Lösungsvorschlag zu Aufgabe 23 von Blatt 6

Sei V endlich-dimensionaler K-Vektorraum und seien die Mengen

$$M_1 := \{f\colon V \to V^\star \mid f \text{ Isomorphismus}\}$$

und

$$M_2 := \{\lambda\colon V \times V \to K \mid \lambda \text{ nicht ausgeartete Bilinearform}\}$$

gegeben.

Behauptung. *Es gibt eine Bijektion zwischen M_1 und M_2.*

Beweis. Durch kanonische Überlegung kommt man auf die Abbildung

$$\begin{aligned} \varphi\colon\ M_1 &\longrightarrow M_2 \\ f &\longmapsto \varphi(f) = ((x,y) \mapsto f(x)(y)) \end{aligned}$$

Dabei ist mit $\varphi(f)$ also folgende Abbildung gemeint,

$$\begin{aligned} \varphi(f)\colon\ V \times V &\longrightarrow K \\ (x,y) &\longmapsto f(x)(y), \end{aligned}$$

und die Schreibweise $f(x)(y)$ ergibt Sinn, denn da $f \in M_1$, ist $f(x)$ ein Element von $V^\star$, insbesondere also eine Abbildung, die ein Argument $y \in V$ auf ein Element von K schickt.

Warnung: Nicht φ mit $\varphi(f)$, und nicht f mit $f(x)$ verwechseln!

Es ist nun zu zeigen, dass φ wohldefiniert, injektiv und surjektiv ist.

– *Wohldefiniertheit:* Zu zeigen ist, dass die Abbildung $\varphi(f)$ für jedes $f \in M_1$ wirklich ein Element von M_2 ist, d. h. dass $\varphi(f)$ bilinear und nicht ausgeartet ist.

  Additivität im ersten Argument: $\varphi(f)(x+\tilde{x},y) = f(x+\tilde{x})(y) = (f(x)+f(\tilde{x}))(y) = f(x)(y) + f(\tilde{x})(y) = \varphi(f)(x,y) + \varphi(f)(\tilde{x},y)$ für alle $x,\tilde{x},y \in V$ (dabei folgt das zweite Gleichheitszeichen wegen der Linearität von f und das dritte nach Definition der Addition von Abbildungen)

  Homogenität im ersten Argument: $\varphi(f)(ax,y) = f(ax)(y) = (af(x))(y) = af(x)(y) = a\varphi(f)(x,y)$ für alle $x,y \in V$, $a \in K$ (das zweite Gleichheitszeichen folgt wegen der Linearität von f, das dritte nach Definition der Skalarmultiplikation von Abbildungen mit Körperelementen)

  Additivität im zweiten Argument: $\varphi(f)(x,y+\tilde{y}) = f(x)(y+\tilde{y}) = f(x)(y) + f(x)(\tilde{y}) = \varphi(f)(x) + \varphi(f)(y)$ für alle $x,y,\tilde{y} \in V$ (dabei folgt das zweite Gleichheitszeichen wegen der Linearität von $f(x)$)

  Homogenität im zweiten Argument: $\varphi(f)(x,ay) = f(x)(ay) = af(x)(y) = a\varphi(f)(x,y)$ für alle $x,y \in V$, $a \in K$ (das zweite Gleichheitszeichen folgt wegen der Linearität von $f(x)$)

Nicht-Ausgeartetheit, Teil 1: Sei $x \in V$ fest. Sei $\varphi(f)(x, y) = 0$ für alle $y \in V$, wir müssen zeigen, dass $x = 0$. Nach Voraussetzung gilt also $f(x)(y) = 0$ für alle $y \in V$, also ist schon die Abbildung $f(x)$ die Nullabbildung, d. h. es gilt $f(x) = 0$. Da f insbesondere injektiv ist, folgt $x = 0$.

Nicht-Ausgeartetheit, Teil 2: Sei $y \in V$ fest und gelte $\varphi(f)(x, y) = 0$ für alle $x \in V$, wir müssen zeigen, dass $y = 0$. Dazu zeigen wir, dass $\alpha(y) = 0$ für alle $\alpha \in V^\star$, nach Vorlesung folgt dann schon, dass $y = 0$. Sei also $\alpha \in V^\star$ beliebig. Da f insbesondere surjektiv ist, gibt es ein $x \in V$ mit $f(x) = \alpha$. Somit folgt $\alpha(y) = f(x)(y) = 0$.

– *Injektivität:* Seien $f, g \in M_1$ mit $\varphi(f) = \varphi(g)$, wir müssen zeigen, dass $f = g$.

Nach Voraussetzung folgt zunächst, dass $f(x)(y) = g(x)(y)$ für alle $x, y \in V$. Da diese Gleichheit für alle $y \in V$ gilt, folgt $f(x) = g(x)$. Da wiederum diese Gleichheit für alle $x \in V$ gilt, folgt $f = g$.

Warnung: Da M_1 und M_2 keine Vektorräume sind, hat φ auch keine Chance, linear zu sein. Daher genügt es ohne gesonderte Begründung hier nicht, den typischen Ansatz $\varphi(f) = 0$ zu machen und danmn zu versuchen, $f = 0$ zu folgern.

