmatrix} \quad \text{oder} \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 & \\ & 0 & 1 \\ & & 0 \end{pmatrix}.$$

Rechne: $\ker\left((A - 0\cdot \mathbb{1}_3)^1\right) = \ker\begin{pmatrix} 0 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & -2 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} = \operatorname{span}\left(\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$.

Da also der (geometrische) Eigenraum zum Eigenwert 0 eindimensional ist, gibt es nur einen Jordanblock zum EW 0. Die JNF ist also

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & \\ & 0 & 1 \\ & & 0 \end{pmatrix}.$$

Rechne: $\ker\left((A - 0\cdot \mathbb{1}_3)^2\right) = \ker\begin{pmatrix} -2 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \operatorname{span}\left(\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right)$.

$\ker\left((A - 0\cdot \mathbb{1}_3)^3\right) = \ker\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \operatorname{span}\left(\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right) = \mathbb{R}^3$.

[Man weiß schon, dass hier der $\mathbb{R}^3$ herauskommen muss, wieso?]

Kann nicht noch größer werden, ist der verallg. ER zum EW 0

Zur Jordanbasis für den einzigen Jordanblock:

Wähle einen Vektor in $\ker\left((A - 0\cdot \mathbb{1}_3)^3\right)$, welcher nicht in $\ker\left((A - 0\cdot \mathbb{1}_3)^2\right)$ liegt, bspw. $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Berechne: $(A - 0\cdot \mathbb{1}_3)\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Berechne: $(A - 0\cdot \mathbb{1}_3)\begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$.

In umgekehrter Reihenfolge: $\begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Also: Eine mögliche Jordanbasis ist: $\begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Es gilt: $\mathbb{R}^3 = V(0)$, und $V(0) = L_{A-0\cdot\mathbb{1}_3}\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$.

Außerdem: $p_A(X) = X^3$ (Minimalpolynom).

4 $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \in M(3\times 3, \mathbb{R})$.

Char. Polynom: $\chi_A(t) = -t^3$.

Siehe Kommentar zu „man weiß jetzt schon" bei 3).

Rechne: $\ker(A - 0\cdot 1_3) = \ker\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \mathrm{span}\left(\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix}\right)$.

Da also der (geometrische) Eigenraum zum Eigenwert 0 zweidimensional ist, gibt es genau zwei Jordanblöcke zum EW 0. Aus Platzgründen müssen diese die Größen 2x2 und 1x1 haben. Die JNF ist also:

$$\begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix} 0 & 1 \\ & 0 \end{matrix}} & \\ & \boxed{0} \end{pmatrix}$$

Rechne: $\ker((A - 0\cdot 1_3)^2) = \ker\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \mathrm{span}\left(\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\right) = \mathbb{R}^3$.

größer geht's nicht, das ist $V(0)$.

Zur Jordanbasis für das 2x2-Kästchen:

Wähle bspw. $\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} \in \ker((A - 0\cdot 1_3)^2) \setminus \ker((A - 0\cdot 1_3)^1)$.

Berechne: $(A - 0\cdot 1_3)\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$.

Also Teilbasis: $\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$.

Zur Jordanbasis für das 1x1-Kästchen:

Wähle $\begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix}$, liegt in $\ker((A - 0\cdot 1)^1)$ und ist lin. unabh. zu den bisherigen Basisvektoren.

Also: Eine mögliche Jordanbasis ist: $\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix}$.

Es gilt: $\mathbb{R}^3 = V(0)$, $V(0) = L_{A-0\cdot 1_3}\left(\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\right) \oplus L_{A-0\cdot 1_3}\left(\begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix}\right)$.

Außerdem: $p_A(X) = X^2$. (Minimalpolynom)

5) Gegeben sei $N \in M(5\times 5, K)$ mit $N^3 = 0$ und $N^2 \neq 0$.
Was sind die möglichen Jordannormalformen von N?

Wegen $N^3 = 0$ ist N nilpotent. ~~Wenn wir voraussetzen, dass K algebraisch abgeschlossen ist,~~
~~wissen wir damit,~~

Außerdem wissen wir, dass das Minimalpolynom von N ein normierter Teiler von X^3 ist,
also:

1: fällt wie immer weg

X: fällt weg, denn $N \neq 0$ (sonst nämlich $N^2 = 0$, ↯).

X^2: fällt weg, denn $N^2 \neq 0$

X^3: einzige Möglichkeit.

Es ist also X^3 das Minimalpolynom von N.
(*) Der größte Jordanblock zum Eigenwert 0 ist daher ein 3×3-Block.

Somit gibt es für die JNF noch folgende Möglichkeiten:

$$\begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix} 0 & 1 & \\ & 0 & 1 \\ & & 0 \end{matrix}} & \\ & \boxed{\begin{matrix} 0 & 1 \\ & 0 \end{matrix}} \end{pmatrix} \quad \text{oder} \quad \begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix} 0 & 1 & \\ & 0 & 1 \\ & & 0 \end{matrix}} & & \\ & \boxed{0} & \\ & & \boxed{0} \end{pmatrix}.$$

<u>Bem.:</u> Ab (*) haben wir stillschweigend vorausgesetzt, dass K algebraisch abgeschlossen ist.
Denn um die JNF-Theorie anwenden zu können, muss gewährleistet sein, dass das charakteristische Polynom von N in Linearfaktoren zerfällt.

