Inhaltsverzeichnis

Erinnerung an die Bestimmung von Kernen

Beispiel: $\ker\begin{pmatrix}1 & 1 & -1\\ 1 & 3 & -1\\ -1 & -1 & 1\end{pmatrix} = \left\{\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix} \,\middle|\, \begin{pmatrix}1 & 1 & -1\\ 1 & 3 & -1\\ -1 & -1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}\right\} = \left\{\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix} \,\middle|\, \begin{matrix}x_1+x_2-x_3=0\\ x_1+3x_2-x_3=0\\ -x_1-x_2+x_3=0\end{matrix}\right\}$

$$= \left\{\begin{pmatrix}x_1\\0\\x_1\end{pmatrix} \,\middle|\, x_1 \in \mathbb{R}\right\} = \left\{x_1\cdot\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix} \,\middle|\, x_1 \in \mathbb{R}\right\} = \operatorname{span}\left(\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}\right).$$

$$\left\{\begin{matrix}x_1+x_2-x_3=0\\ x_1+3x_2-x_3=0\\ -x_1-x_2+x_3=0\end{matrix}\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{matrix}x_3 = x_1+x_2\\ 2x_2=0\\ 0=0\end{matrix}\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{matrix}x_3=x_1+x_2\\ x_2=0\end{matrix}\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{matrix}x_2=0\\ x_3=x_1\end{matrix}\right\}$$

I nach x_3 auflösen, in II und III einsetzen

Beispiel: $\ker\begin{pmatrix}1 & 1 & -1\\ 1 & 3 & -1\\ -1 & -1 & 1\end{pmatrix} \underset{\substack{II' := II - I\\ III' := III + I}}{=} \ker\begin{pmatrix}1 & 1 & -1\\ 0 & 2 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix} = \ker\begin{pmatrix}1 & 1 & -1\\ 0 & 2 & 0\end{pmatrix} \underset{I' := I - \frac{1}{2}II}{=} \ker\begin{pmatrix}1 & 0 & -1\\ 0 & 2 & 0\end{pmatrix}$

$$= \left\{\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix} \,\middle|\, \begin{matrix}x_1-x_3=0\\ 2x_2=0\end{matrix}\right\} = \left\{\begin{pmatrix}x_1\\0\\x_1\end{pmatrix} \,\middle|\, x_1\in\mathbb{R}\right\} = \left\{x_1\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix} \,\middle|\, x_1\in\mathbb{R}\right\}$$

$$= \operatorname{span}\left(\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}\right)$$

Beispiel: Sei $a \neq c$ und b beliebig. Dann:

$$\ker\begin{pmatrix}0 & b\\ 0 & c-a\end{pmatrix} = \left\{\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix} \,\middle|\, \begin{matrix}bx_2=0\\ (c-a)x_2=0\end{matrix}\right\} \underset{c-a\neq 0}{=} \left\{\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix} \,\middle|\, \begin{matrix}bx_2=0\\ x_2=0\end{matrix}\right\} = \left\{\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix} \,\middle|\, x_2=0\right\}$$

$$= \left\{\begin{pmatrix}x_1\\0\end{pmatrix} \,\middle|\, x_1\in\mathbb{K}\right\} = \left\{x_1\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} \,\middle|\, x_1\in\mathbb{K}\right\} = \operatorname{span}\left(\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\right).$$

Blatt 2, Aufgabe 8

(a) $A, B \in \mathbb{K}^{n\times n}$, $T \in Gl_n(\mathbb{K})$

Beh.: $A = TBT^{-1} \Rightarrow A^k = TB^kT^{-1}$ für alle $k \geq 1$.

Bew.: $A^k = \underbrace{AAA \cdots AAA}_{k \text{ Mal}} = TB\cancel{T^{-1}T}B\cancel{T^{-1}T}B\cancel{T^{-1}} \cdots \cancel{T}B\cancel{T^{-1}T}B\cancel{T^{-1}T}BT^{-1} = TB^kT^{-1}$

(b) Ges.: Alle Potenzen von A^k, $k \geq 1$, von $A := \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}$

Dazu: Eigenwerte von A:

$$\chi_A(\lambda) = \det\begin{pmatrix} 1-\lambda & 1 & -1 \\ 1 & 3-\lambda & -1 \\ -1 & -1 & 1-\lambda \end{pmatrix} = \dots = -\lambda^3 + 5\lambda^2 - 4\lambda = -\lambda(\lambda-1)(\lambda-4),$$

also $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = 1$, $\lambda_3 = 4$.

Eigenräume von A:

$$\ker(A - \lambda_1 E) = \ker\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} = \operatorname{span}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$$

$$\ker(A - \lambda_2 E) = \ker\begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix} = \operatorname{span}\left(\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$$

$$\ker(A - \lambda_3 E) = \ker\begin{pmatrix} -3 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -3 \end{pmatrix} = \operatorname{span}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}\right)$$

Basistransformation:

$$A = TBT^{-1}, \quad \text{wobei } T = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \text{ und } B = \begin{pmatrix} 0 & & \\ & 1 & \\ & & 4 \end{pmatrix}.$$

Also:

$$A^k = TB^kT^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & & \\ & 1 & \\ & & 4^k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/2 & 0 & 1/2 \\ -1/3 & 1/3 & 1/3 \\ 1/6 & 1/3 & -1/6 \end{pmatrix} = \dots$$

$$= \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 4^k+2 & 2\cdot 4^k-2 & -4^k-2 \\ 2\cdot 4^k-2 & 4\cdot 4^k+2 & -2\cdot 4^k+2 \\ -4^k-2 & -2\cdot 4^k+2 & 4^k+2 \end{pmatrix}.$$

Blatt 2, Aufgabe 9

$f_0 := 0, \quad f_1 := 1, \quad f_{n+2} := f_n + f_{n+1}$ (Folge der Fibonaccizahlen)

Ges.: Explizite Formel für f_n, $n \geq 3$.

Lsg.: Wir definieren für $n \geq 0$ den Vektor

$$v_n := \begin{pmatrix} f_n \\ f_{n+1} \end{pmatrix}.$$

Dann gilt:

$$v_{n+1} = \begin{pmatrix} f_{n+1} \\ f_{n+2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \cdot f_n + 1 \cdot f_{n+1} \\ 1 \cdot f_n + 1 \cdot f_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f_n \\ f_{n+1} \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}}_{=:A} v_n$$

Induktiv folgt daher:

$$v_{n+1} = A v_n = A^2 v_{n-1} = A^3 v_{n-2} = \ldots = A^n v_1,$$

und ebenso

$$v_n = A^n v_0.$$

Wieder umgeschrieben:

$$v_n = \begin{pmatrix} f_n \\ f_{n+1} \end{pmatrix} = A^n \begin{pmatrix} f_0 \\ f_1 \end{pmatrix} = A^n \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = A^n v_0.$$

Unsere explizite Formel für f_n lautet daher:

$$f_n = \text{erste Komponente von } v_n = \text{erste Komponente von } A^n \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

In dieser Formel taucht noch A^n auf. Wie in Aufgabe 8 können wir daher noch weiter vereinfachen:

Eigenwerte von A: $\det \begin{pmatrix} -\lambda & 1 \\ 1 & 1-\lambda \end{pmatrix} = -\lambda(1-\lambda) - 1 = \lambda^2 - \lambda - 1 = (\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2)$,

wobei $\lambda_1 = (1+\sqrt{5})/2, \quad \lambda_2 = (1-\sqrt{5})/2$.

Eigenräume von A: $\ker(A - \lambda_1 E) = \operatorname{span}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ \lambda_1 \end{pmatrix}\right), \quad \ker(A - \lambda_2 E) = \operatorname{span}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ \lambda_2 \end{pmatrix}\right)$

Basistransformation: $T := \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 \end{pmatrix}, \quad T^{-1} = \frac{1}{\lambda_2 - \lambda_1} \begin{pmatrix} \lambda_2 & -1 \\ -\lambda_1 & 1 \end{pmatrix},$

denn $A = T B T^{-1}$ mit $B = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$.

Also: $$A^n \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = T B^n T^{-1} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = -\frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1^n & 0 \\ 0 & \lambda_2^n \end{pmatrix} \underbrace{\begin{pmatrix} \lambda_2 & -1 \\ -\lambda_1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}}_{= \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}} = -\frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\lambda_1^n \\ \lambda_2^n \end{pmatrix}$$

$$= -\frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} -\lambda_1^n + \lambda_2^n \\ -\lambda_1^{n+1} + \lambda_2^{n+1} \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} \lambda_1^n - \lambda_2^n \\ \lambda_1^{n+1} - \lambda_2^{n+1} \end{pmatrix}.$$

Fazit: $$f_n = \text{erste Komponente von } A^n \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{5}} (\lambda_1^n - \lambda_2^n) = \boxed{\frac{1}{\sqrt{5}} \left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n \right)}$$

Blatt 5, Aufgabe 22

(b) $N = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, gesucht: Normalform von N und Transformationsmatrix T so, dass $T^{-1}NT$ in Normalform ist.

① Berechnung der Kerne:

Nullmatrix

$\ker N = \operatorname{span}(e_1, e_2)$, $\ker N^2 = \ker O = \operatorname{span}(e_1, e_2, e_3, e_4)$.

② Wähle $v_1 := e_3 \in \ker N^2 \setminus \ker N$.

Dann $v_2 := Nv_1 = e_1$.

$\rightsquigarrow$ Teilbasis: e_1, e_3.

③ Wähle $w_1 := e_4 \in \ker N^2 \setminus \ker N$.

Dann $w_2 := Nw_1 = e_1 + e_2$.

$\rightsquigarrow$ Teilbasis: $e_1 + e_2$, e_4.

Also: Mit

$$T := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

erhält man die Normalform

$$T^{-1}NT = \begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix} 0 & 1 \\ & 0 \end{matrix}} & \\ & \boxed{\begin{matrix} 0 & 1 \\ & 0 \end{matrix}} \end{pmatrix}$$

(c) $N = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

① Berechnung der Kerne: $\ker N = \operatorname{span}(e_1, e_2, e_3)$, $\ker N^2 = \ker O = \mathbb{R}^4$.

② Wähle $v_1 := e_4 \in \ker N^2 \setminus \ker N$.

Dann $v_2 := Nv_1 = e_1$.

$\rightsquigarrow$ Teilbasis: e_1, e_4.

③ Wähle $w_1 := e_2 \in \ker N$.

$\rightsquigarrow$ Teilbasis: e_2.

④ Wähle $x_1 := e_3 \in \ker N$.

$\rightsquigarrow$ Teilbasis: e_3.

Also: Mit $T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ erhält man $T^{-1}NT = \begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix} 0 & 1 \\ & 0 \end{matrix}} & & \\ & \boxed{0} & \\ & & \boxed{0} \end{pmatrix}$ als Normalform.

(d) $N = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

① Berechnung der Kerne: $\ker N = \operatorname{span}(e_4, e_2 - e_3)$, $\ker N^2 = \ker \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \operatorname{span}(e_4, e_2 - e_3, e_3)$,

$\ker N^3 = \ker 0 = \mathbb{R}^4$.

② Wähle $v_1 := e_1 \in \ker N^4 \setminus \ker N^3$.

Dann $v_2 := Nv_1 = e_2 + e_3 + e_4$, $v_3 := Nv_2 = 2e_4$. $\rightsquigarrow$ Teilbasis: $2e_4, e_2 + e_3 + e_4, e_1$.

③ Es gilt $\ker N^3 = \mathbb{R}^4 = \operatorname{span}(e_1, e_4, e_2 + e_3) \oplus \operatorname{span}(e_2)$.

Wähle $w_1 := e_2 \in \ker N^3 \setminus \ker N^2$.

Dann $w_2 := Nw_1 = e_4$. $\lightning$ lin. abh. zu v_3! Also war $\ker N^3$ schon „verbraucht".

$\tilde{③}$ Wähle $\tilde{w}_1 := e_3 \in \ker N^2 \setminus \ker N$.

Dann $\tilde{w}_2 := N\tilde{w}_1 = e_4$. $\lightning$ lin. abh. zu v_3! Also war auch $\ker N^2$ schon „verbraucht".

$\tilde{\tilde{③}}$ Wähle $\tilde{\tilde{w}}_1 := e_2 - e_3 \in \ker N$.

$\rightsquigarrow$ Teilbasis $e_2 - e_3$.

