Aufgabe -3

$A \in M(n \times n, K)$, $U \subset K^n$ Unterraum mit $A(U) \subset U$. (U ist also ein für A invarianter Unterraum.) Sei $r := \dim U$.

Behauptung. *Es gibt ein $T \in \mathrm{GL}_n(K)$ derart, dass $T^{-1}AT$ die Blockform*

$$T^{-1}AT = \begin{pmatrix} B & C \\ 0 & D \end{pmatrix}$$

für gewisse Matrizen $B \in M(r \times r, K)$, $C \in M(r \times (n-r), K)$ und $D \in M((n-r) \times (n-r), K)$ hat.

Beweis. Wähle irgendeine Basis $(u_1, \ldots, u_r)$ von U. Ergänze diese Basis zu einer Basis $(u_1, \ldots, u_r, u_{r+1}, \ldots, u_n)$ von ganz K^n. Schreibe diese Basisvektoren als Spalten nebeneinander in die Matrix T:

$$T = (u_1|\cdots|u_r|u_{r+1}|\cdots|u_n) \in M(n \times n, K)$$

Da die Spalten von T linear unabhängig sind, ist T eine reguläre Matrix.

Vorüberlegung für gleich (möglicherweise auch schon aus LA I „klar“): Sei $x \in K^n$ ein beliebiger Vektor, seine Basisdarstellung bezüglich der gewählten Gesamtbasis von K^n sei

$$x = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j u_j$$

für gewisse Skalare $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in K$. Dann gilt: Der Vektor $T^{-1}x$ besteht gerade aus diesen Skalaren, d. h. es gilt

$$T^{-1}x = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix}.$$

Denn:

$$T^{-1}x = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j \underbrace{T^{-1}u_j}_{=e_j} = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix},$$

wobei e_i den i-ten kanonischen Einheitsvektor in K^n bezeichne. Ende der Vorüberlegung.

Es ist noch zu zeigen, dass $T^{-1}AT$ von der gewünschten Form ist. Dazu ist nur zu zeigen, dass die unteren $(n-r)$ Zeilen der ersten r Spalten von $T^{-1}AT$ gleich null sind.

Sei also $i = 1, \ldots, r$ beliebig, wir wollen die i-te Spalte von $T^{-1}AT$ betrachten. Diese kann man rechnerisch schreiben als

$$T^{-1}ATe_i.$$

Es gilt nun $ATe_i = Au_i \in U$ wegen der Voraussetzung $A(U) \subset U$ und $u_i \in U$ (denn $i \leq r$). Schreibt man in Gedanken den Vektor ATe_i in der Basisdarstellung der gewählten Gesamtbasis von K^n aus, sind die Koeffizienten vor den Basisvektoren u_{r+1} bis u_n also jeweils gleich null. Nach der Vorüberlegung müssen daher die unteren $(n-r)$ Zeilen von $T^{-1}ATe_i$ gleich null sein. Damit ist alles gezeigt. □

Aufgabe -2

$A \in M(n \times n, K)$, $U, V \subset K^n$ Unterräume mit $K^n = U \oplus V$, $A(U) \subset U$, $A(V) \subset V$. Sei $r := \dim U$, $s := \dim V$.

Behauptung. *Es gibt ein $T \in \mathrm{GL}_n(K)$ derart, dass $T^{-1}AT$ die Blockform*

$$T^{-1}AT = \begin{pmatrix} B & 0 \\ 0 & C \end{pmatrix}$$

für gewisse Matrizen $B \in M(r \times r, K)$ und und $C \in M(s \times s, K)$ hat.

Beweis. Wähle irgendeine Basis $(u_1, \dots, u_r)$ von U und irgendeine Basis $(v_1, \dots, v_s)$ von V. Wegen $K^n = U \oplus V$ ist dann $(u_1, \dots, u_r, v_1, \dots, v_n)$ eine Basis von K^n. Schreibe wie in Aufgabe -3 diese Basisvektoren nebeneinander als Spalten in die Matrix T:

$$T = (u_1 | \cdots | u_r | v_1 | \cdots | v_s) \in M(n \times n, K)$$

Da die Spalten von T linear unabhängig sind, ist T eine reguläre Matrix.

