# Skalarprodukt und Norm

**Def.:** (Skalarprodukt)

Ein *Skalarprodukt* auf einem reellen Vektorraum $V$ ist eine Abbildung

$$B \colon V \times V \longrightarrow \mathbb{R},$$

welche bilinear, symmetrisch und positiv definit ist.

Das bedeutet im Einzelnen für alle $x, x', y, y' \in V$, $a \in \mathbb{R}$:

$$B(x + x', y) = B(x, y) + B(x', y) \tag{1}$$
$$B(ax, y) = aB(x, y) \tag{2}$$

$$B(x, y + y') = B(x, y) + B(x, y') \tag{3}$$
$$B(x, ay) = aB(x, y) \tag{4}$$

$$B(x, y) = B(y, x) \tag{5}$$

$$B(x, x) \geq 0 \tag{6}$$
$$B(x, x) = 0 \quad \Rightarrow \quad x = 0 \tag{7}$$

Man schreibt auch gerne:

$$\langle x, y\rangle, \quad (x, y), \quad x \cdot y$$

für $B(x, y)$. Anschaulich hat das Skalarprodukt von zwei Vektoren etwas mit dem Winkel zwischen ihnen zu tun. Zwei Vektoren stehen genau dann aufeinander senkrecht, wenn ihr Skalarprodukt null ist.

**Bsp.:** (Beispiele für Skalarprodukte)

Das sog. Standardskalarprodukt (oder auch euklidische Skalarprodukt) auf dem $\mathbb{R}^n$ ist definiert durch:

$$\left\langle \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \right\rangle := x_1 y_1 + \cdots + x_n y_n$$

Ist ferner $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ irgendeine symmetrische und positiv definite Matrix, so definiert die Setzung

$$\langle x, y\rangle = {}^t x A y$$

für $x, y \in \mathbb{R}^n$ auch ein Skalarprodukt auf dem $\mathbb{R}^n$.

**Def.:** (Norm)

Eine *Norm* auf einem reellen Vektorraum $V$ ist eine Abbildung

$$\|\cdot\|\colon V \longrightarrow \mathbb{R},$$

welche für alle $x, y \in V$, $a \in R$ folgende Axiome erfüllt:

$$\|x\| \geq 0 \tag{8}$$
$$\|x\| = 0 \quad \Rightarrow \quad x = 0 \tag{9}$$

$$\|ax\| = |a|\|x\| \tag{10}$$

$$\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\| \tag{11}$$

Anschaulich ist die Norm eines Vektors einfach seine Länge; jede Norm hat aber eine andere Vorstellung davon, was „Länge“ bedeuten soll. Nur die euklidische Norm stimmt mit dem Längenbegriff aus der Schule überein.

**Bsp.:** (Beispiele für Normen)

Einige Beispiele für Normen auf dem $\mathbb{R}^n$ sind:

$$\begin{aligned}
\|{}^t(x_1, \ldots, x_n)\|_2 &:= \sqrt{x_1^2 + \cdots + x_n^2} \\
\|{}^t(x_1, \ldots, x_n)\|_1 &:= |x_1| + \cdots + |x_n| \\
\|{}^t(x_1, \ldots, x_n)\|_\infty &:= \max_{i=1,\ldots,n} |x_i|
\end{aligned}$$

Die erste Norm dieser Aufzählung, $\|\cdot\|_2$, heißt auch Standardnorm oder euklidische Norm. Außerdem liefert jedes Skalarprodukt ein Beispiel für eine Norm:

**Prop.:** (Zusammenhang zwischen Skalarprodukten und Normen)

Ist $B$ irgendein Skalarprodukt auf $V$, so ist die Abbildung

$$\begin{aligned}
\|\cdot\|\colon \quad V &\longrightarrow \mathbb{R} \\
x &\longmapsto \sqrt{B(x, x)}
\end{aligned}$$

eine Norm auf $V$. Hat man in einer konkreten Situation ein bestimmtes Skalarprodukt gegeben, und wird nichts spezielles über Normen gesagt, ist immer die so definierte Norm gemeint.

Nicht jede Norm kommt auf diese Weise von einem Skalarprodukt.

# Orthogonalität von Vektoren

Sei $V$ ein Vektorraum, auf dem ein Skalarprodukt $\langle \cdot, \cdot \rangle$ definiert ist.