<u>Also:</u> Mit $T = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ erhält man $T^{-1}NT = \begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix} 0 & 1 & \\ & 0 & 1 \\ & & 0 \end{matrix}} & \\ & \boxed{0} \end{pmatrix}$ als Normalform.

<u>Bem.:</u> Direkt nach ② hätte man auch sagen können:

„Es fehlt also nur noch ein Eigenvektor, da wir ja schon drei Basisvektoren gefunden haben und nur noch einen benötigen."

Dann hätte man gleich bei $\tilde{\tilde{③}}$ weitermachen können.

Allgemein ist es oft hilfreich, <u>zuerst</u> die Normalform aufzustellen (über Informationen aus charakteristischem Polynom und Minimalpolynom) und erst <u>dann</u> eine Basis zu suchen.

(e) $N = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 9 & -3 & -6 & -6 \\ -5 & 2 & 4 & 3 \\ 3 & -1 & -2 & 2 \end{pmatrix}$.

① $\ker N = \operatorname{span}\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$, $\ker N^2 = \ker \begin{pmatrix} -2 & 1 & 2 & 1 \\ -6 & 3 & 6 & 3 \\ 2 & -1 & -2 & -1 \\ -2 & 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \operatorname{span}\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right)$, $\ker N^3 = \mathbb{R}^4$.

② Wähle $v_1 := \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \in \ker N^3 \setminus \ker N^2$.

Dann $v_2 := Nv_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 9 \\ -5 \\ 3 \end{pmatrix}$, $v_3 := Nv_2 = \begin{pmatrix} -2 \\ -6 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}$. $\rightsquigarrow$ Teilbasis: $\begin{pmatrix} -2 \\ -6 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 9 \\ -5 \\ -3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

③ Wähle $w_1 := \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \in \ker N$. $\rightsquigarrow$ Teilbasis: $\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

<u>Also:</u> Mit $T = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 & 0 \\ -6 & 9 & 0 & 2 \\ 2 & -5 & 0 & -1 \\ -2 & -3 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ erhält man die Normalform $\begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix} 0 & 1 & \\ & 0 & 1 \\ & & 0 \end{matrix}} & \\ & \boxed{0} \end{pmatrix}$.

Blatt 5, Aufgabe 22(d)

Gegeben ist die nilpotente Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{4\times 4},$$

gesucht ist ihre Jordanform und eine Jordanbasis. Zunächst stellen wir die Jordanform auf:

1. Das charakteristische Polynom ist $\chi_A = (-X)^4$, da A nilpotent.
2. Die Grobstruktur für die Jordannormalform ist also
$$\left(\boxed{\;4\times 4\;} \right),$$
da das charakteristische Polynom aus genau einem Linearfaktor besteht.
3. Es gibt insgesamt fünf Möglichkeiten für die Feinstruktur:
$$\left(\boxed{\begin{matrix} 0 & 1 & & \\ & 0 & 1 & \\ & & 0 & 1 \\ & & & 0 \end{matrix}}\right) \quad \left(\begin{matrix} \boxed{\begin{matrix} 0 & 1 & \\ & 0 & 1 \\ & & 0 \end{matrix}} & \\ & \boxed{0} \end{matrix}\right) \quad \left(\begin{matrix} \boxed{\begin{matrix} 0 & 1 \\ & 0 \end{matrix}} & \\ & \boxed{\begin{matrix} 0 & 1 \\ & 0 \end{matrix}} \end{matrix}\right) \quad \left(\begin{matrix} \boxed{\begin{matrix} 0 & 1 \\ & 0 \end{matrix}} & & \\ & \boxed{0} & \\ & & \boxed{0} \end{matrix}\right) \quad \left(\begin{matrix} \boxed{0} & & & \\ & \boxed{0} & & \\ & & \boxed{0} & \\ & & & \boxed{0} \end{matrix}\right)$$
4. Wegen $A \neq 0$, $A^2 \neq 0$, $A^3 = 0$ ist der Nilpotenzgrad 3 und damit $\mu_A = X^3$. Nach dem Minimalpolynomkriterium ist also der größte Jordanblock ein 3×3-Block, also bleibt nur die Möglichkeit
$$J = \left(\begin{matrix} \boxed{\begin{matrix} 0 & 1 & \\ & 0 & 1 \\ & & 0 \end{matrix}} & \\ & \boxed{0} \end{matrix}\right).$$

Nun suchen wir eine Jordanbasis. Dazu hätten wir die Jordanform gar nicht benötigt (im Gegenteil – aus der Struktur der Basis kann man die Jordanform ablesen), aber sie hilft zur Orientierung.

1. Wie oben ist $\chi_A = (-X)^4$.
2. Nebenrechnungen ergeben folgende Basen:
$$\ker(A - 0I) = \operatorname{span}\{e_4, e_2 - e_3\} \tag{1}$$
$$\ker(A - 0I)^2 = \operatorname{span}\{e_4, e_2 - e_3, e_2\} \tag{2}$$
$$\ker(A - 0I)^3 = \operatorname{span}\{e_4, e_2 - e_3, e_2, e_1\}, \text{ fertig.} \tag{3}$$
Es hier gleich mehrere Gründe, wieso wir nach dem dritten Kern aufhören durften: Mehr als vier Dimensionen finden wir im $\mathbb{R}^4$ sowieso nicht; die Dimension der algebraischen Vielfachheit ist erreicht; der Exponent ist die Vielfachheit von $(X - 0)$ im Minimalpolynom.

3. Der höchste noch nicht verbrauchte Kern ist $\ker(A-0I)^3$. Die „verbotenen Vektoren“ sind die Basisvektoren des nächstniedrigeren Kerns; wir wählen e_1 als Vektor, der im höchstern Kern, aber nicht im Spann der verbotenen Vektoren liegt. Dann ergeben sich die Basisvektoren $(A-0I)^2e_1, (A-0I)e_1, e_1$, also

$$\begin{pmatrix}0\\0\\0\\2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix} \tag{4}$$

(in dieser Reihenfolge). Damit haben wir eine Teilbasis für den 3×3-Block bestimmt.

Bem.: Wir hätten auch $17e_1$ oder e_1+e_2 anstelle von e_1 verwenden können. Jedoch hätte das Verfahren mit e_2 oder $17e_2$ nicht funktioniert.

Da wir die Jordanform schon aufgestellt haben, können wir jetzt schon sehen, dass nur noch ein Eigenvektor fehlt. Wir können aber auch streng nach Schema vorgehen:

Dazu müssen wir zunächst wieder den höchsten Kern $\ker(A-0I)^3$ untersuchen. Die verbotenen Vektoren sind dann die drei Basisvektoren in (4) sowie die drei Kernvektoren in (2). Alle Basisvektoren der höchsten Kerns liegen aber schon im Spann dieser sechs Vektoren, also ist $\ker(A-0I)^3$ „verbraucht“.

Daher müssen wir den nächsten Kern, $\ker(A-0I)^2$, untersuchen. Die verbotenen Vektoren sind dann andere, nämlich die drei Basisvektoren in (4) sowie die beiden Kernvektoren in (1). Wieder liegen aber alle Basisvektoren von $\ker(A-0I)^2$ schon im Spann dieser fünf Vektoren, also ist auch $\ker(A-0I)^2$ verbraucht.

Es bleibt also nur der Kern $\ker(A-0I)$ mit den Basisvektoren e_4 und e_2-e_3. Die verbotenen Vektoren sind dann lediglich die drei Basisvektoren in (4); der Basisvektor e_2-e_3 liegt nicht im Spann der verbotenen Vektoren und kann daher verwendet werden.

Damit haben wir eine Teilbasis für den 1×1-Block bestimmt:

$$\begin{pmatrix}0\\1\\-1\\0\end{pmatrix}.$$

Bem.: Wir hätten auch $17(e_2-e_3)$ oder $(e_2-e_3)+30e_4$ verwenden können. Nicht funktioniert hätten e_4 und $17e_4$.

4. Insgesamt erhalten wir

$$S^{-1}AS = J,$$

wobei

$$S = \begin{pmatrix}0&0&1&0\\0&1&0&1\\0&1&0&-1\\2&1&0&0\end{pmatrix}.$$

Blatt 7, Aufgabe 32 ①

$A \in \mathbb{K}^{n \times n}$, $\quad \phi_A : \mathbb{K}[X] \longrightarrow \mathbb{K}^{n\times n}$

$$p \longmapsto p(A)$$

Bsp.: $\phi_A(X^2 - 5X + 7) = A^2 - 5A + 7A^0 = A^2 - 5A + 7 \cdot I_n$.

(a) Beh.: ϕ_A ist linear.

Bew.: Seien $f, g \in \mathbb{K}[X]$ beliebig und $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$ beliebig.

Dann lassen sich f und g ~~wie~~ als

$$f = \sum_{i=0}^{m} a_i X^i, \quad g = \sum_{i=0}^{m} b_i X^i$$

für ein gewisses $m \geq 0$ und gewisse Koeffizienten $a_i, b_i \in \mathbb{K}$ schreiben.

Daher gilt:

$$\phi_A(\lambda f + \mu g) = \phi_A\left(\sum_{i=0}^{m} (\lambda a_i + \mu b_i) X^i\right) \overset{\text{Def}}{=} \sum_{i=0}^{m} (\lambda a_i + \mu b_i) A^i$$

$$\underset{\text{Rechenregeln für Matrizen}}{=} \lambda \sum_{i=0}^{m} a_i A^i + \mu \sum_{i=0}^{m} b_i A^i \overset{\text{Def}}{=} \lambda \phi_A(f) + \mu \phi_A(g).$$

(b) Beh.: ϕ_A ist multiplikativ.

Bew.: Seien $f, g \in \mathbb{K}[X]$ beliebig. Wie oben gilt

$$f = \sum_{i=0}^{m} a_i X^i, \quad g = \sum_{i=0}^{n} b_i X^i$$

für gewisses $m \geq 0$ und Koeffizienten $a_i, b_i \in \mathbb{K}$.

Das Produkt von f und g ist dann wie folgt definiert:

$$f \cdot g = \sum_{j=0}^{m+n} \left(\sum_{i=0}^{j} a_i b_{j-i}\right) X^j.$$

sollte hier $i > m$ oder $j-i > n$ sein, setzt man definitionsgemäß 0.

Daher gilt:

$$\phi_A(fg) = \phi_A\left(\sum_{j=0}^{m+n} \left(\sum_{i=0}^{j} a_i b_{j-i}\right) X^j\right) \overset{\text{Def}}{=} \sum_{j=0}^{m+n} \left(\sum_{i=0}^{j} a_i b_{j-i}\right) A^j$$

$$\underset{\text{Rechenregeln für Matrizen}}{=} \cancel{\sum_{j=0}^{m+n} \sum_{i}} \left(\sum_{i=0}^{m} a_i A^i\right) \cdot \left(\sum_{i=0}^{n} b_i A^i\right) \overset{\text{Def}}{=} \phi_A(f)\, \phi_A(g).$$

(c) <u>Beh.:</u> $I := \ker \phi_A \subset \mathbb{K}[X]$ ist ein Ideal von $\mathbb{K}[X]$. ②

<u>Bew.:</u> Zu zeigen ist:

1. $I \neq \emptyset$
2. $x, y \in I \Rightarrow x + y \in I$
3. $x \in I,\ f \in \mathbb{K}[X] \Rightarrow fx \in I$. („Magneteigenschaft")

<u>Zu 1.:</u> Klar, da beispielsweise $\underset{\substack{\uparrow \\ \text{Nullpolynom}}}{0} \in I$, da I wegen (a) ein Untervektorraum von $\mathbb{K}[X]$ ist.

<u>Zu 2.:</u> Klar, da wieder wegen (a) I ein Untervektorraum ist.

<u>Zu 3.:</u> Sei $x \in I$ und $f \in \mathbb{K}[X]$ beliebig. Dann gilt

$$\phi_A(fx) \overset{(b)}{=} \phi_A(f) \cdot \underbrace{\phi_A(x)}_{\substack{=0, \\ \text{da } x \in I}} = 0,$$

also $fx \in I$.

<u>Bem.:</u> Eigenschaft 1. nicht vergessen, im Skript steht die ein bisschen versteckt!

Blatt 7, Aufgabe 33(c)

$A \in K^{2\times 2}$ beliebig.

Ges.: μ_A.

Dazu: Fallunterscheidung:

1. Fall: A ist ein Vielfaches der Einheitsmatrix, also $A = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix}$ für ein $a \in K$.