b)

$$A = \begin{pmatrix} 3 & & & 2 & \\ 1 & 3 & & & 2 \\ & & 3 & & \\ & & & 3 & \\ & & & & 0 \end{pmatrix} \in M(5\times 5, \mathbb{R}).$$

Char. Polynom: $$\chi_A(t) = \det \begin{pmatrix} 3-t & & & 2 & \\ 1 & 3-t & & & 2 \\ & & 3-t & & \\ & & & 3-t & \\ & & & & -t \end{pmatrix} = (-t)(3-t)^4 = -(t-3)^4 t.$$

Entwicklung nach letzter, dann vorletzter, dann vorvorletzter ... Zeile

Man weiß jetzt schon:

$\mathbb{R}^5 = V(0) \oplus V(3)$

$\dim V(0) = 1, \quad \dim V(3) = 4$

Also gibt es folgende Möglichkeiten für die JNF:

$$\begin{pmatrix} \boxed{0} & & & & \\ & 3 & 1 & & \\ & & 3 & 1 & \\ & & & 3 & 1 \\ & & & & 3 \end{pmatrix} \text{ oder } \begin{pmatrix} \boxed{0} & & & & \\ & 3 & 1 & & \\ & & 3 & 1 & \\ & & & 3 & \\ & & & & \boxed{3} \end{pmatrix} \text{ oder } \begin{pmatrix} \boxed{0} & & & & \\ & 3 & 1 & & \\ & & 3 & & \\ & & & 3 & 1 \\ & & & & 3 \end{pmatrix}$$

$$\text{oder } \begin{pmatrix} \boxed{0} & & & & \\ & 3 & 1 & & \\ & & 3 & & \\ & & & \boxed{3} & \\ & & & & \boxed{3} \end{pmatrix} \text{ oder } \begin{pmatrix} \boxed{0} & & & & \\ & \boxed{3} & & & \\ & & \boxed{3} & & \\ & & & \boxed{3} & \\ & & & & \boxed{3} \end{pmatrix}$$

Rechne: $$\ker(A - 3\cdot \mathbb{1}_5) = \ker \begin{pmatrix} 0 & & & 2 & \\ 1 & 0 & & & 2 \\ & & 0 & & \\ & & & 0 & \\ & & & & -3 \end{pmatrix} = \operatorname{span}\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right)$$

Es gibt also zwei Jordanblöcke zum EW 3. Folglich handelt es sich um Variante 2 oder 3

Rechne: $$\ker(A - 3\cdot \mathbb{1}_5)^2 = \ker \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 9 \end{pmatrix} = \operatorname{span}\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right).$$

Folglich gibt es genau einen Jordanblock zum EW 3, welcher mindestens Größe 2 hat.
Es bleibt also nur Variante 2. Jetzt kennen wir also die JNF.

Rechne: $$\ker(A - 3\cdot \mathbb{1}_5)^3 = \ker \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -54 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 81 \end{pmatrix} = \operatorname{span}\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right).$$

Jordanbasis im 3x3-Block zum EW 3:

Wähle $\begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\\0\end{pmatrix} \in \ker(A-3\cdot\mathbb{1}_5)^3 \setminus \ker(A-3\cdot\mathbb{1}_5)^2$.

Rechne: $(A-3\cdot\mathbb{1}_5)\begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\\0\\0\\0\\0\end{pmatrix}$, $\quad (A-3\cdot\mathbb{1}_5)\begin{pmatrix}2\\0\\0\\0\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\2\\0\\0\\0\end{pmatrix}$

Also in umgekehrter Reihenfolge:

$$\begin{pmatrix}0\\2\\0\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\0\\0\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\\0\end{pmatrix}.$$

Jordanbasis im 1x1-Block zum EW 3:

Wähle $\begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\\0\end{pmatrix} \in \ker(A-3\cdot\mathbb{1}_5)$, ist lin. unabh. zu den bisherigen Basisvektoren.

Jordanbasis im 1x1-Block zum EW 0:

Dazu rechne $\ker(A-0\cdot\mathbb{1}_5) = \operatorname{span}\left(\begin{pmatrix}0\\2\\0\\0\\-3\end{pmatrix}\right)$.

Also: Eine mögliche Jordanbasis ist:

$$\begin{pmatrix}0\\2\\0\\0\\-3\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\2\\0\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\0\\0\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\\0\end{pmatrix}.$$

$\mathbb{R}^5 = V(0) \oplus V(3)$,

$V(0) = L_{A-0\cdot\mathbb{1}_5}\left(\begin{pmatrix}0\\2\\0\\0\\-3\end{pmatrix}\right)$, $\quad V(3) = \underbrace{L_{A-3\cdot\mathbb{1}_5}\left(\begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\\0\end{pmatrix}\right)}_{=\operatorname{span}\left(\begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\0\\0\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\2\\0\\0\\0\end{pmatrix}\right)} \oplus \underbrace{L_{A-3\cdot\mathbb{1}_5}\left(\begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\\0\end{pmatrix}\right)}_{=\operatorname{span}\left(\begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\\0\end{pmatrix}\right)}$.

Gleichheit von linearen Abbildungen

Seien V, W Vektorräume über einem Körper K.