**Def.:** (Normierung von Vektoren)

Ist $v \in V$ irgendein Vektor mit $v \neq 0$, so ist die *Normierung* von $v$ definiert als der Vektor

$$\frac{1}{\|v\|} \cdot v.$$

Unabhängig von der Norm von $v$ hat dieser stets die Norm 1.

**Def.:** (Orthogonalität von Vektoren)

Eine Familie $(v_1, \ldots, v_k)$ von Vektoren aus $V$ heißt genau dann *orthogonal* (oder auch *Orthogonalsystem*), wenn für alle $i, j = 1, \ldots, k$ mit $i \neq j$ gilt:

$$\langle v_i, v_j \rangle = 0,$$

d. h. wenn je zwei Vektoren der Familie aufeinander senkrecht stehen.

Jede orthogonale Familie von Vektoren, in der nicht der Nullvektor vorkommt, ist linear unabhängig. Die Umkehrung dieser Aussage gilt nicht.

*Warnung:* Ein und dieselbe Familie kann bezüglich verschiedener Skalarprodukte mal schon und mal nicht orthogonal sein, daher muss man immer dazusagen, welches Skalarprodukt gemeint ist.

**Def.:** (Orthonormalität von Vektoren)

Eine Familie $(v_1, \ldots, v_k)$ von Vektoren auf $V$ heißt genau dann *orthonormal* (oder auch *Orthonormalsystem*), wenn für alle $i, j = 1, \ldots, k$ gilt:

$$\langle v_i, v_j \rangle = \delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{für } i = j, \\ 0 & \text{sonst,} \end{cases}$$

d. h. wenn jeder Vektor der Familie Länge 1 hat (also normiert ist) und je zwei Vektoren aufeinander senkrecht stehen.

Jede orthonormale Familie von Vektoren ist linear unabhängig. Die Umkehrung dieser Aussage gilt nicht.

**Def.:** (Orthonormalbasis)

Eine *Orthonormalbasis* (ONB) ist eine Basis $(v_1, \ldots, v_n)$ derart, dass die Familie $(v_1, \ldots, v_n)$ orthonormal ist.

Jede beliebige Basis kann mit dem Gram–Schmidt-Verfahren orthonormiert werden.

# Eigenschaften von Matrizen

Sei in diesem Abschnitt $\langle\cdot,\cdot\rangle$ das Standardskalarprodukt auf dem $\mathbb{R}^n$ und $\|\cdot\|$ die Standardnorm auf dem $\mathbb{R}^n$.

**Def.** (Symmetrie von Matrizen)

Eine Matrix $M \in \mathbb{R}^{n\times n}$ heißt genau dann *symmetrisch*, wenn gilt:

$$^tM = M.$$

**Def.:** (Orthogonalität von Matrizen)

Eine Matrix $M \in \mathbb{R}^{n\times n}$ heißt genau dann *orthogonal*, wenn schon eine der folgenden äquivalenten Bedingungen erfüllt ist:

1. $^tM \cdot M = \mathbb{1}_n$.
2. $M \cdot {}^tM = \mathbb{1}_n$.
3. $M$ ist invertierbar mit $M^{-1} = {}^tM$.

4. Die Spalten von $M$ bilden bezüglich des Standardskalarprodukts in $\mathbb{R}^n$ ein Ortho*normal*system (!).
5. Die Zeilen von $M$ bilden bezüglich des Standardskalarprodukts in $\mathbb{R}^n$ ein Ortho*normal*system (!).

6. $\langle Mv, Mw\rangle = \langle v, w\rangle$ für alle $v, w \in \mathbb{R}^n$.
7. $\|Mv\| = \|v\|$ für alle $v \in \mathbb{R}^n$.

**Def.** (Positive Definitheit von Matrizen)

Eine symmetrische Matrix $M \in \mathbb{R}^{n\times n}$ heißt genau dann *positiv definit*, wenn schon eine der folgenden äquivalenten Bedingungen erfüllt ist:

1. $\langle Mv, v\rangle > 0$ für alle $v \in \mathbb{R}^n$ mit $v \neq 0$.
2. Alle Diagonaleinträge der Sylvesterform von $M$ sind 1.
3. Alle Eigenwerte von $M$ sind positiv.
4. Alle Hauptminoren von $M$ sind positiv.
   (Die Null zählt in den beiden Fällen jeweils nicht als positiv.)

*Warnung:* Ist $M$ nicht symmetrisch, so sind die letzten drei Kriterien falsch, man kann dann nur das erste anwenden. Dieser Fall kommt aber auch nicht so häufig vor.