Dann ist das Minimalpolynom $\mu_A = X - a$, denn:

$$A - a \cdot I_2 = A - A = 0,$$

und $X - a$ ist normiert und hat kleinstmöglichen Grad (nämlich 1).

2. Fall: A ist kein Vielfaches der ~~E~~ Einheitsmatrix.

Dann kann umgekehrt ~~A~~ das Minimalpolynom von A auch nicht Grad 1 haben,

denn angenommen

$$\mu_A = X + b$$

für ein $b \in K$: Dann gilt $\mu_A(A) = A + b \cdot I_2 = 0$, also $A = -b \cdot I_2$,

also wäre A doch ein Vielfaches der Einheitsmatrix.

Also hat μ_A mindestens Grad 2.

Da μ_A stets ein Teiler von χ_A ist, und χ_A hier Grad 2 hat, muss daher schon gelten:

$$\mu_A = \chi_A \underset{A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}}{=} (a - X)(d - X) - bc = X^2 - (a+d) + (ad - bc).$$

Blatt 8, Aufgabe 35

$A \in \mathbb{K}^{n \times n}$, $\chi_A = \pm (X-\lambda_1)^{k_1} \cdots (X-\lambda_r)^{k_r}$ für gewisse paarweise verschiedene $\lambda_1, \ldots, \lambda_r \in \mathbb{K}$,

$\mu_A = + (X-\lambda_1)^{m_1} \cdots (X-\lambda_r)^{m_r}$.

(a) Beh.: χ_A teilt $(\mu_A)^n$.

Bew.: Aus A33(a) wissen wir, dass die Exponenten m_i jeweils ≥ 1 sind, denn jeder Eigenwert (= Nullstelle von χ_A) ist auch Nullstelle von μ_A.

Außerdem wissen wir, dass die Exponenten k_i jeweils $\leq n$ sind, denn χ_A hat ja insgesamt ~~Grad~~ genau Grad n.

Daher gilt:

$$(\mu_A)^n = (X-\lambda_1)^{nm_1} \cdots (X-\lambda_r)^{nm_r} = \underbrace{(X-\lambda_1)^{nm_1-k_1} \cdots (X-\lambda_r)^{nm_r-k_r}}_{=:\,p} \cdot \underbrace{(X-\lambda_1)^{k_1} \cdots (X-\lambda_r)^{k_r}}_{=\chi_A}$$

$nm_i - k_i \geq 0$, da $k_i \leq n \leq nm_i$; daher ist p wirklich ein Polynom (und keine ~~gebrochen~~rationale Funktion)

(b) Die ist schwierig zum Hinschreiben, machen wir bei Gelegenheit mündlich.

(c) Beh.: Die Nullstellen von χ_A sind genau die von μ_A.

Bew.: 1. Jede Nullstelle von χ_A ist auch eine von μ_A nach A33(a).

2. Jede Nullstelle von μ_A ist auch eine von χ_A, da nach Cayley-Hamilton χ_A ein Vielfaches von μ_A ist, und daher jeder Linearfaktor von μ_A auch in χ_A vorkommt.

Blatt 8, Aufgabe 36

$v_1 = \begin{pmatrix}2\\2\\-2\\-2\end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix}5\\5\\-7\\-7\end{pmatrix}, \quad v_3 = \begin{pmatrix}2\\1\\0\\3\end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4.$

Ges.: Orthonormale Basis (b_1, b_2, b_3) von $\operatorname{span}\{v_1, v_2, v_3\}$, sodass gilt:

$\operatorname{Span}\{b_1\} = \operatorname{span}\{v_1\}$

$\operatorname{Span}\{b_1, b_2\} = \operatorname{span}\{v_1, v_2\}$ (*)

($\operatorname{Span}\{b_1,b_2,b_3\} = \operatorname{span}\{v_1,v_2,v_3\}$ gilt eh, wenn (b_1,b_2,b_3) eine Basis von $\operatorname{span}\{v_1,v_2,v_3\}$ ist)

Lsg.: Es genügt, das Gram-Schmidtsche Orthonormierungsverfahren anzuwenden. Dass dann (*) gilt, wurde in der Vorlesung gezeigt.

1. $b_1 := v_1 / \|v_1\| = \begin{pmatrix}2\\2\\-2\\-2\end{pmatrix} \Big/ \sqrt{4+4+4+4} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix}2\\2\\-2\\-2\end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix}1\\1\\-1\\-1\end{pmatrix}.$

2. $\tilde{b}_2 := v_2 - \langle v_2, b_1 \rangle b_1$

$$= \begin{pmatrix}5\\5\\-7\\-7\end{pmatrix} - \frac{1}{2}\cdot 24 \cdot \frac{1}{2}\cdot\begin{pmatrix}1\\1\\-1\\-1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}5\\5\\-7\\-7\end{pmatrix} - 6\begin{pmatrix}1\\1\\-1\\-1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-1\\-1\\-1\\-1\end{pmatrix},$$

dann $b_2 := \tilde{b}_2 / \|\tilde{b}_2\| = \frac{1}{2}\begin{pmatrix}-1\\-1\\-1\\-1\end{pmatrix}.$

3. $\tilde{b}_3 := v_3 - \langle v_3, b_1 \rangle b_1 - \langle v_3, b_2 \rangle b_2$

$$= \begin{pmatrix}2\\1\\0\\3\end{pmatrix} - \frac{1}{2}\cdot 0 \cdot \frac{1}{2}\begin{pmatrix}1\\1\\-1\\-1\end{pmatrix} - \frac{1}{2}(-6)\cdot\frac{1}{2}\begin{pmatrix}-1\\-1\\-1\\-1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\\1\\0\\3\end{pmatrix} - \frac{3}{2}\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix}1\\-1\\-3\\3\end{pmatrix},$$

dann $b_3 := \tilde{b}_3 / \|\tilde{b}_3\| = \tilde{b}_3 \Big/ \Big(\sqrt{4}\cdot \underbrace{\sqrt{1+1+9+9}}\Big) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix}1\\-1\\-3\\-3\end{pmatrix}.$

$= 2\sqrt{5}$

Bem.: Bei dieser Aufgabe mussten wir bzgl. des Standardskalarprodukts orthonormieren. Wenn man bzgl. eines anderen Skalarprodukts $\langle\cdot,\cdot\rangle$ orthonormieren soll, funktioniert das Verfahren genauso – nur muss man beachten, dass $\langle\cdot,\cdot\rangle$ dann eben das andere Skalarprodukt meint und sich die Längen $\|\cdot\|$ auch über das andere Skalarprodukt berechnen:

$\|x\| = \sqrt{\langle x, x\rangle}$.

Blatt 8, Aufgabe 37

(a) Vorüberlegung: Sei $S \in \mathbb{R}^{n \times n}$ eine beliebige Matrix. Dann gilt für

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$$

die Rechnung

$$x^T S y = (x_1 \cdots x_n) \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = (x_1 \cdots x_n) \begin{pmatrix} a_{11} y_1 + \ldots + a_{1n} y_n \\ \vdots \\ a_{n1} y_1 + \ldots + a_{nn} y_n \end{pmatrix}$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_i y_j ,$$

wenn $S = (a_{ij})_{i,j}$.

Beh.: Jedes Skalarprodukt $\langle \cdot , \cdot \rangle$ auf $\mathbb{R}^n$ hat die Form

$$\langle \cdot , \cdot \rangle : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$(x, y) \longmapsto \langle x, y \rangle = x^T S y$$

für eine symmetrische und positiv definite Matrix $S \in \mathbb{R}^{n \times n}$.

Bem.: Folgende umgekehrte Behauptung ist auch richtig, sollte hier aber nicht gezeigt werden:

Für jede symmetrische und positiv definite Matrix $S \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ~~definiert~~ ist die Abbildung

$$\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$(x, y) \longmapsto x^T S y$$

ein Skalarprodukt auf $\mathbb{R}^n$.

Bew. d. Beh.: Sei also $\langle \cdot , \cdot \rangle$ ein beliebiges Skalarprodukt auf $\mathbb{R}^n$.
Dann gilt für beliebiges $x, y \in \mathbb{R}^n$:

$$\langle x, y \rangle \underset{x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \, y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}}{=} \left\langle \sum_{i=1}^{n} x_i e_i , \sum_{j=1}^{n} y_j e_j \right\rangle \underset{\text{Bilinearität}}{=} \sum_{i=1}^{n} x_i \left\langle e_i , \sum_{j=1}^{n} y_j e_j \right\rangle \underset{\substack{\text{nochmal} \\ \text{Bilinearität}}}{=} \sum_{i=1}^{n} x_i \left(\sum_{j=1}^{n} y_j \langle e_i, e_j \rangle \right)$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \langle e_i, e_j \rangle x_i y_j .$$

Aus diesem Ergebnis sieht man: Wenn wir $S := (\langle e_i, e_j \rangle) = \begin{pmatrix} \langle e_1, e_1 \rangle & \langle e_1, e_2 \rangle & \cdots & \langle e_1, e_n \rangle \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \langle e_n, e_1 \rangle & \langle e_n, e_2 \rangle & \cdots & \langle e_n, e_n \rangle \end{pmatrix}$
definieren, gilt in der Tat:

$$\langle x, y \rangle = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \langle e_i, e_j \rangle x_i y_j = x^T S y$$

für alle $x, y \in \mathbb{R}^n$. Damit ist der erste Teil der Behauptung schon gezeigt.

Bleibt zu zeigen: ⑦

1. S ist symmetrisch.
2. S ist positiv definit.

<u>Zu 1.</u>: Es gilt

$$e_i^T S e_j = \langle e_i, e_j \rangle \overset{\text{Skalarprodukt symm.}}{=} \langle e_j, e_i \rangle = e_j^T S e_i,$$

also ist die i-te Zeile der j-ten Spalte von S gleich der j-ten Zeile der i-ten Spalte von S,

also ist S symmetrisch.

<u>Zu 2.</u>: Für alle $x \in \mathbb{R}^n$ mit $x \neq 0$ gilt

$$x^T S x = \langle x, x \rangle \underset{\substack{\text{Skalarprodukt} \\ \text{positiv definit}}}{>} 0.$$

Allg.:

<u>Bem.</u>: Mit ein bisschen mehr Arbeit kann man sogar zeigen, dass es zu jedem Skalarprodukt $\langle \cdot, \cdot \rangle$ auch <u>nur</u> eine Matrix $S \in \mathbb{R}^{n \times n}$ mit $\langle x, y \rangle = x^T S y$ für alle $x, y \in \mathbb{R}^n$ gibt.

Zusammen mit der umgekehrten, nicht zu zeigenden Behauptung folgt daher:

Zu jedem Skalarprodukt $\langle \cdot, \cdot \rangle$ auf $\mathbb{R}^n$ gibt es genau eine Matrix $S \in \mathbb{R}^{n \times n}$ mit

$$\langle x, y \rangle = x^T S y \quad \text{für alle } x, y \in \mathbb{R}^n,$$

und zu jeder Matrix $S \in \mathbb{R}^{n \times n}$, welche symmetrisch und positiv definit ist, gibt es genau ein Skalarprodukt $\langle \cdot, \cdot \rangle$ auf $\mathbb{R}^n$, sodass

$$x^T S y = \langle x, y \rangle \quad \text{für alle } x, y \in \mathbb{R}^n$$

gilt.

(b) Ges.: Alle Skalarprodukte auf $\mathbb{R}^2$. ③

Lsg.: Nach (a) wissen wir, dass zu jedem Skalarprodukt $\langle .,. \rangle$ auf $\mathbb{R}^2$ genau eine symmetrische und positiv definite Matrix S mit

$$\langle x, y \rangle = x^T S y$$

für alle $x, y \in \mathbb{R}^2$ gibt. Wenn wir

$$S = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

schreiben, gilt also:

$$\left\langle \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \right\rangle = a x_1 y_1 + b x_1 y_2 + c x_2 y_1 + d x_2 y_2.$$

Damit ist die Aufgabe aber noch nicht getan, der Hauptteil fehlt noch:
Wir müssen herausfinden, welche Möglichkeiten für a, b, c, d in Frage kommen.