Seien $f, g\colon V \to W$ Abbildungen. Nach Definition gilt dann:

$$f = g \quad :\Leftrightarrow \quad f(v) = g(v) \text{ für alle } v \in V$$

Um festzustellen, ob f und g gleich sind, muss man also die Gleichheit an jeder Stelle $v \in V$ überprüfen. Im Fall, dass f und g linear sind, kann man sich aber ein bisschen Arbeit sparen! Und zwar genügt es, „die Gleichheit auf einer Basis zu testen“:

Proposition. *Sei $(v_1, \dots, v_n)$ eine Basis von V und f, g seien linear. Dann gilt:*

$$f = g \quad :\Leftrightarrow \quad f(v_i) = g(v_i) \text{ für } i = 1, \dots, n.$$

Beweis. „$\Rightarrow$“: klar.

„$\Leftarrow$“: Sei $v \in V$ beliebig, wir müssen $f(v) = g(v)$ zeigen. Dazu schreiben wir v als Linearkombination der Basisvektoren,

$$v = \sum_{i=1}^{n} a_i v_i$$

für gewisse $a_1, \dots, a_n \in K$. Dann folgt:

$$\begin{array}{rcccc} f(v) & = & f(\sum_{i=1}^n a_i v_i) & = & \sum_{i=1}^n a_i\, f(v_i) \\ & & & & \| \\ g(v) & = & g(\sum_{i=1}^n a_i v_i) & = & \sum_{i=1}^n a_i\, g(v_i) \end{array}$$

□

Lineare Algebra II, SS 2011 24. Juni 2011 Gleichheit von Abbildungen

Gleichheit von Bilinearformen

Sei V ein Vektorraum über K.

Seien $\lambda, \mu\colon V \times V \to \mathbb{R}$ Abbildungen. Nach Definition gilt dann:

$$\lambda = \mu \quad :\Leftrightarrow \quad \lambda(x, y) = \mu(x, y) \text{ für alle } x, y \in V$$

Um festzustellen, ob λ und g gleich sind, muss man also die Gleichheit an jeder Stelle $(x, y) \in V \times V$ überprüfen. Im Fall, dass λ und μ Bilinearformen sind, man sich aber ein bisschen Arbeit sparen! Und zwar genügt es, „die Gleichheit auf einer Basis zu testen“:

Proposition. *Seien $(v_1, \dots, v_n)$ und $(w_1, \dots, w_n)$ Basen von V und λ, μ seien bilinear. Dann gilt:*

$$\lambda = \mu \quad :\Leftrightarrow \quad \lambda(v_i, w_j) = \mu(v_i, w_j) \text{ für } i, j = 1, \dots, n.$$

Beweis. „$\Rightarrow$“: klar.

„$\Leftarrow$“: Seien $v, w \in V$ beliebig, wir müssen $\lambda(v, w) = \mu(v, w)$ zeigen. Dazu schreiben wir v und w als Linearkombinationen der Basisvektoren,

$$v = \sum_{i=1}^{n} a_i v_i, \quad w = \sum_{j=1}^{n} b_j w_j$$

für gewisse $a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_n \in K$. Dann folgt:

$$\begin{array}{rcccc} \lambda(v, w) & = & \lambda(\sum_{i=1}^n a_i v_i, \sum_{j=1}^n b_j w_j) & = & \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_i b_j \lambda(v_i, w_j) \\ & & & & \| \\ \mu(v, w) & = & \mu(\sum_{i=1}^n a_i v_i, \sum_{j=1}^n b_j w_j) & = & \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_i b_j \mu(v_i, w_j) \end{array}$$

□

Skalarprodukt und Norm

Def.: (Skalarprodukt)

Ein *Skalarprodukt* auf einem reellen Vektorraum V ist eine Abbildung

$$B\colon V \times V \longrightarrow \mathbb{R},$$

welche bilinear, symmetrisch und positiv definit ist.

Das bedeutet im Einzelnen für alle $x, x', y, y' \in V$, $a \in \mathbb{R}$:

$$B(x + x', y) = B(x, y) + B(x', y) \tag{1}$$
$$B(ax, y) = aB(x, y) \tag{2}$$

$$B(x, y + y') = B(x, y) + B(x, y') \tag{3}$$
$$B(x, ay) = aB(x, y) \tag{4}$$

$$B(x, y) = B(y, x) \tag{5}$$

$$B(x, x) \geq 0 \tag{6}$$
$$B(x, x) = 0 \quad \Rightarrow \quad x = 0 \tag{7}$$

Man schreibt auch gerne:

$$\langle x, y\rangle, \quad (x, y), \quad x \cdot y$$

für $B(x, y)$. Anschaulich hat das Skalarprodukt von zwei Vektoren etwas mit dem Winkel zwischen ihnen zu tun. Zwei Vektoren stehen genau dann aufeinander senkrecht, wenn ihr Skalarprodukt null ist.

Bsp.: (Beispiele für Skalarprodukte)

Das sog. Standardskalarprodukt (oder auch euklidische Skalarprodukt) auf dem $\mathbb{R}^n$ ist definiert durch:

$$\left\langle \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \right\rangle := x_1 y_1 + \cdots + x_n y_n$$

Ist ferner $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ irgendeine symmetrische und positiv definite Matrix, so definiert die Setzung

$$\langle x, y\rangle = {}^t x A y$$

für $x, y \in \mathbb{R}^n$ auch ein Skalarprodukt auf dem $\mathbb{R}^n$.