– *Surjektivität:* Sei $\lambda \in M_2$ eine beliebige nicht ausgeartete Bilinearform. Wir müssen ein $f \in M_1$ mit $\varphi(f) = \lambda$ finden; ausgeschrieben bedeutet das, dass $\varphi(f)(x, y) = f(x)(y) = \lambda(x, y)$ für alle $x, y \in V$ gelten soll.

Davon inspiriert definieren wir:

$$\begin{array}{rccl} f\colon & V & \longrightarrow & V^\star \\ & x & \longmapsto & f(x) = (y \mapsto \lambda(x, y)) \end{array}$$

Dabei ist mit $f(x)$ also die Abbildung

$$\begin{array}{rccl} f(x)\colon & V & \longrightarrow & K \\ & y & \longmapsto & f(x)(y) = \lambda(x, y) \end{array}$$

gemeint. Direkt nach Definition ist dann klar, dass $\varphi(f) = \lambda$; wir müssen aber noch zeigen, dass f wohldefiniert und wirklich ein Element von M_1 ist.

Wohldefiniertheit: Zu zeigen ist, dass $f(x)$ für alle $x \in V$ wirklich ein Element von $V^\star$ ist, also wirklich eine lineare Abbildung von V nach K ist. Wir müssen also nachprüfen, ob

$$f(x)(y + \tilde{y}) = f(x)(y) + f(x)(\tilde{y}) \quad \text{und} \quad f(x)(ay) = af(x)(y)$$

für alle $y, \tilde{y} \in V$ und $a \in K$ gilt. Wenn wir die Definition von $f(x)$ einsetzen, folgt das sofort über die Linearität von λ im zweiten Argument.

Um zu zeigen, dass f ein Element von M_1 ist, müssen wir zeigen, dass f linear, injektiv und surjektiv ist.

Linearität von f: Zu zeigen ist, dass

$$f(x + \tilde{x}) = f(x) + f(\tilde{x}) \quad \text{und} \quad f(ax) = af(x)$$

für alle $x, \tilde{x} \in V$ und $a \in K$ gilt. Da auf den linken und rechten Seiten jeweils Abbildungen (von V nach K) stehen, sind diese Aussagen gleichbedeutend damit, dass

$$f(x + \tilde{x})(y) = f(x)(y) + f(\tilde{x})(y) \quad \text{und} \quad f(ax)(y) = af(x)(y)$$

für alle $x, \tilde{x}, y \in V$ und $a \in K$ gilt. Wenn wir die Definition von f einsetzen, folgt das sofort über die Linearität von λ im ersten Argument.

Injektivität von f: Sei $f(x) = 0$ (Nullabbildung von V nach K), wir müssen zeigen, dass $x = 0$. Nach Voraussetzung gilt also $f(x)(y) = 0(y) = 0$ für alle $y \in V$; nach Definition folgt somit $\lambda(x, y) = 0$ für alle $y \in V$. Da λ nicht ausgeartet ist, gilt somit $x = 0$.

Surjektivität von f: Dazu hilft die Dimensionsformel:

$$\dim \operatorname{im} f = \dim V - \dim \ker f = \dim V - 0 = \dim V = \dim V^\star,$$

also folgt $\operatorname{im} f = V^\star$ und damit die Surjektivität von f. □

Abschließend noch ein paar Bemerkungen:

1. Die Hauptaufgabe bestand darin, auf die Abbildungsvorschrift von φ zu kommen. Danach waren zwar noch viele Nachweise zu erbringen, die meisten konnte man aber recht knapp erledigen. Um Unklarheiten vorzubeugen, wollte ich hier auch nichts abkürzen; in der Klausur hätte man aber an einigen Stellen (beispielsweise bei den Lineaeritätsprüfungen) auch einfach „klar“ hinschreiben können.

2. In der Linearen Algebra I hatten wir uns überlegt, dass es stets einen kanonischen Isomorphismus von V in den Bidualraum $(V^\star)^\star$ gibt. Die Aufgabe zeigt, dass es im Allgemeinen aber keinen kanonischen Isomorphismus von V nach $V^\star$ gibt, da es im Allgemeinen auch keine kanonische Bilinearform auf V gibt.

   Ist V allerdings nicht irgendein Vektorraum, sondern ein euklidischer, so kommt V ja mit einem Skalarprodukt $\langle \cdot, \cdot \rangle$ daher; nach Definition ist das Skalarprodukt gerade eine nicht ausgeartete Bilinearform, also ein Element von M_2, womit man in diesem Fall doch einen kanonischen Isomorphismus von V nach $V^\star$ angeben kann, nämlich $\varphi^{-1}(\langle \cdot, \cdot \rangle)$.

3. Im Kontext der Programmiersprache Haskell kommt der Übergang von M_1 zu M_2 sehr häufig vor. Man spricht da von „Currying“, nach dem Mathematiker und Logiker Haskell Curry.