Es gilt auch die gleiche Vorüberlegung: Für beliebiges $x \in K^n$ sind die Komponenten des Vektors $T^{-1}x$ gerade die Koeffizienten der Basisdarstellung von x bezüglich der zusammengesetzten Gesamtbasis.

Nun zeigen wir, dass $T^{-1}AT$ von der gewünschten Form ist. Zunächst betrachten wir die ersten r Spalten, sei also $i = 1, \dots, r$ beliebig. Die i-te Spalte von $T^{-1}AT$ ist dann $T^{-1}ATe_i$, und wir müssen zeigen, dass deren unteren s Einträge jeweils null sind.

Dazu: $Te_i = u_i$, also ist ATe_i wegen $A(U) \subset U$ ein Vektor aus U. Da die Komponenten von $T^{-1}(ATe_i)$ die Koeffizienten der Basisdarstellung von ATe_i angeben, müssen daher diejenigen Komponenten von $T^{-1}(ATe_i)$, welche zu den Basisvektoren zu V gehören (das sind gerade die letzten s Stück), jeweils null sein.

Analog zeigt man die gewünschte Form für die letzten s Spalten: Sei $i = r+1, \dots, n$ beliebig. Wir müssen zeigen, dass die ersten r Komponenten von $T^{-1}ATe_i$ jeweils null sind.

Dazu: $Te_i = v_{i-r}$, also liegt $A(Te_i)$ in V. Somit sind in der Basisdarstellung von $A(Te_i)$ die ersten r Koeffizienten jeweils null, und somit sind die ersten r Komponenten von $T^{-1}ATe_i$ jeweils null. $\square$

Aufgabe -1

$A \in M(n \times n, K)$, χ_A zerfalle in Linearfaktoren, $\lambda \in K$ Eigenwert.

Behauptung. $\mu^{geo}(\lambda) \leq \mu^{alg}(\lambda)$.

Beweis. Sei $U := \operatorname{kern}(A - \lambda \mathbb{1}_n) \subset K^n$ der Eigenraum von A zum Eigenwert λ. Es gilt $A(U) \subset U$, denn:

Sei $x \in U$ beliebig. Dann gilt $(A - \lambda \mathbb{1}_n)x = 0$, also folgt $Ax = \lambda \mathbb{1}_n x = \lambda x$. Da U ein Unterraum ist, gilt $\lambda x \in U$. Somit ist gezeigt, dass $Ax \in U$.

Nach Aufgabe -3 gibt es damit eine Basiswechselmatrix T derart, dass die transformierte Matrix $T^{-1}AT$ die Blockgestalt

$$T^{-1}AT = \begin{pmatrix} B & C \\ 0 & D \end{pmatrix}$$

hat.

Die Matrix B ist eine Diagonalmatrix der Größe $(\dim U) \times (\dim U)$, auf der Hauptdiagonale steht entsprechend oft der Eigenwert λ: Denn die Matrix A wirkt auf U einfach durch Multiplikation mit λ, das soll heißen: Jeder Vektor $x \in U$ wird durch A auf sein Vielfaches λx abgebildet. Insbesondere gilt dies für diejenigen Basisvektoren, die man im Beweis der Aufgabe -3 benutzt hat, um die Matrix B aufzustellen.

Das charakteristische Polynom von A, über welches die algebraische Vielfachheit von λ definiert ist, stimmt mit dem von $T^{-1}AT$ überein. Da wurde in der LA I gezeigt, kann aber auch schnell wiederholt werden:

$$\chi_{T^{-1}AT}(t) = \det(T^{-1}AT - t\mathbb{1}_n) = \det(T^{-1}(A - t\mathbb{1}_n)T) = \det(A - t\mathbb{1}_n) = \chi_A(t)$$

Rechnet man in Gedanken die Determinante aus, so sieht man, dass im gemeinsamen charakteristischen Polynom der Faktor $(t - \lambda)$ mindestens so oft vorkommt, wie der Eigenwert λ auf der Hauptdiagonale von B vorkommt, also $(\dim U)$ Mal. Die Behauptung folgt, da nach Definition $\mu^{\text{geo}}(\lambda) = \dim U$. $\square$