Def.: (Norm)

Eine *Norm* auf einem reellen Vektorraum V ist eine Abbildung

$$\|\cdot\|: V \longrightarrow \mathbb{R},$$

welche für alle $x, y \in V$, $a \in R$ folgende Axiome erfüllt:

$$\|x\| \geq 0 \tag{8}$$
$$\|x\| = 0 \quad \Rightarrow \quad x = 0 \tag{9}$$

$$\|ax\| = |a|\|x\| \tag{10}$$

$$\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\| \tag{11}$$

Anschaulich ist die Norm eines Vektors einfach seine Länge; jede Norm hat aber eine andere Vorstellung davon, was „Länge“ bedeuten soll. Nur die euklidische Norm stimmt mit dem Längenbegriff aus der Schule überein.

Bsp.: (Beispiele für Normen)

Einige Beispiele für Normen auf dem $\mathbb{R}^n$ sind:

$$\begin{aligned}
\|{}^t(x_1, \ldots, x_n)\|_2 &:= \sqrt{x_1^2 + \cdots + x_n^2} \\
\|{}^t(x_1, \ldots, x_n)\|_1 &:= |x_1| + \cdots + |x_n| \\
\|{}^t(x_1, \ldots, x_n)\|_\infty &:= \max_{i=1,\ldots,n} |x_i|
\end{aligned}$$

Die erste Norm dieser Aufzählung, $\|\cdot\|_2$, heißt auch Standardnorm oder euklidische Norm. Außerdem liefert jedes Skalarprodukt ein Beispiel für eine Norm:

Prop.: (Zusammenhang zwischen Skalarprodukten und Normen)

Ist B irgendein Skalarprodukt auf V, so ist die Abbildung

$$\begin{array}{rccc}
\|\cdot\|: & V & \longrightarrow & \mathbb{R} \\
& x & \longmapsto & \sqrt{B(x, x)}
\end{array}$$

eine Norm auf V. Hat man in einer konkreten Situation ein bestimmtes Skalarprodukt gegeben, und wird nichts spezielles über Normen gesagt, ist immer die so definierte Norm gemeint.

Nicht jede Norm kommt auf diese Weise von einem Skalarprodukt.

Orthogonalität von Vektoren

Sei V ein Vektorraum, auf dem ein Skalarprodukt $\langle \cdot, \cdot \rangle$ definiert ist.

Def.: (Normierung von Vektoren)

Ist $v \in V$ irgendein Vektor mit $v \neq 0$, so ist die *Normierung* von v definiert als der Vektor

$$\frac{1}{\|v\|} \cdot v.$$

Unabhängig von der Norm von v hat dieser stets die Norm 1.

Def.: (Orthogonalität von Vektoren)

Eine Familie $(v_1, \ldots, v_k)$ von Vektoren aus V heißt genau dann *orthogonal* (oder auch *Orthogonalsystem*), wenn für alle $i, j = 1, \ldots, k$ mit $i \neq j$ gilt:

$$\langle v_i, v_j \rangle = 0,$$

d. h. wenn je zwei Vektoren der Familie aufeinander senkrecht stehen.

Jede orthogonale Familie von Vektoren, in der nicht der Nullvektor vorkommt, ist linear unabhängig. Die Umkehrung dieser Aussage gilt nicht.

Warnung: Ein und dieselbe Familie kann bezüglich verschiedener Skalarprodukte mal schon und mal nicht orthogonal sein, daher muss man immer dazusagen, welches Skalarprodukt gemeint ist.

Def.: (Orthonormalität von Vektoren)

Eine Familie $(v_1, \ldots, v_k)$ von Vektoren auf V heißt genau dann *orthonormal* (oder auch *Orthonormalsystem*), wenn für alle $i, j = 1, \ldots, k$ gilt:

$$\langle v_i, v_j \rangle = \delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{für } i = j, \\ 0 & \text{sonst,} \end{cases}$$

d. h. wenn jeder Vektor der Familie Länge 1 hat (also normiert ist) und je zwei Vektoren aufeinander senkrecht stehen.

Jede orthonormale Familie von Vektoren ist linear unabhängig. Die Umkehrung dieser Aussage gilt nicht.

Def.: (Orthonormalbasis)

Eine *Orthonormalbasis* (ONB) ist eine Basis $(v_1, \ldots, v_n)$ derart, dass die Familie $(v_1, \ldots, v_n)$ orthonormal ist.

Jede beliebige Basis kann mit dem Gram–Schmidt-Verfahren orthonormiert werden.

Eigenschaften von Matrizen

Sei in diesem Abschnitt $\langle \cdot, \cdot \rangle$ das Standardskalarprodukt auf dem $\mathbb{R}^n$ und $\| \cdot \|$ die Standardnorm auf dem $\mathbb{R}^n$.

Def. (Symmetrie von Matrizen)

Eine Matrix $M \in \mathbb{R}^{n \times n}$ heißt genau dann *symmetrisch*, wenn gilt:

$$^tM = M.$$

Def.: (Orthogonalität von Matrizen)

Eine Matrix $M \in \mathbb{R}^{n \times n}$ heißt genau dann *orthogonal*, wenn schon eine der folgenden äquivalenten Bedingungen erfüllt ist:

1. $^tM \cdot M = \mathbb{1}_n$.
2. $M \cdot {}^tM = \mathbb{1}_n$.
3. M ist invertierbar mit $M^{-1} = {}^tM$.

4. Die Spalten von M bilden bezüglich des Standardskalarprodukts in $\mathbb{R}^n$ ein Ortho*normal*system (!).
5. Die Zeilen von M bilden bezüglich des Standardskalarprodukts in $\mathbb{R}^n$ ein Ortho*normal*system (!).