Also:

Menge aller Möglichkeiten für S

$$= \{ S \in \mathbb{R}^{2 \times 2} \mid S \text{ symmetrisch, } S \text{ positiv definit} \}$$

$$= \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ b & d \end{pmatrix} \;\middle|\; a, b, d \in \mathbb{R}, \begin{pmatrix} a & b \\ b & d \end{pmatrix} \text{ positiv definit} \right\}$$

$$\overset{(*)}{=} \left\{ S = \begin{pmatrix} a & b \\ b & d \end{pmatrix} \;\middle|\; a, b, d \in \mathbb{R}, \; a > 0, \; \underbrace{\det S}_{= ad - b^2} > 0 \right\}.$$

Das ist die fertige Antwort. Wir müssen aber noch (*) zeigen:

„⊆": 1. $e_1^T S e_1 = (1 \;\; 0) \begin{pmatrix} a & b \\ b & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = a > 0$, da $\begin{pmatrix} a & b \\ b & d \end{pmatrix}$ positiv definit.

2. $(-\frac{b}{a} \;\; 1) \, S \begin{pmatrix} -b/a \\ 1 \end{pmatrix} = (-b/a \;\; 1) \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{b^2}{a} + d \end{pmatrix} = -\frac{b^2}{a} + d > 0$, da $\begin{pmatrix} a & b \\ b & d \end{pmatrix}$ positiv definit.

$$\underset{a>0}{\Rightarrow} \underbrace{-b^2 + ad}_{= \det S} > 0.$$

„⊇": $x^T S x = (x_1 \;\; x_2) \, S \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = a x_1^2 + b x_1 x_2 + b x_2 x_1 + c x_2^2 = a x_1^2 + 2 b x_1 x_2 + c x_2^2$

$$= \underbrace{(\sqrt{a}\, x_1 + b x_2 / \sqrt{a})^2 - \frac{b^2}{a} x_2^2}_{= a x_1^2 + 2 b x_1 x_2} + c x_2^2 = (\sqrt{a}\, x_1 + b x_2 / \sqrt{a})^2 + \underbrace{\left(c - b^2/a\right)}_{> 0,\ \text{da } a>0 \text{ und } \det S > 0} x_2^2.$$

quadratische Ergänzung, $a > 0$

Daher sehen wir zumindest, dass $x^T S x \geq 0$ für alle $x \in \mathbb{R}^2$ gilt.

Sei nun $x \in \mathbb{R}^2$, $x \neq 0$, zu zeigen: $x^T S x > 0$.

1. Fall: $x_2 \neq 0$. Dann ist der zweite Summand echt positiv, d.h. > 0, und damit auch $x^T S x$.

2. Fall: $x_2 \overset{!}{=} 0$. Dann gilt $x_1 \neq 0$, und

$$x^T S x = (\sqrt{a}\, x_1 + b \cdot 0 / \sqrt{a})^2 + 0 = a x_1^2 > 0,$$

da $a > 0$.

4

(c) Frage: Gibt es ein Skalarprodukt $\langle \cdot,\cdot \rangle$ auf $\mathbb{R}^2$ für das gilt:

$$\left\langle \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} \right\rangle = \left\langle \begin{pmatrix}3\\-4\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix} \right\rangle = 0 \,?$$

Antwort: Nein, gibt es nicht. Denn:

$$0 = \left\langle \begin{pmatrix}3\\-4\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix} \right\rangle = \langle 3e_1 - 4e_2, e_1 - e_2 \rangle \underset{\text{Bilinearität}}{=} 3\langle e_1,e_1\rangle - 3\overbrace{\langle e_1,e_2\rangle}^{=0} - 4\overbrace{\langle e_2,e_1\rangle}^{=\langle e_1,e_2\rangle = 0} + 4\langle e_2,e_2\rangle$$

$$= 3\underbrace{\langle e_1,e_1\rangle}_{>0} + 4\underbrace{\langle e_2,e_2\rangle}_{>0} > 0, \quad ↯.$$

da positiv definit

Blatt 10, Aufgabe 46

In der Übung hatten wir nicht mehr geschafft, eine Orthonormalbasis von $U^\perp$ zu bestimmen, wobei $U = \operatorname{span} M$ mit $M = \{v_1, v_2\} \subset \mathbb{R}^4$ und

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1+\sqrt{2} \\ 1 \\ 1+\sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} 1-\sqrt{2} \\ 1 \\ 1-\sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Das geht so:

Zunächst ist es hilfreich, sich an Aufgabe 38 von Blatt 9 zu erinnern. Diese sagt nämlich, dass sich $U^\perp = (\operatorname{span} M)^\perp$ einfacher als $U^\perp = M^\perp$ bestimmen lässt. Dies führt dann auf ein lineares Gleichungssystem:

$$\begin{aligned}
M^\perp &= \left\{ x \in \mathbb{R}^4, \,\middle|\, \langle x, v_1 \rangle = 0, \langle x, v_2 \rangle = 0 \right\} \\
&= \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \,\middle|\, \begin{pmatrix} 1+\sqrt{2} & 1 & 1+\sqrt{2} & 1 \\ 1-\sqrt{2} & 1 & 1-\sqrt{2} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = 0 \right\} \\
&\overset{(\star)}{=} \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \,\middle|\, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = 0 \right\} \\
&= \left\{ x = (x_1, x_2, x_3, x_4)^T \,\middle|\, x_3 = -x_1, x_4 = -x_2 \right\} \\
&= \left\{ (x_1, x_2, -x_1, -x_2)^T \,\middle|\, x_1, x_2 \in \mathbb{R} \right\} \\
&= \left\{ x_1(1, 0, -1, 0)^T + x_2(0, 1, 0, -1)^T \,\middle|\, x_1, x_2 \in \mathbb{R} \right\} \\
&= \operatorname{span} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}
\end{aligned}$$

In Schritt $(\star)$ wurde die eigentliche Hauptarbeit geleistet, nämlich das lineare Gleichungssystem auf eine einfache Form zu bringen (verwendete Zeilentransformationen: $\mathrm{II}' := \mathrm{II} + \mathrm{I}$, $\mathrm{II}' := \mathrm{II}/2$, $\mathrm{I}' := \mathrm{I} - \mathrm{II}$, $\mathrm{I}' := \mathrm{I}/\sqrt{2}$, $\mathrm{II}' := \mathrm{II} - \mathrm{I}$); das kann man natürlich auch auf andere Arten und Weisen machen.

In der letzten Zeile der Rechnung steht dann bereits eine Basis von $U^\perp$. Um aus dieser eine Orthonormalbasis zu erhalten, kann man entweder das Gram–Schmidt-Verfahren anwenden (funktioniert immer und man muss nur rechnen, nicht denken) oder durch geschicktes Hinschauen selbst die Basis orthonormieren (geht manchmal schneller).

Hier sieht man, dass die beiden Basisvektoren zufälligerweise schon aufeinander senkrecht stehen, also müssen sie nur noch normiert werden. Damit ist

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\0\\-1\\0\end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}0\\1\\0\\-1\end{pmatrix}$$

eine mögliche Orthonormalbasis von $U^{\perp}$.

Blatt 13, Aufgabe 61(c)

Sei V endlich-dimensionaler K-Vektorraum und seien die Mengen

$$M_1 := \{f\colon V \to V^\star \mid f \text{ Isomorphismus}\}$$

und

$$M_2 := \{B\colon V \times V \to K \mid B \text{ nicht ausgeartete Bilinearform}\}$$

gegeben.

Behauptung. *Es gibt eine Bijektion zwischen M_1 und M_2.*

Beweis. Durch kanonische Überlegung kommt man auf die Abbildung

$$\begin{array}{rccl} \varphi\colon & M_1 & \longrightarrow & M_2 \\ & f & \longmapsto & \varphi(f) = ((x,y) \mapsto f(x)(y)) \end{array}$$

Dabei ist mit $\varphi(f)$ also folgende Abbildung gemeint,

$$\begin{array}{rccl} \varphi(f)\colon & V \times V & \longrightarrow & K \\ & (x,y) & \longmapsto & f(x)(y), \end{array}$$

und die Schreibweise $f(x)(y)$ ergibt Sinn, denn da $f \in M_1$, ist $f(x)$ ein Element von $V^\star$, insbesondere also eine Abbildung, die ein Argument $y \in V$ auf ein Element von K schickt.

Warnung: Nicht φ mit $\varphi(f)$, und nicht f mit $f(x)$ verwechseln!

Es ist nun zu zeigen, dass φ wohldefiniert, injektiv und surjektiv ist.

– *Wohldefiniertheit:* Zu zeigen ist, dass die Abbildung $\varphi(f)$ für jedes $f \in M_1$ wirklich ein Element von M_2 ist, d. h. dass $\varphi(f)$ bilinear und nicht ausgeartet ist.

  Additivität im ersten Argument: $\varphi(f)(x + \tilde{x}, y) = f(x + \tilde{x})(y) = (f(x) + f(\tilde{x}))(y) = f(x)(y) + f(\tilde{x})(y) = \varphi(f)(x,y) + \varphi(f)(\tilde{x}, y)$ für alle $x, \tilde{x}, y \in V$ (dabei folgt das zweite Gleichheitszeichen wegen der Linearität von f und das dritte nach Definition der Addition von Abbildungen)

  Homogenität im ersten Argument: $\varphi(f)(ax, y) = f(ax)(y) = (af(x))(y) = af(x)(y) = a\varphi(f)(x,y)$ für alle $x, y \in V$, $a \in K$ (das zweite Gleichheitszeichen folgt wegen der Linearität von f, das dritte nach Definition der Skalarmultiplikation von Abbildungen mit Körperelementen)

  Additivität im zweiten Argument: $\varphi(f)(x, y + \tilde{y}) = f(x)(y + \tilde{y}) = f(x)(y) + f(x)(\tilde{y}) = \varphi(f)(x) + \varphi(f)(y)$ für alle $x, y, \tilde{y} \in V$ (dabei folgt das zweite Gleichheitszeichen wegen der Linearität von $f(x)$)

  Homogenität im zweiten Argument: $\varphi(f)(x, ay) = f(x)(ay) = af(x)(y) = a\varphi(f)(x,y)$ für alle $x, y \in V$, $a \in K$ (das zweite Gleichheitszeichen folgt wegen der Linearität von $f(x)$)

Nicht-Ausgeartetheit, Teil 1: Sei $x \in V$ fest. Sei $\varphi(f)(x,y) = 0$ für alle $y \in V$, wir müssen zeigen, dass $x = 0$. Nach Voraussetzung gilt also $f(x)(y) = 0$ für alle $y \in V$, also ist schon die Abbildung $f(x)$ die Nullabbildung, d. h. es gilt $f(x) = 0$. Da f insbesondere injektiv ist, folgt $x = 0$.

Nicht-Ausgeartetheit, Teil 2: Sei $y \in V$ fest und gelte $\varphi(f)(x,y) = 0$ für alle $x \in V$, wir müssen zeigen, dass $y = 0$. Dazu zeigen wir, dass $\alpha(y) = 0$ für alle $\alpha \in V^\star$, nach Vorlesung folgt dann schon, dass $y = 0$. Sei also $\alpha \in V^\star$ beliebig. Da f insbesondere surjektiv ist, gibt es ein $x \in V$ mit $f(x) = \alpha$. Somit folgt $\alpha(y) = f(x)(y) = 0$.

– *Injektivität:* Seien $f, g \in M_1$ mit $\varphi(f) = \varphi(g)$, wir müssen zeigen, dass $f = g$.

  Nach Voraussetzung folgt zunächst, dass $f(x)(y) = g(x)(y)$ für alle $x, y \in V$. Da diese Gleichheit für alle $y \in V$ gilt, folgt $f(x) = g(x)$. Da wiederum diese Gleichheit für alle $x \in V$ gilt, folgt $f = g$.

  Warnung: Da M_1 und M_2 keine Vektorräume sind, hat φ auch keine Chance, linear zu sein. Daher genügt es ohne gesonderte Begründung hier nicht, den typischen Ansatz $\varphi(f) = 0$ zu machen und dann zu versuchen, $f = 0$ zu folgern.

– *Surjektivität:* Sei $B \in M_2$ eine beliebige nicht ausgeartete Bilinearform. Wir müssen ein $f \in M_1$ mit $\varphi(f) = B$ finden; ausgeschrieben bedeutet das, dass $\varphi(f)(x,y) = f(x)(y) = B(x,y)$ für alle $x, y \in V$ gelten soll.

  Davon inspiriert definieren wir:

$$\begin{array}{rccl} f\colon & V & \longrightarrow & V^\star \\ & x & \longmapsto & f(x) = (y \mapsto B(x,y)) \end{array}$$

  Dabei ist mit $f(x)$ also die Abbildung

$$\begin{array}{rccl} f(x)\colon & V & \longrightarrow & K \\ & y & \longmapsto & f(x)(y) = B(x,y) \end{array}$$

  gemeint. Direkt nach Definition ist dann klar, dass $\varphi(f) = B$; wir müssen aber noch zeigen, dass f wohldefiniert und wirklich ein Element von M_1 ist.

  Wohldefiniertheit: Zu zeigen ist, dass $f(x)$ für alle $x \in V$ wirklich ein Element von $V^\star$ ist, also wirklich eine lineare Abbildung von V nach K ist. Wir müssen also nachprüfen, ob

$$f(x)(y + \tilde{y}) = f(x)(y) + f(x)(\tilde{y}) \quad \text{und} \quad f(x)(ay) = af(x)(y)$$

  für alle $y, \tilde{y} \in V$ und $a \in K$ gilt. Wenn wir die Definition von $f(x)$ einsetzen, folgt das sofort über die Linearität von B im zweiten Argument.

  Um zu zeigen, dass f ein Element von M_1 ist, müssen wir zeigen, dass f linear, injektiv und surjektiv ist.

  Linearität von f: Zu zeigen ist, dass

$$f(x + \tilde{x}) = f(x) + f(\tilde{x}) \quad \text{und} \quad f(ax) = af(x)$$

für alle $x, \tilde{x} \in V$ und $a \in K$ gilt. Da auf den linken und rechten Seiten jeweils Abbildungen (von V nach K) stehen, sind diese Aussagen gleichbedeutend damit, dass

$$f(x+\tilde{x})(y) = f(x)(y) + f(\tilde{x})(y) \quad \text{und} \quad f(ax)(y) = af(x)(y)$$

für alle $x, \tilde{x}, y \in V$ und $a \in K$ gilt. Wenn wir die Definition von f einsetzen, folgt das sofort über die Linearität von B im ersten Argument.

Injektivität von f: Sei $f(x) = 0$ (Nullabbildung von V nach K), wir müssen zeigen, dass $x = 0$. Nach Voraussetzung gilt also $f(x)(y) = 0(y) = 0$ für alle $y \in V$; nach Definition folgt somit $B(x, y) = 0$ für alle $y \in V$. Da B nicht ausgeartet ist, gilt somit $x = 0$.

Surjektivität von f: Dazu hilft die Dimensionsformel:

$$\dim \operatorname{im} f = \dim V - \dim \ker f = \dim V - 0 = \dim V = \dim V^\star,$$

also folgt $\operatorname{im} f = V^\star$ und damit die Surjektivität von f. $\square$

Abschließend noch ein paar Bemerkungen:

1. Die Hauptaufgabe bestand darin, auf die Abbildungsvorschrift von φ zu kommen. Danach waren zwar noch viele Nachweise zu erbringen, die meisten konnte man aber recht knapp erledigen. Um Unklarheiten vorzubeugen, wollte ich hier auch nichts abkürzen; in der Klausur hätte man aber an einigen Stellen (beispielsweise bei den Linearitätsprüfungen) auch einfach „klar“ hinschreiben können.
2. In der Linearen Algebra I hatten wir uns überlegt, dass es stets einen kanonischen Isomorphismus von V in den Bidualraum $(V^\star)^\star$ gibt. Die Aufgabe zeigt, dass es im Allgemeinen aber keinen kanonischen Isomorphismus von V nach $V^\star$ gibt, da es im Allgemeinen auch keine kanonische Bilinearform auf V gibt.

   Ist V allerdings nicht irgendein Vektorraum, sondern ein euklidischer, so kommt V ja mit einem Skalarprodukt $\langle \cdot, \cdot \rangle$ daher; nach Definition ist das Skalarprodukt gerade eine nicht ausgeartete Bilinearform, also ein Element von M_2, womit man in diesem Fall doch einen kanonischen Isomorphismus von V nach $V^\star$ angeben kann, nämlich $\varphi^{-1}(\langle \cdot, \cdot \rangle)$.
3. Im Kontext der Programmiersprache Haskell kommt der Übergang von M_1 zu M_2 sehr häufig vor. Man spricht da von „Currying“, nach dem Mathematiker und Logiker Haskell Curry.

Hier eine kurze Erklärung zu Quadriken und der Hauptachsentransformation. Als Grundlage diente größtenteils eine Beschreibung von Markus Göhl vom Sommersemester 2010.

Quadriken

Definition. Eine Quadrik ist die Nullstellenmenge eines quadratischen Polynoms. Das Polynom darf dabei mehr als nur eine Variable enthalten.

Beispiel. Die Teilmenge

$$Q := \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \,\middle|\, 5x^2 - 4xy + 8y^2 + \frac{20}{\sqrt{5}}x - \frac{80}{\sqrt{5}}y + 4 = 0 \right\} \subset \mathbb{R}^2$$

des zweidimensionalen Raums ist eine Quadrik.

(Nullstellenmengen hat man auch schon in der Schule untersucht, da aber meistens nur von Funktionen einer statt mehrerer veränderlicher Variablen.)

Quadriken kann man in Koordinatensysteme einzeichnen, Wikipedia hat schöne Grafiken dazu: `http://en.wikipedia.org/wiki/Quadric`

Quadriken klassifiziert man in verschiedene Typen (Ellipsoid, Paraboloid, Kegel und einige andere; die Wikipedia-Seite zählt alle Typen auf). Bei der Hauptachsentransformation geht es darum, ohne Zeichnung allein durch Rechnung festzustellen, welchen Typ eine gegebene Quadrik hat.

Beispiel. Erinnert man sich an den Satz von Pythagoras, so sieht man, dass

$$Q := \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \,\middle|\, x^2 + y^2 - 1 = 0 \right\}$$

ein Kreis um den Koordinatenursprung mit Radius 1 ist. Wenn man nun die Koordinaten ändert, beispielsweise

$$\begin{aligned} x &= 2\hat{x} - \hat{y} \\ y &= \hat{x} + \hat{y} \end{aligned}$$

definiert, erhält man die transformierte Quadrik

$$\widehat{Q} := \left\{ \begin{pmatrix} \hat{x} \\ \hat{y} \end{pmatrix} \,\middle|\, (2\hat{x} - \hat{y})^2 + (\hat{x} + \hat{y})^2 - 1 = 0 \right\},$$

fertig vereinfacht gibt das

$$\widehat{Q} = \left\{ \begin{pmatrix} \hat{x} \\ \hat{y} \end{pmatrix} \,\middle|\, 5\hat{x}^2 - 2\hat{x}\hat{y} + 2\hat{y}^2 - 1 = 0 \right\}.$$

Zeichnet man diese Menge in ein Koordinatensystem ein, erhält man einen deformierten Kreis, eine Ellipse; allerdings ist das überhaupt nicht klar, wenn man nur die transformierte Gleichung gegeben hat. Die Hauptachsentransformation ist nun eine Methode, um aus einer gegebenen unübersichtlichen Gleichung eine viel einfacherere zu erhalten.

Hauptachsentransformation

Die Hauptachsentransformation kann man in fünf Schritten als Rechenschema formulieren:

Gegeben: eine beliebige Quadrik.
Gesucht: eine einfachere Form der Quadrik.
Verfahren:

0. Die gegebene Quadrik in Matrixsprache schreiben.
1. Die Matrix orthogonal diagonalisieren, d. h. eine Orthonormalbasis aus Eigenvektoren finden.
2. Wieder zurück in Gleichungssprache übersetzen.
3. Mittels quadratischer Ergänzung die erhaltene Gleichung weiter vereinfachen.
4. Falls lineare Terme übrig bleiben: Zusatztransformation ausführen.

Musterbeispiel

Es sei die zweidimensionale Quadrik

$$Q := \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \,\middle|\, x_1^2 + 4x_1x_2 + x_2^2 + 3x_1 - 5x_2 - 1 = 0 \right\} \subset \mathbb{R}^2$$

gegeben.

Schritt 0

In Matrixsprache schreibt sich die Quadrik als

$$Q = \left\{ x \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, \langle Mx, x\rangle + \langle b, x\rangle + c = 0 \right\},$$

wobei

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, \qquad b = \begin{pmatrix} 3 \\ -5 \end{pmatrix}, \qquad c = -1$$

und die spitzen Klammern $\langle \cdot, \cdot \rangle$ das Standardskalarprodukt im $\mathbb{R}^2$ bezeichnen, zur Erinnerung:

$$\left\langle \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \right\rangle = x_1y_1 + x_2y_2$$

Die Matrix M, der Vektor b und die Zahl c kommen dabei wie folgt zustande: Die Zahl c ist der konstante Term des die Quadrik definierenden Polynoms, also der Summand, der mit keiner der Variablen multipliziert wird.

Der Vektor b sammelt die Koeffizienten der linearen Glieder auf, also derjenigen Summanden, in denen genau eine Variable genau einmal vorkommt.

[Je nach Geschmack schreiben andere nicht „$\langle b, x\rangle$“, sondern „$2\langle b, x\rangle$“, und müssen dann als b entsprechend die Hälfte nehmen.]

Auf der Hauptdiagonale der Matrix M stehen die Koeffizienten der rein-quadratischen Terme, d. h. der Summanden, in denen genau eine Variable genau zweimal vorkommt; im Beispiel sind das x_1^2 und x_2^2 (jeweils mit Koeffizient 1), nicht aber $4x_1x_2$.

Die restlichen Komponenten der Matrix ergeben sich aus den gemischt-quadratischen Termen, d. h. den Summanden, in denen genau zwei Variablen jeweils genau einmal vorkommen, im Beispiel ist das lediglich $4x_1x_2$. In die Matrix trägt man aber nicht einfach den Koeffizienten, im Beispiel also die Zahl 4, ein, sondern die Hälfte des Koeffizienten (also 2), und zwar in gleich zwei Zellen der Matrix:

Beispiel. Der Term $4x_1x_2$ schreibt vor, dass man in die $(1, 2)$-Komponente (erste Zeile, zweite Spalte) und in die $(2, 1)$-Komponente (zweite Zeile, erste Spalte) jeweils $4/2 = 2$ einträgt.

Bei einem hypothetischen anderen Term wie $12x_3x_7$ müsste man in die $(3, 7)$-Komponente und in die $(7, 3)$-Komponente jeweils $12/2 = 6$ eintragen.

Bemerkung. Wenn dieser Verfahrensschritt seltsam anmutet, kann man mal die durch das Verfahren angegebene Gleichung in Matrixform, also $\langle Mx, x\rangle + \langle b, x\rangle + c = 0$, durch Einsetzen eines beliebigen Vektors $x = \left(\begin{smallmatrix} x_1 \\ x_2 \end{smallmatrix}\right)$ fertig ausrechnen. Dabei wird man feststellen, dass man wieder genau auf die ursprüngliche Gleichung kommt.

Schritt 1

Nun muss man die Matrix orthogonal diagonalisieren. „Orthogonal“ bedeutet dabei, dass man nicht irgendeine Basis aus Eigenvektoren finden soll, sondern eine, die sogar eine Orthonormalbasis ist.

(Zur Erinnerung: Eine Basis heißt „Orthonormalbasis“, wenn jeder Vektor der Basis Länge 1 hat und je zwei verschiedene Basisvektoren aufeinander senkrecht stehen. Ein Vektor x hat genau dann Länge 1, wenn $\|x\| = \sqrt{\langle x, x\rangle} = 1$. Vektoren x, y stehen genau dann aufeinander senkrecht, wenn $\langle x, y\rangle = 0$.)

Da die in Schritt 0 konstruierte Matrix stets symmetrisch ist, weiß man aus der allgemeinen Theorie, dass es auf jeden Fall möglich ist, die Matrix orthogonal zu diagonalisieren, man muss nur das Standardprogramm durchziehen:

– Charakteristisches Polynom:

$$\chi(\lambda) = \det \begin{pmatrix} 1-\lambda & 2 \\ 2 & 1-\lambda \end{pmatrix} = (1-\lambda)^2 - 4 = \lambda^2 - 2\lambda - 3 = (\lambda+1)(\lambda-3)$$

– Eigenwerte (= Nullstellen des charakteristischen Polynoms):

$\lambda_1 = -1$, $\lambda_2 = 3$

Sollte die Zahl 0 ein Eigenwert sein, sollte man an dieser Stelle darauf achten, sie als *letzten* Eigenwert aufzuführen. Sonst funktioniert nämlich Schritt 4 später nicht richtig.