6. $\langle Mv, Mw \rangle = \langle v, w \rangle$ für alle $v, w \in \mathbb{R}^n$.
7. $\|Mv\| = \|v\|$ für alle $v \in \mathbb{R}^n$.

Def. (Positive Definitheit von Matrizen)

Eine symmetrische Matrix $M \in \mathbb{R}^{n \times n}$ heißt genau dann *positiv definit*, wenn schon eine der folgenden äquivalenten Bedingungen erfüllt ist:

1. $\langle Mv, v \rangle > 0$ für alle $v \in \mathbb{R}^n$ mit $v \neq 0$.
2. Alle Diagonaleinträge der Sylvesterform von M sind 1.
3. Alle Eigenwerte von M sind positiv.
4. Alle Hauptminoren von M sind positiv.
   (Die Null zählt in den beiden Fällen jeweils nicht als positiv.)

Warnung: Ist M nicht symmetrisch, so sind die letzten drei Kriterien falsch, man kann dann nur das erste anwenden. Dieser Fall kommt aber auch nicht so häufig vor.

Hier eine kurze Erklärung zu Quadriken und der Hauptachsentransformation. Als Grundlage diente teilweise eine Beschreibung von Markus Göhl vom Sommersemester 2010.

Quadriken

Definition. Eine Quadrik ist die Nullstellenmenge eines quadratischen Polynoms. Das Polynom darf dabei mehr als nur eine Variable enthalten.

Beispiel. Die Teilmenge

$$Q := \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \,\middle|\, 5x^2 - 4xy + 8y^2 + \frac{20}{\sqrt{5}}x - \frac{80}{\sqrt{5}}y + 4 = 0 \right\} \subset \mathbb{R}^2$$

des zweidimensionalen Raums ist eine Quadrik.

(Nullstellenmengen hat man auch schon in der Schule untersucht, da aber meistens nur von Funktionen einer statt mehrerer veränderlicher Variablen.)

Quadriken kann man in Koordinatensysteme einzeichnen, Wikipedia hat schöne Grafiken dazu: `http://en.wikipedia.org/wiki/Quadric`

Quadriken klassifiziert man in verschiedene Typen (Ellipsoid, Paraboloid, Kegel und einige andere; die Wikipedia-Seite zählt alle Typen auf). Bei der Hauptachsentransformation geht es darum, ohne Zeichnung allein durch Rechnung festzustellen, welchen Typ eine gegebene Quadrik hat.

Beispiel. Erinnert man sich an den Satz von Pythagoras, so sieht man, dass

$$Q := \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \,\middle|\, x^2 + y^2 - 1 = 0 \right\}$$

ein Kreis um den Koordinatenursprung mit Radius 1 ist. Wenn man nun die Koordinaten ändert, beispielsweise

$$\begin{aligned} x &= 2\hat{x} - \hat{y} \\ y &= \hat{x} + \hat{y} \end{aligned}$$

definiert, erhält man die transformierte Quadrik

$$\widehat{Q} := \left\{ \begin{pmatrix} \hat{x} \\ \hat{y} \end{pmatrix} \,\middle|\, (2\hat{x} - \hat{y})^2 + (\hat{x} + \hat{y})^2 - 1 = 0 \right\},$$

fertig vereinfacht gibt das

$$\widehat{Q} = \left\{ \begin{pmatrix} \hat{x} \\ \hat{y} \end{pmatrix} \,\middle|\, 5\hat{x}^2 - 2\hat{x}\hat{y} + 2\hat{y}^2 - 1 = 0 \right\}.$$

Zeichnet man diese Menge in ein Koordinatensystem ein, erhält man einen deformierten Kreis, eine Ellipse; allerdings ist das überhaupt nicht klar, wenn man nur die transformierte Gleichung gegeben hat. Die Hauptachsentransformation ist nun eine Methode, um aus einer gegebenen unübersichtlichen Gleichung eine viel einfacherere zu erhalten.

Hauptachsentransformation

Die Hauptachsentransformation kann man in vier Schritten als Rechenschema formulieren:

Gegeben: eine beliebige Quadrik.
Gesucht: eine einfachere Form der Quadrik.
Verfahren:

0. Die gegebene Quadrik in Matrixsprache schreiben.
1. Die Matrix orthogonal diagonalisieren, d. h. eine Orthonormalbasis aus Eigenvektoren finden.
2. Wieder zurück in Gleichungssprache übersetzen.
3. Mittels quadratischer Ergänzung die erhaltene Gleichung weiter vereinfachen.

Musterbeispiel

Es sei die zweidimensionale Quadrik

$$Q := \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \,\middle|\, x_1^2 + 4x_1x_2 + x_2^2 + 3x_1 - 5x_2 - 1 = 0 \right\} \subset \mathbb{R}^2$$

gegeben.

Schritt 0

In Matrixsprache schreibt sich die Quadrik als

$$Q = \left\{ x \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, \langle Mx, x \rangle + \langle b, x \rangle + c = 0 \right\},$$

wobei

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, \qquad b = \begin{pmatrix} 3 \\ -5 \end{pmatrix}, \qquad c = -1$$

und die spitzen Klammern $\langle \cdot, \cdot \rangle$ das Standardskalarprodukt im $\mathbb{R}^2$ bezeichnen, zur Erinnerung:

$$\left\langle \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \right\rangle = x_1y_1 + x_2y_2$$

Die Matrix M, der Vektor b und die Zahl c kommen dabei wie folgt zustande: Die Zahl c ist der konstante Term des die Quadrik definierenden Polynoms, also der Summand, der mit keiner der Variablen multipliziert wird.

Der Vektor b sammelt die Koeffizienten der linearen Glieder auf, also derjenigen Summanden, in denen genau eine Variable genau einmal vorkommt.

[Je nach Geschmack schreiben andere nicht „$\langle b, x\rangle$“, sondern „$2\langle b, x\rangle$“, und müssen dann als b entsprechend die Hälfte nehmen.]

Auf der Hauptdiagonale der Matrix M stehen die Koeffizienten der rein-quadratischen Terme, d. h. der Summanden, in denen genau eine Variable genau zweimal vorkommt; im Beispiel sind das x_1^2 und x_2^2 (jeweils mit Koeffizient 1), nicht aber $4x_1x_2$.

Die restlichen Komponenten der Matrix ergeben sich aus den gemischt-quadratischen Termen, d. h. den Summanden, in denen genau zwei Variablen jeweils genau einmal vorkommen, im Beispiel ist das lediglich $4x_1x_2$. In die Matrix trägt man aber nicht einfach den Koeffizienten, im Beispiel also die Zahl 4, ein, sondern die Hälfte des Koeffizienten (also 2), und zwar in gleich zwei Zellen der Matrix:

Beispiel. Der Term $4x_1x_2$ schreibt vor, dass man in die $(1, 2)$-Komponente (erste Zeile, zweite Spalte) und in die $(2, 1)$-Komponente (zweite Zeile, erste Spalte) jeweils $4/2 = 2$ einträgt.

Bei einem hypothetischen anderen Term wie $12x_3x_7$ müsste man in die $(3, 7)$-Komponente und in die $(7, 3)$-Komponente jeweils $12/2 = 6$ eintragen.

Bemerkung. Wenn dieser Verfahrensschritt seltsam anmutet, kann man mal die durch das Verfahren angegebene Gleichung in Matrixform, also $\langle Mx, x\rangle + \langle b, x\rangle + c = 0$, durch Einsetzen eines beliebigen Vektors $x = \left(\begin{smallmatrix} x_1 \\ x_2 \end{smallmatrix}\right)$ fertig ausrechnen. Dabei wird man feststellen, dass man wieder genau auf die ursprüngliche Gleichung kommt.

Schritt 1

Nun muss man die Matrix orthogonal diagonalisieren. „Orthogonal“ bedeutet dabei, dass man nicht irgendeine Basis aus Eigenvektoren finden soll, sondern eine, die sogar eine Orthonormalbasis ist.

(Zur Erinnerung: Eine Basis heißt „Orthonormalbasis“, wenn jeder Vektor der Basis Länge 1 hat und je zwei verschiedene Basisvektoren aufeinander senkrecht stehen. Ein Vektor x hat genau dann Länge 1, wenn $\|x\| = \sqrt{\langle x, x\rangle} = 1$. Vektoren x, y stehen genau dann aufeinander senkrecht, wenn $\langle x, y\rangle = 0$.)

Da die in Schritt 0 konstruierte Matrix stets symmetrisch ist, weiß man aus der allgemeinen Theorie, dass es auf jeden Fall möglich ist, die Matrix orthogonal zu diagonalisieren, man muss nur das Standardprogramm durchziehen:

– Charakteristisches Polynom:

$$\chi(\lambda) = \det \begin{pmatrix} 1-\lambda & 2 \\ 2 & 1-\lambda \end{pmatrix} = (1-\lambda)^2 - 4 = \lambda^2 - 2\lambda - 3 = (\lambda+1)(\lambda-3)$$

– Eigenwerte (= Nullstellen des charakteristischen Polynoms):

$\lambda_1 = -1$, $\lambda_2 = 3$

– Eigenräume:

zum Eigenwert -1: $\ker \begin{pmatrix} 1+1 & 2 \\ 2 & 1+1 \end{pmatrix} = \ker \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} = \operatorname{span} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$

zum Eigenwert $\quad 3$: $\ker \begin{pmatrix} 1-3 & 2 \\ 2 & 1-3 \end{pmatrix} = \ker \begin{pmatrix} -2 & 2 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} = \operatorname{span} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$

– Mögliche Orthonormalbasis aus Eigenvektoren:

$$B = (v_1, v_2),$$

wobei

$$v_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \qquad v_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Lässt man die beiden Normierungsfaktoren $\frac{1}{\sqrt{2}}$ weg, hat man zwar immer noch eine Basis aus Eigenvektoren, aber nicht mehr eine orthonormale Basis aus Eigenvektoren. Den richtigen zu verwendenen Normierungsfaktor erhält man über die Formel 1/(Länge des zu normierenden Vektors).

Schließlich muss man noch darauf achten, dass je zwei verschiedene Basisvektoren aufeinander senkrecht stehen. Dazu muss man speziell in diesem Beispiel aber nicht einmal eine Rechnung durchführen, denn man weiß aus allgemeiner Theorie, dass Eigenvektoren einer symmetrischen Matrix zu verschiedenen Eigenwerten notwendigerweise aufeinander senkrecht stehen.