Probe auf Verrechner: Die Summe der Eigenwerte (mit Vielfachheit gezählt) muss gleich der Summe der Diagonaleinträge von A sein. Hier geht die Probe auf, da $-1 + 3 = 2 = 1 + 1$.

– Eigenräume:

zum Eigenwert -1: $\ker \begin{pmatrix} 1+1 & 2 \\ 2 & 1+1 \end{pmatrix} = \ker \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} = \operatorname{span} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$

zum Eigenwert $\quad 3$: $\ker \begin{pmatrix} 1-3 & 2 \\ 2 & 1-3 \end{pmatrix} = \ker \begin{pmatrix} -2 & 2 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} = \operatorname{span} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$

– Mögliche Orthonormalbasis aus Eigenvektoren:

$$B = (v_1, v_2),$$

wobei

$$v_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \qquad v_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Lässt man die beiden Normierungsfaktoren $\frac{1}{\sqrt{2}}$ weg, hat man zwar immer noch eine Basis aus Eigenvektoren, aber nicht mehr eine orthonormale Basis aus Eigenvektoren. Den richtigen zu verwendenden Normierungsfaktor erhält man über die Formel 1/(Länge des zu normierenden Vektors).

Schließlich muss man noch darauf achten, dass je zwei verschiedene Basisvektoren aufeinander senkrecht stehen. Dazu muss man speziell in diesem Beispiel aber nicht einmal eine Rechnung durchführen, denn man weiß aus allgemeiner Theorie, dass Eigenvektoren einer symmetrischen Matrix zu verschiedenen Eigenwerten notwendigerweise aufeinander senkrecht stehen.

– Basistransformation:

$$M = S\widehat{M}S^{-1},$$

wobei

$$\widehat{M} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}, \qquad S = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

(Zur Erinnerung: In der Diagonalform $\widehat{M}$ stehen auf der Hauptdiagonale die Eigenwerte (in der Reihenfolge, wie man sie bei ihrer Berechnung oben beliebig festgelegt hat) und außerhalb der Hauptdiagonale Nullen, und in die Matrix S schreibt man die Eigenvektoren (in derselben Reihenfolge) nebeneinander als Spalten. Der Übersichtlichkeit ist hier der gemeinsame Faktor $\frac{1}{\sqrt{2}}$ nach vorne gezogen.)

Schritt 2

Jetzt erfolgt die Rückübersetzung:

$$\begin{aligned}\widehat{Q} &:= \left\{ \hat{x} = \begin{pmatrix} \hat{x}_1 \\ \hat{x}_2 \end{pmatrix} \,\middle|\, \langle \widehat{M}\hat{x}, \hat{x} \rangle + \langle S^T b, \hat{x} \rangle + c = 0 \right\} \\ &= \left\{ \begin{pmatrix} \hat{x}_1 \\ \hat{x}_2 \end{pmatrix} \,\middle|\, -\hat{x}_1^2 + 3\hat{x}_2^2 + \frac{8}{\sqrt{2}}\hat{x}_1 - \frac{2}{\sqrt{2}}\hat{x}_2 - 1 = 0 \right\}\end{aligned}$$

Diese transformierte Form zeichnet sich dadurch aus, dass es keine gemischt-quadratischen Terme mehr gibt; in diesem Sinn ist diese Form einfacher als die ursprünglich gegebene.

Grafisch gilt zwar nicht, dass $Q = \widehat{Q}$, aber $\widehat{Q}$ entsteht aus Q „vermöge der orthogonalen Basistransformation S^T“. Anschaulich hat man das Koordinatensystem so gedreht und gespiegelt, dass die neuen Koordinatenachsen mit den Achsen der Quadrik (den sog. Hauptachsen!) übereinstimmen; dadurch vereinfachte sich die Gleichung.

Wenn man konkret zwischen Originalpunkten und transformierten Punkten umrechnen mag, kann man das mithilfe der beiden Formeln

$$\begin{aligned}\hat{x} &= S^T x \\ x &= (S^T)^{-1}\hat{x} = S\hat{x}\end{aligned}$$

tun, wobei man sich praktischerweise die Invertierung von S sparen kann, da man aus der allgemeinen Theorie weiß, dass das Inverse einer orthogonalen Matrix (d. h. einer Matrix, deren Spalten eine Orthonormalbasis bilden – das ist hier der Fall) einfach durch ihre Transponierte gegeben ist.

Schritt 3

In diesem vorletzten Schritt nutzt man quadratische Ergänzung, um die noch übrigen linearen Terme zu entfernen und so die Gleichung noch weiter zu vereinfachen.

$$\begin{aligned}&-\hat{x}_1^2 + 3\hat{x}_2^2 + \frac{8}{\sqrt{2}}\hat{x}_1 - \frac{2}{\sqrt{2}}\hat{x}_2 - 1 \\ &= -\left(\hat{x}_1^2 - \frac{8}{\sqrt{2}}\hat{x}_1\right) + 3\left(\hat{x}_2^2 - \frac{2}{3\sqrt{2}}\hat{x}_2\right) - 1 \\ &= -\left(\left(\hat{x}_1 - \frac{4}{\sqrt{2}}\right)^2 - \left(\frac{4}{\sqrt{2}}\right)^2\right) + 3\left(\left(\hat{x}_2 - \frac{1}{3\sqrt{2}}\right)^2 - \left(\frac{1}{3\sqrt{2}}\right)^2\right) - 1 \\ &= -\hat{\hat{x}}_1^2 + 8 + 3\hat{\hat{x}}_2^2 - \frac{1}{6} - 1 \\ &= -\hat{\hat{x}}_1^2 + 3\hat{\hat{x}}_2^2 + \frac{41}{6},\end{aligned}$$

wobei

$$\hat{\hat{x}}_1 = \hat{x}_1 - \frac{4}{\sqrt{2}},$$
$$\hat{\hat{x}}_2 = \hat{x}_2 - \frac{1}{3\sqrt{2}}.$$

Die quadratische Ergänzung funktioniert so: Als erstes fasst man die Terme zu den verschiedenen Variablen zusammen und klammert die Koeffizienten der quadratischen Glieder jeweils aus. Dann ergänzt man mithilfe der ersten oder zweiten binomischen Formel, und schließlich vereinfacht man soweit wie möglich.

Als Endergebnis erhält man somit:

$$\hat{\hat{Q}} := \left\{ \begin{pmatrix} \hat{\hat{x}}_1 \\ \hat{\hat{x}}_2 \end{pmatrix} \,\middle|\, -\hat{\hat{x}}_1^2 + 3\hat{\hat{x}}_2^2 + \frac{41}{6} = 0 \right\}$$

Wikipedia (oder Auflösen nach $\hat{\hat{x}}_1 = \pm\sqrt{3\hat{\hat{x}}_2^2 + 41/6}$) sagt dann, dass es sich hierbei um eine Hyperbel handelt.

Warnung. Es ist wichtig, vor der quadratischen Ergänzung die Koeffizienten vor den quadratischen Faktoren auszuklammern. Die Huthutkoordinaten darf man also nur als Verschiebung $\hat{\hat{x}}_i := \hat{x}_i \pm c_i$ der Hutkoordinaten definieren, nicht als gleichzeitige Verschiebung und Streckung (wie etwa $\hat{\hat{x}}_i := 17(\hat{x}_i \pm c_i)$). Denn sonst ist die resultierende Transformation nicht orthogonal.

Schritt 4

Wenn nach Schritt 3 keine lineare Terme mehr vorhanden sind, ist man bereits fertig. Ansonsten dient dieser letzte Schritt dazu, noch von den linearen Termen alle bis auf einen zu eliminieren.

Da beim Musterbeispiel keine linearen Terme übrig geblieben sind, gehen wir jetzt von einem neuen Beispiel aus,

$$\hat{\hat{Q}} := \left\{ \begin{pmatrix} \hat{\hat{x}}_1 \\ \hat{\hat{x}}_2 \\ \hat{\hat{x}}_3 \end{pmatrix} \,\middle|\, \hat{\hat{x}}_1^2 - 12\hat{\hat{x}}_2 - 4\hat{\hat{x}}_3 - 12 = 0 \right\},$$

das bereits die Schritte 0 bis 3 durchlaufen hat.

Aus der Vorlesung ist bekannt, dass es in dieser Situation eine orthogonale Matrix T gibt, die

1. für diejenigen Indizes i, sodass der Koeffizient vor $\hat{\hat{x}}_i$ nicht null ist, in der i-ten Spalte den i-ten kanonischen Einheitsvektor enthält und
2. $T\frac{\hat{\hat{b}}}{\|\hat{\hat{b}}\|} = e_n$ erfüllt, wobei e_n der letzte kanonische Einheitsvektor und $\hat{\hat{b}}$ der Koeffizientenvektor der linearen Terme ist.

Ist man nur an der Normalform, nicht aber an der dazu benötigten Koordinatentransformation interessiert, kann man sich sparen, eine solche Matrix T aufzustellen.

Die transformierte Quadrikgleichung erhält man dann einfach dadurch, indem man die linearen Terme streicht und durch einen einzigen neuen linearen Term ersetzt, nämlich

$$\|\hat{\hat{b}}\| \cdot \hat{\hat{x}}_n;$$

im Beispiel also

$$\hat{\hat{x}}_1^2 + \sqrt{12^2 + 4^2} \cdot \hat{\hat{x}}_3 - 12 = 0.$$

Um dann das endgültige Endergebnis zu erhalten, muss man noch eine Verschiebung vornehmen, die den konstanten Term eliminiert (zuerst den Vorfaktor ausklammern, dann die neuen Koordinaten einführen):

$$\hat{\hat{\hat{x}}}_1^2 + \sqrt{160}\,\hat{\hat{\hat{x}}}_3 = 0,$$

wobei $\hat{\hat{\hat{x}}}_1 = \hat{\hat{x}}_1$, $\hat{\hat{\hat{x}}}_2 = \hat{\hat{x}}_2$, $\hat{\hat{\hat{x}}}_3 = \hat{\hat{x}}_3 - 12/\sqrt{160}$.

Bemerkung. Theoretischer Hintergrund für diesen letzten Schritt ist die Transformation mit T^T (genauso, wie man in Schritt 2 mit S transformiert hat).

Unterscheidung in Mittelpunktsquadriken/Paraboloide

Bei manchen Quadriktypen kann man sinnvoll von einem „Mittelpunkt“ sprechen. Dabei sind für einen beliebigen Punkt $\xi \in \mathbb{R}^n$ folgende Aussagen äquivalent (vgl. Satz 9.68 im Skript):

1. Der Punkt ξ ist ein Mittelpunkt der Quadrik.
2. Es gilt $A\xi + \frac{1}{2}b = 0$.
3. Für alle Vektoren $x \in \mathbb{R}^n$ mit $\xi + x \in Q$ gilt $\xi - x \in Q$, die Quadrik ist also punktsymmetrisch mit Spiegelungszentrum ξ.

Am einfachsten findet man Mittelpunkte, indem man das Gleichungssystem in 2. löst. Eine gegebene Quadrik kann keinen, genau einen oder unendlich viele gleichberechtigte Mittelpunkte besitzen – denn das Gleichungssystem kann keine, genau eine oder unendlich viele Lösungen besitzen. Falls die Quadrik mindestens einen Mittelpunkt besitzt, heißt sie *Mittelpunktsquadrik*; sonst *Paraboloid*.

Das anfangs betrachtete Musterbeispiel besitzt genau einen Mittelpunkt, nämlich

$$\xi = \begin{pmatrix} 13/6 \\ -11/6 \end{pmatrix}.$$

Siehe auch

Im Internet gibt es viele vollständig durchgerechnete Beispiele zu Quadriken, hier ein paar Links:

- `http://www.mia.uni-saarland.de/Teaching/MFI07/kap49.pdf`
  (zweidimensionales Beispiel)
- `http://m19s28.dyndns.org/iblech/stuff/carina-tutor-mehrere-variable/`
  (ganz unten; leicht andere Schreibweise als hier, dafür aber eine Staatsexamensaufgabe)
- `http://www.arndt-bruenner.de/mathe/scripts/eigenmatrix.htm`
  (Rechner für zwei- und dreidimensionale Quadriken)

Erinnerung an Basistransformationen

1. Ist $b_1, \dots, b_n$ eine Basis von $\mathbb{R}^n$, so ist die Matrix
$$S := (b_1| \cdots |b_n) \in \mathbb{R}^{n\times n},$$
die man erhält, wenn man die n Basisvektoren nebeneinander als Spalten schreibt, stets eine invertierbare Matrix.
2. Diese Matrix S ist genau dann eine orthogonale Matrix, wenn die Basis $b_1, \dots, b_n$ sogar eine orthonormale Basis ist. (Man beachte die unglückliche Bezeichnung – die Matrix heißt „orthogonal“, aber die Spalten müssen dazu ortho*normal* sein.)