– Basistransformation:

$$M = S\widehat{M}S^{-1},$$

wobei

$$\widehat{M} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}, \qquad S = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

(Zur Erinnerung: In der Diagonalform $\widehat{M}$ stehen auf der Hauptdiagonale die Eigenwerte (in der Reihenfolge, wie man sie bei ihrer Berechnung oben beliebig festgelegt hat) und außerhalb der Hauptdiagonale Nullen, und in die Matrix S schreibt man die Eigenvektoren (in derselben Reihenfolge) nebeneinander als Spalten. Der Übersichtlichkeit ist hier der gemeinsame Faktor $\frac{1}{\sqrt{2}}$ nach vorne gezogen.)

Schritt 2

Jetzt erfolgt die Rückübersetzung:

$$\begin{aligned} \widehat{Q} &:= \left\{ \hat{x} = \begin{pmatrix} \hat{x}_1 \\ \hat{x}_2 \end{pmatrix} \,\middle|\, \langle \widehat{M}\hat{x}, \hat{x} \rangle + \langle {}^tSb, \hat{x} \rangle + c = 0 \right\} \\ &= \left\{ \begin{pmatrix} \hat{x}_1 \\ \hat{x}_2 \end{pmatrix} \,\middle|\, -\hat{x}_1^2 + 3\hat{x}_2^2 + \frac{8}{\sqrt{2}}\hat{x}_1 - \frac{2}{\sqrt{2}}\hat{x}_2 - 1 = 0 \right\} \end{aligned}$$

Diese transformierte Form zeichnet sich dadurch aus, dass es keine gemischt-quadratischen Terme mehr gibt; in diesem Sinn ist diese Form einfacher als die ursprünglich gegebene.

Grafisch gilt zwar nicht, dass $Q = \widehat{Q}$, aber $\widehat{Q}$ entsteht aus Q „vermöge der orthogonalen Basistransformation ${}^tS$“. Anschaulich hat man das Koordinatensystem so gedreht und gespiegelt, dass die neuen Koordinatenachsen mit den Achsen der Quadrik (den sog. Hauptachsen!) übereinstimmen; dadurch vereinfachte sich die Gleichung.

Wenn man konkret zwischen Originalpunkten und transformierten Punkten umrechnen mag, kann man das mithilfe der beiden Formeln

$$\hat{x} = {}^tSx$$
$$x = ({}^tS)^{-1}\hat{x} = S\hat{x}$$

tun, wobei man sich praktischerweise die Invertierung von S sparen kann, da man aus der allgemeinen Theorie weiß, dass das Inverse einer orthogonalen Matrix (d. h. einer Matrix, deren Spalten eine Orthonormalbasis bilden – das ist hier der Fall) einfach durch ihre Transponierte gegeben ist.

Schritt 3

In diesem letzten Schritt nutzt man quadratische Ergänzung, um die noch übrigen linearen Terme zu entfernen und so die Gleichung noch weiter zu vereinfachen.

$$\begin{aligned} &-\hat{x}_1^2 + 3\hat{x}_2^2 + \frac{8}{\sqrt{2}}\hat{x}_1 - \frac{2}{\sqrt{2}}\hat{x}_2 - 1 \\ &= -\left(\hat{x}_1^2 - \frac{8}{\sqrt{2}}\hat{x}_1\right) + 3\left(\hat{x}_2^2 - \frac{2}{3\sqrt{2}}\hat{x}_2\right) - 1 \\ &= -\left(\left(\hat{x}_1 - \frac{4}{\sqrt{2}}\right)^2 - \left(\frac{4}{\sqrt{2}}\right)^2\right) + 3\left(\left(\hat{x}_2 - \frac{1}{3\sqrt{2}}\right)^2 - \left(\frac{1}{3\sqrt{2}}\right)^2\right) - 1 \\ &= -\hat{\hat{x}}_1^2 + 8 + 3\hat{\hat{x}}_2^2 - \frac{1}{6} - 1 \\ &= -\hat{\hat{x}}_1^2 + 3\hat{\hat{x}}_2^2 + \frac{41}{6}, \end{aligned}$$

wobei

$$\hat{\hat{x}}_1 = \hat{x}_1 - \frac{4}{\sqrt{2}},$$
$$\hat{\hat{x}}_2 = \hat{x}_2 - \frac{1}{3\sqrt{2}}.$$

(Die quadratische Ergänzung funktioniert so: Als erstes fasst man die Terme zu den verschiedenen Variablen zusammen und klammert die Koeffizienten der quadratischen Glieder jeweils aus. Dann ergänzt man mithilfe der ersten oder zweiten binomischen Formel, und schließlich vereinfacht man soweit wie möglich.)

Als Endergebnis erhält man somit:

$$\hat{\hat{Q}} := \left\{ \begin{pmatrix} \hat{\hat{x}}_1 \\ \hat{\hat{x}}_2 \end{pmatrix} \,\middle|\, -\hat{\hat{x}}_1^2 + 3\hat{\hat{x}}_2^2 + \frac{41}{6} = 0 \right\}$$

Wikipedia (oder Auflösen nach $\hat{\hat{x}}_1 = \pm\sqrt{3\hat{\hat{x}}_2^2 + 41/6}$) sagt dann, dass es sich hierbei um eine Hyperbel handelt.

Siehe auch

Im Internet gibt es viele vollständig durchgerechnete Beispiele zu Quadriken, hier ein paar Links:

– `http://www.mia.uni-saarland.de/Teaching/MFI07/kap49.pdf`
  (zweidimensionales Beispiel)
– `http://m19s28.dyndns.org/iblech/stuff/carina-tutor-mehrere-variable/`
  (ganz unten; leicht andere Schreibweise als hier, dafür aber eine Staatsexamensaufgabe)
– `http://www.arndt-bruenner.de/mathe/scripts/eigenmatrix.htm`
  (Rechner für zwei- und dreidimensionale Quadriken)

In einer frueheren Version von quadriken.pdf stand leider faelschlicherweise an einigen Stellen S statt S-transponiert. In der jetzigen Version ist der Fehler korrigiert.

zu Quadriken:

Diagonalmatrix berechnen: im $\mathbb{R}^2$ $D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$

im $\mathbb{R}^3$ $D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \lambda_2 & \\ & & \lambda_3 \end{pmatrix}$

Erinnerung: zum Schluss erhält man die Gleichung

$\mathbb{R}^2$: $\lambda_1 \hat{\hat{x}}_1^2 + \lambda_2 \hat{\hat{x}}_2^2 + c = 0$

$\mathbb{R}^3$: $\lambda_1 \hat{\hat{x}}_1^2 + \lambda_2 \hat{\hat{x}}_2^2 + \lambda_3 \hat{\hat{x}}_3^2 + c = 0$

Daraus lässt sich ablesen: [+ := pos. , − := neg. Vorz.]

λ_1	λ_2	c	Typ der Kurve
+	+	+	leere Menge
+	+	0	Nullpunkt
+	+	~~+~~ −	Ellipse
+	−	~~0~~ ±	Hyperbel
+	−	0	zwei Geraden durch 0
+	0	+	leere Menge
+	0	0	Doppelgerade
+	0	−	zwei Geraden parallel zur ~~y~~ $\hat{x}_2$-Achse

λ_1	λ_2	λ_3	c	Typ der Fläche
+	+	+	+	leere Menge
+	+	+	0	Nullpunkt
+	+	+	−	Ellipsoid
+	+	−	+	zweischaliges Hyperboloid
+	+	−	0	elliptischer Doppelkegel
				$\hat{x}_3$-Achse ist Kegelachse
+	+	−	−	einschaliges Hyperboloid
+	+	0	+	leere Menge
+	+	0	0	$\hat{x}_3$-Achse
+	+	0	−	elliptischer Zylinder
+	−	0	0	zwei Ebenen durch die
				$\hat{x}_3$-Achse
+	0	0	+	leere Menge
+	0	0	0	Doppelebene, $\hat{x}_2,\hat{x}_3$-Ebene
+	0	0	−	zwei Ebenen parallel zur
				$\hat{x}_2,\hat{x}_3$-Ebene
+	−	0	±	hyperbolischer Zylinder

Beispiel zum Trägheitssatz

Wir betrachten folgende Bilinearform:

$$\gamma : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$(x,y) \longmapsto \langle x, Ay \rangle_{\text{euklidisch}} \qquad \text{wobei } A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Bestimmung der Sylvesterform:

$$\begin{array}{ccc} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \\ \hline 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{array} \rightsquigarrow \begin{array}{ccc} 1 & & \\ & 1 & \\ & & -1 \\ \hline 1 & -2/\sqrt{3} & -2/\sqrt{2} \\ 0 & 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{2} \\ 0 & 1/\sqrt{3} & 0 \end{array}$$

Also ${}^tTAT =: D$, mit $D = \begin{pmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & -1 \end{pmatrix}$, $T = \begin{pmatrix} 1 & -2/\sqrt{3} & -2/\sqrt{2} \\ 0 & 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{2} \\ 0 & 1/\sqrt{3} & 0 \end{pmatrix}$.

γ ist also kein Skalarprodukt, sondern indefinit.

Jetzt definieren wir: $\langle x, y \rangle_0 := \langle T^{-1}x, T^{-1}y \rangle_{\text{euklid}}$; $\langle \cdot, \cdot \rangle_0$ ist ein Skalarprodukt.

Ferner definieren wir: $V_+ := \operatorname{span}(T e_1, T e_2)$, $V_- := \operatorname{span}(T e_3)$, $V_0 := \{0\}$.

Dann gilt:

1) $\mathbb{R}^3 = V_+ \oplus V_- \oplus V_0$ ist eine bzgl. dem $\langle \cdot, \cdot \rangle_0$-Skalarprodukt orthogonale Zerlegung.

2) $\gamma(v,v) = \begin{cases} \|v\|_0^2, & v \in V_+ \\ -\|v\|_0^2, & v \in V_- \\ 0, & v \in V_0 \end{cases}$, wobei $\|v\|_0 = \sqrt{\langle v, v \rangle_0}$.

Beispiel zu 2):

$\cancel{\text{Sei } v = 5 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ \sqrt{3} \\ -\sqrt{2} \end{pmatrix} = T^{-1}(5 \cdot e_3) \in V_-.}$

$\cancel{\text{Dann gilt: } \gamma(v,v) = 25 \langle T^{-1} e_3, AT^{-1} e_3 \rangle =}$

Sei $v = T(5 \cdot e_3) = 5 \cdot \begin{pmatrix} -2/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \\ 0 \end{pmatrix} \in V_-$.

Dann gilt: $\gamma(v,v) = {}^t(5Te_3)\, A\, (5Te_3) = 25\, {}^te_3\, {}^tTAT e_3 = 25\, {}^te_3 D e_3 = -25.$

$\|v\|_0^2 = \langle v, v \rangle_0 = \langle T^{-1}v, T^{-1}v \rangle_{\text{euklid.}} = 25 \langle e_3, e_3 \rangle_{\text{euklid}} = +25.$