3. Sind $b_1, \dots, b_n$ und $\tilde{b}_1, \dots, \tilde{b}_n$ zwei Basen von $\mathbb{R}^n$, so erfüllt die Matrix
$$T := \tilde{S}S^{-1} \in \mathbb{R}^{n\times n}$$
die Bedingungen
$$Tb_i = \tilde{b}_i$$
für alle $i = 1, \dots, n$, wenn man S und $\tilde{S}$ wie in 1. beschrieben aufstellt.
4. Sind die Basen $b_1, \dots, b_n$ und $\tilde{b}_1, \dots, \tilde{b}_n$ sogar Orthonormalbasen, so ist die Transformationsmatrix T eine orthogonale Matrix.

   Sind die beiden Basen nicht Orthonormalbasen, so ist es Zufall, wenn T trotzdem eine orthogonale Matrix ist.

5. Sind linear unabhängige Vektoren $b_1, \dots, b_k$ sowie $\tilde{b}_1, \dots, \tilde{b}_k$ gegeben, und man sucht eine Transformationsmatrix $T \in \mathbb{R}^{n\times n}$ mit
$$Tb_i = \tilde{b}_i$$
für alle $i = 1, \dots, k$, kann man dazu wie folgt vorgehen:

   Zunächst ergänzt man die Vektoren $b_1, \dots, b_k$ zu einer vollständigen Basis $b_1, \dots, b_n$ vom $\mathbb{R}^n$, dann ergänzt man die Vektoren $\tilde{b}_1, \dots, \tilde{b}_k$ zu einer vollständigen Basis $\tilde{b}_1, \dots, \tilde{b}_n$ vom $\mathbb{R}^n$ und stellt schließlich die Transformationsmatrix T wie in 3. beschrieben auf.
6. Sind orthonormale Vektoren $b_1, \dots, b_k$ sowie $\tilde{b}_1, \dots, \tilde{b}_k$ gegeben, und man sucht eine Transformationsmatrix $T \in \mathbb{R}^{n\times n}$ mit
$$Tb_i = \tilde{b}_i$$
für alle $i = 1, \dots, k$, die außerdem eine orthogonale Matrix ist, kann man dazu wie folgt vorgehen:

   Zunächst ergänzt man die Vektoren $b_1, \dots, b_k$ zu einer vollständigen Orthonormalbasis $b_1, \dots, b_n$ vom $\mathbb{R}^n$, dann ergänzt man die Vektoren $\tilde{b}_1, \dots, \tilde{b}_k$ zu einer vollständigen Orthonormalbasis $\tilde{b}_1, \dots, \tilde{b}_n$ vom $\mathbb{R}^n$ und stellt schließlich die Transformationsmatrix T wie in 3. beschrieben auf. Nach 4. ist die so erhaltene Matrix orthogonal.

7. Ein Beispiel: Wir suchen eine orthogonale Transformationsmatrix $T \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ mit

$$T\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} \quad \text{und} \quad T\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\-1\\0\end{pmatrix}.$$

Dann ergänzen wir jeweils zu zwei Orthonormalbasen des $\mathbb{R}^3$: Zum einen

$$\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix},$$

zum anderen

$$\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\-1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}.$$

(Wenn man nicht weiß, wie man geeignet orthonormal ergänzen soll, kann man auch zunächst lediglich linear unabhängig ergänzen und dann Gram–Schmidt verwenden.)

Eine mögliche Transformationsmatrix der gesuchten Art ist dann

$$T = \begin{pmatrix}0 & 0 & 1\\0 & -1 & 0\\1 & 0 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\0 & 0 & 1\\0 & 1 & 0\end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix}0 & 1 & 0\\0 & 0 & -1\\1 & 0 & 0\end{pmatrix}.$$

(In diesem speziellen Fall hätte man eine solche Matrix auf eine andere Art und Weise vielleicht schneller gefunden. Das hier beschriebene Verfahren funktioniert jedoch immer.)

Verfahren zur orthogonalen Normalform

Gegeben sei eine orthogonale Matrix $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$. Gesucht ist die sog. *orthogonale Normalform* $N \in \mathbb{R}^{n \times n}$ von A und eine orthogonale Transformationsmatrix $S \in \mathbb{R}^{n \times n}$ mit

$$S^T A S = N.$$

0. $A^S := A + A^T \in \mathbb{R}^{n \times n}$ aufstellen.
1. Das charakteristische Polynom von A^S berechnen und dann Basen aller Eigenräume von A^S bestimmen. Diese Basen müssen nicht unbedingt Orthonormalbasen sein.

   Probe auf Verrechner: Die Summe der Eigenwerte von A^S (mit ihrer Vielfachheit im charakteristischen Polynom gezählt) muss gleich der Summe der Diagonaleinträge von A^S sein.
2. Sukzessive die gesuchte orthogonale Normalform und Orthonormalbasis aufstellen, indem man folgenden Schritt so lange wiederholt, bis man n Basisvektoren gefunden hat:
   a) Einen beliebigen Eigenvektor v eines beliebigen Eigenraums von A^S nehmen, der senkrecht auf allen bisher gefundenen Basisvektoren steht.
   Wichtig: Im Allgemeinen wird A^S die Eigenwerte 2, -2 und weitere Eigenwerte besitzen. Man darf mit den Eigenvektoren zu den weiteren Eigenwerten erst beginnen, wenn man die zu den Eigenwerten 2 und -2 abgearbeitet hat. Sonst kann es nämlich passieren, dass die resultierenden (2×2)-Blöcke keine reinen Drehblöcke, sondern Drehspiegelungsblöcke sind, die später noch diagonalisiert werden müssten.
   b) Wenn v ein Eigenvektor von A^S zum Eigenwert ± 2 ist, kann man
   $$v / \|v\|$$
   in die unter Konstruktion befindliche Orthonormalbasis aufnehmen. Der entsprechende Diagonaleintrag der Normalform ist ± 1.
   c) Wenn v ein Eigenvektor zu einem anderen Eigenwert ist, muss man zunächst eine Orthonormalbasis b_1, b_2 des (stets zweidimensionalen) Unterraums
   $$U := \operatorname{span}\{v, Av\}$$
   berechnen, beispielsweise mit Gram–Schmidt. In die unter Konstruktion befindliche Orthonormalbasis kann man dann b_1 und b_2 aufnehmen. In die Normalform kommt ein (2×2)-Drehblock
   $$\begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix},$$
   wobei man den Winkel über die Beziehungen
   $$\cos\alpha = \langle Ab_1, b_1 \rangle$$
   $$\sin\alpha = \langle Ab_1, b_2 \rangle$$
   bestimmen kann. Wem das ungeheuer ist, kann auch einfach die Darstellungsmatrix von A eingeschränkt auf U (bezüglich der Basisvektoren b_1, b_2) aufstellen – das gibt dasselbe Ergebnis. Es gibt auch noch andere Möglichkeiten, den Drehwinkel zu finden.
3. Die insgesamt n Basisvektoren nebeneinander als Spalten in die Transformationsmatrix S schreiben.

Aufgaben zum Skalarprodukt

0. Die Teilaufgaben (d) und (e) von A54 sind gut.

1. Sei U ein beliebiger Unterraum eines euklidischen (oder unitären) Vektorraums V.
   a) *Zeige:* Es gilt $U \subset (U^\perp)^\perp$.
   Hinweis: Mit einer Skizze kann man sich zumindest schonmal von der Gültigkeit der Behauptung überzeugen. Der Beweis geht sehr schnell, wenn man die Definition von $U^\perp$ kennt und man sich vom mehrmaligen Umdenken nicht verwirren lässt.
   b) Sei nun V außerdem endlich-dimensional. *Zeige:* $U = (U^\perp)^\perp$.
   Hinweis: Es gibt eine Dimensionsformel für $U^\perp$, die hier in Kombination mit a) sehr nützlich ist.

2. a) Sei V ein euklidischer (oder unitärer) Vektorraum endlicher Dimension und $f\colon V \to V$ eine orthogonale lineare Abbildung. Sei $U \subset V$ ein Unterraum.
   Zeige: $f[U^\perp] = (f[U])^\perp$.
   Hinweis: Die Richtung „$\subset$“ geht ohne Tricks. Für die andere Richtung sind Dimensionsformeln hilfreich.
   b) Finde ein Beispiel einer symmetrischen (2×2)-Matrix und eines Unterraums $U \subset \mathbb{R}^2$, für die die Aussage in a) nicht gilt.

3. Sei $S \in \mathbb{R}^{n\times n}$ eine symmetrische positiv definite Matrix. Nach Übungsaufgabe 37(a) wissen wir, dass dann die Definition

$$\langle x, y\rangle := x^T S y$$

ein Skalarprodukt auf $\mathbb{R}^n$ definiert, welches nur im Ausnahmefall $S = I_n$ mit dem Standardskalarprodukt übereinstimmt.

Nehmen wir an, jemand verwendet das Sylvesterformverfahren, um eine Transformationsmatrix X mit

$$X^T S X = D$$

zu finden, wobei D eine Diagonalmatrix ist, deren Hauptdiagonaleinträge in $\{-1, 0, 1\}$ liegen.

Die i-te Spalte von X sei mit $x_i \in \mathbb{R}^n$ bezeichnet.

   a) *Berechne:* $\langle x_i, x_j\rangle$ für alle $i, j = 1, \ldots, n$.
   b) *Zeige:* D ist die Einheitsmatrix.

Verfahren zur Jordannormalform

Gegeben sei eine beliebige quadratische Matrix $A \in \mathbb{K}^{n \times n}$, gesucht ist eine Jordannormalform J von A. Als Voraussetzung benötigen wir dazu, dass das charakteristische Polynom von A in Linearfaktoren zerfällt; sonst gibt es keine Jordannormalform. Über $\mathbb{C}$ klappt es immer.

1. Das charakteristische Polynom aufstellen und in Linearfaktoren zerlegen.

   Probe auf Verrechner: Die Summe der Eigenwerte (mit jeweiliger Vielfachheit im charakteristischen Polynom) muss gleich der Summe der Diagonaleinträge von A sein.
2. Die Grobstruktur der Jordannormalform bestimmen:

   Jeder Eigenwert λ erhält einen $(\ell \times \ell)$-Großkasten, wobei ℓ die algebraische Vielfachheit von λ, also die Vielfachheit des Linearfaktors $X - \lambda$ im charakteristischen Polynom, ist.
3. Alle Möglichkeiten für die Feinstruktur, also die Aufteilung der Großkästen in kleine Jordanblöcke, auflisten. Dabei konventionsgemäß die kleinen Jordanblöcke der Größe nach absteigend geordnet aufführen.
4. Mit folgenden Kriterien falsche Kandidaten ausschließen: Die richtige Jordannormalform J erfüllt für jeden Eigenwert λ...
   a) $\operatorname{rank}(A - \lambda I) = \operatorname{rank}(J - \lambda I)$
   b) Anzahl Jordanblöcke zum Eigenwert $\lambda =$
      $\dim \ker (A - \lambda I)$
   c) Anzahl Jordanblöcke der Größe $\geq (m \times m)$ zum Eigenwert $\lambda =$
      $\dim \ker (A - \lambda I)^m - \dim \ker (A - \lambda I)^{m-1}$
   d) Größe des größten Jordanblocks zum Eigenwert $\lambda =$
      Vielfachheit von $(X - \lambda)$ im Minimalpolynom

Verfahren zur Jordanbasis

1. Das charakteristische Polynom von A aufstellen und in Linearfaktoren zerlegen.
2. Für jeden Eigenwert λ sukzessive Basen der Kerne von $(A-\lambda I)$, $(A-\lambda I)^2$, $(A-\lambda I)^3$, ..., $(A - \lambda I)^k$ bestimmen. Dabei kann man abbrechen, sobald eines der folgenden Kriterien des erste Mal erfüllt ist:
   a) Die Dimension von $\ker (A - \lambda I)^k$ ist die algebraische Vielfachheit von λ.
   b) Es gilt $\ker (A - \lambda I)^k = \ker (A - \lambda I)^{k+1}$.
   c) Der Exponent k ist gleich der Vielfachheit von $(X - \lambda)$ im Minimalpolynom.
3. Für jeden Eigenwert λ so lange die folgenden Schritte wiederholen, bis man insgesamt n Basisvektoren bestimmt hat:
   a) Einen Vektor v aus dem höchsten noch nicht vollständig verbrauchten Kern $\ker (A-\lambda I)^m$ wählen, der nicht im Spann folgender „verbotener" Vektoren liegt: der Basisvektoren des nächstniedrigeren Kerns ($\ker (A-\lambda I)^{m-1}$) und allen zuvor bestimmten Basisvektoren.
   b) Die Vektoren
   $$(A - \lambda I)^{m-1} v, (A - \lambda I)^{m-2} v, \ldots, (A - \lambda I)^1 v, v$$
   in dieser Reihenfolge in die Basis übernehmen.
4. Die Basisvektoren nebeneinander als Spalten in eine Matrix $S \in \mathbb{K}^{n \times n}$ schreiben; es gilt dann $S^{-1} A S = J$.

Verfahren zum Minimalpolynom

Gegeben sei eine beliebige quadratische Matrix $A \in \mathbb{K}^{n \times n}$, gesucht ist das Minimalpolynom μ_A von A. Dieses ist durch folgende Eigenschaft eindeutig bestimmt:

> Das Minimalpolynom ist dasjenige *normierte* Polynom *kleinsten Grades*, das die Gleichung
> $$\mu_A(A) = 0 \in \mathbb{K}^{n \times n}$$
> erfüllt.

Nach dem Satz von Cayley–Hamilton ist das Minimalpolynom stets ein Teiler des charakteristischen Polynoms. Außerdem besitzen beide Polynome dieselben Linearfaktoren, nur im Allgemeinen mit anderen Vielfachheiten.

Allgemeiner besitzen beide Polynome auch dieselben irreduziblen (beispielsweise quadratischen) Faktoren, nur mit anderen Vielfachheiten. Das wurde aber in der Vorlesung nicht bewiesen und kann daher nicht verwendet werden.

... über Teiler des charakteristischen Polynoms

1. Das charakteristische Polynom von A aufstellen und in irreduzible Faktoren zerlegen.
2. All diejenigen normierten Teiler des charakteristischen Polynoms auflisten, in denen auch jeder Linearfaktor des charakteristischen Polynoms vorkommt. Diese Teiler dem Grad nach aufsteigend ordnen.
3. Sukzessive die Kandidatenpolynome f daraufhin prüfen, ob sie die Gleichung $f(A) = 0$ erfüllen. Das erste erfolgreiche Polynom ist das gesuchte Minimalpolynom von A.

... über verallgemeinerte Eigenräume

1. Das charakteristische Polynom von A aufstellen und in irreduzible Faktoren zerlegen. Falls nicht ausschließlich Linearfaktoren in der Zerlegung vorkommen, muss das andere Verfahren oben verwendet werden; abbrechen.
2. Zu jedem Linearfaktor $(X - \lambda)$ im charakteristischen Polynom die Vielfachheit k im Minimalpolynom bestimmen:

   Dazu sukzessive die Dimensionen der Kerne von $(A - \lambda I)$, $(A - \lambda I)^2$, $(A - \lambda I)^3$ usw. berechnen; der erste Exponent, ab dem sich die Dimension nicht mehr ändert, ist die gesuchte Vielfachheit k. (Und der zugehörige Kern ist der verallgemeinerte Eigenraum von A zum Eigenwert λ.)
3. Das Minimalpolynom als Produkt der Linearfaktoren mit entsprechenden Vielfachheiten zusammensetzen.

... über die Jordannormalform

1. Die Jordannormalform von A aufstellen.
2. Das Minimalpolynom als Produkt der Linearfaktoren $(X - \lambda)^k$ zu jedem Eigenwert λ zusammensetzen, wobei jeweils der Exponent k gleich der Größe des größten Jordanblocks zum Eigenwert λ ist.

Beispiel

Sei die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 3 & & & 2 & \\ 1 & 3 & & & 2 \\ & & 3 & & \\ & & & 3 & \\ & & & & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{5\times 5}$$

gegeben. Wir wollen als erstes die Jordannormalform aufstellen.

1. Das charakteristische Polynom zerlegt sich als

   $$\chi_A(X) = -X(X-3)^4.$$

   Die Probe geht auf: $0+3+3+3+3 = 12 =$ Summe der Diagonaleinträge von A.

2. Die Grobstruktur der Jordannormalform ist also

   $$\begin{pmatrix} \boxed{} & \\ & \boxed{\quad 4 \times 4 \quad} \end{pmatrix}.$$

3. Es gibt insgesamt fünf Möglichkeiten für die Feinstruktur:

   $$\begin{pmatrix} \boxed{\boxed{0}} & \\ & \boxed{\boxed{\begin{matrix} 3 & 1 & & \\ & 3 & 1 & \\ & & 3 & 1 \\ & & & 3 \end{matrix}}} \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} \boxed{\boxed{0}} & \\ & \boxed{\begin{matrix} \boxed{\begin{matrix} 3 & 1 & \\ & 3 & 1 \\ & & 3 \end{matrix}} & \\ & \boxed{3} \end{matrix}} \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} \boxed{\boxed{0}} & \\ & \boxed{\begin{matrix} \boxed{\begin{matrix} 3 & 1 \\ & 3 \end{matrix}} & \\ & \boxed{\begin{matrix} 3 & 1 \\ & 3 \end{matrix}} \end{matrix}} \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} \boxed{\boxed{0}} & \\ & \boxed{\begin{matrix} \boxed{\begin{matrix} 3 & 1 \\ & 3 \end{matrix}} & & \\ & \boxed{3} & \\ & & \boxed{3} \end{matrix}} \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} \boxed{\boxed{0}} & \\ & \boxed{\begin{matrix} \boxed{3} & & & \\ & \boxed{3} & & \\ & & \boxed{3} & \\ & & & \boxed{3} \end{matrix}} \end{pmatrix}$$

4. Eine Nebenrechnung zeigt, dass $\dim \ker (A - 3I) = 2$. Daher gibt es in der richtigen Jordanform genau zwei Jordanblöcke zum Eigenwert 3, also bleiben nur die zweite und dritte Möglichkeit.

   Eine weitere Nebenrechnung zeigt, dass $\dim \ker (A-3I)^2 = 3$. In der richtigen Jordanform gibt es daher zum Eigenwert 3 genau einen (denn $3-2=1$) Jordanblock, der mindestens Größe 2×2 hat. Also scheidet die dritte Möglichkeit aus, womit die zweite als einzig verbliebene die richtige Jordanform sein muss:

   $$J = \begin{pmatrix} \boxed{\boxed{0}} & \\ & \boxed{\begin{matrix} \boxed{\begin{matrix} 3 & 1 & \\ & 3 & 1 \\ & & 3 \end{matrix}} & \\ & \boxed{3} \end{matrix}} \end{pmatrix}.$$

Als nächstes wollen wir auch noch eine Jordanbasis bestimmen.

1. Wie schon oben geschrieben gilt $\chi_A(X) = -X(X-3)^4$.
2. Nebenrechnungen ergeben folgende Basen:

$$\begin{aligned}
\ker(A-0I) &= \operatorname{span}\{2e_2 - 3e_5\}, \text{ fertig nach Kriterium a)} \\
\ker(A-3I) &= \operatorname{span}\{e_2, e_3\} \\
\ker(A-3I)^2 &= \operatorname{span}\{e_2, e_3, e_1\} \\
\ker(A-3I)^3 &= \operatorname{span}\{e_2, e_3, e_1, e_4\}, \text{ fertig nach Kriterium a)}
\end{aligned}$$

3. Für den Eigenwert 0 wählen wie $2e_2 - 3e_5$ als einzigen Basisvektor.

   Für den Eigenwert 3 wählen wir als erstes den Vektor e_4. Dann ergeben sich die Basisvektoren $(A-3I)^2 e_4, (A-3I)e_4, e_4$, also $2e_2, 2e_1, e_4$.

   Noch sind wir nicht fertig; der höchste unverbrauchte Kern für den Eigenwert 3 ist $\ker(A-3I)$, und wir wählen e_3 als Basisvektor.
4. Es gilt also $S^{-1}AS = J$, wobei

$$S = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -3 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Aufgaben zur Jordonnormalform & Co.

1. Sei $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ eine Matrix, die die Gleichung
$$A^3 - 3A^2 + 2A = 0 \in \mathbb{C}^{n\times n}$$
erfüllt.
   a) Welche komplexen Zahlen können Eigenwerte von A sein?
   b) Weiß man, ob die Abbildung $f_A\colon \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n, x \mapsto Ax$ injektiv ist?
   c) Zeige, dass A diagonalisierbar ist.

2. Sei $A \in \mathbb{R}^{7\times 7}$ eine Matrix mit
$$\begin{aligned} \mu_A &= (X-2)^2\,(X-3)^2 \quad \text{und} \\ \chi_A &= -(X-2)^4\,(X-3)^3. \end{aligned}$$
Welche Möglichkeiten gibt es für die Jordannormalform von A?[1]

3. Sei $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$ eine Matrix, die die Gleichung
$$A^2 + I = 0 \in \mathbb{K}^{n\times n}$$
erfüllt. Entscheide, ob A diagonalisierbar ist, wenn…
   a) … $\mathbb{K} = \mathbb{C}$,
   b) … $\mathbb{K} = \mathbb{R}$,
   c) … $\mathbb{K} = \mathbb{F}_2$ (Körper mit zwei Elementen) und $\dim\ker(A - I) = n$.

4. Sei $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ die Matrix
$$A = \begin{pmatrix} 2 & -5 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}.$$
Gib alle f_A-invarianten Unterräume von $\mathbb{R}^2$ an (mit Beweis), wobei wie üblich
$$f_A\colon \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ x & \longmapsto & Ax. \end{array}$$
Hinweis: Fallunterscheidung über die Dimension eines hypothetischen f_A-invarianten Unterraums.[1]

5. Sei A wie in Aufgabe 3 (und $\mathbb{K}$ unbekannt). Was ist die Dimension des Unterraums
$$U := \operatorname{span}\{A^0, A^1, A^2, A^3, \ldots\} \subset \mathbb{K}^{n\times n}?$$
Hinweis: Man kann alle bis auf zwei der unendlich vielen Erzeuger weglassen (welche, und wieso?). Daher ist die Dimension höchstens zwei (wieso?).[1]

6. Sei $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$ eine Matrix und $\beta \in \mathbb{K}$ eine feste Zahl.
   a) Wie hängen die charakteristischen Polynome von A und $A - \beta I$ miteinander zusammen?
   b) Wie steht es um die Minimalpolynome?

   (Jeweils mit Beweis.)

[1] aus der Kielhöfer-Klausur vom SS 2008

Besonderheiten nilpotenter Matrizen

Für jede Matrix $A \in \mathbb{K}^{n \times n}$ sind folgende Aussagen äquivalent:

1. Die Matrix A ist nilpotent, d. h. für eine gewisse natürliche Zahl m ist $A^m = 0$.
2. Das charakteristische Polynom ist $\chi_A = (-X)^n$.
3. Das Minimalpolynom ist von der Form $\mu_A = X^k$ für eine natürliche Zahl k.

   Diese Zahl k ist dann der *Nilpotenzgrad* von A, also die kleinste natürliche Zahl k mit $A^k = 0$.
4. Die Matrix A besitzt eine Jordannormalform; und in dieser gibt es nur einen Großkasten, nämlich den zum einzigen Eigenwert 0.

   Der größte der kleinen Jordanblöcke ist ein $(k \times k)$-Block.

Mittels dieser Eigenschaften kann man beim Aufstellen der Jordanform ein wenig Zeit sparen.

Warnung: Es stimmt, dass nilpotente Matrizen nur den Eigenwert 0 besitzen, das kann man am bekannten charakteristischen Polynom erkennen. Die Umkehrung gilt aber nicht: Beispielsweise ist die Matrix

$$\begin{pmatrix} 0 & & \\ & 0 & -1 \\ & 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$$

nicht nilpotent, aber das charakteristische Polynom $\chi = -X(X^2 + 1)$ zeigt, dass sie als einzigen Eigenwert die Zahl 0 besitzt.

Behauptung. *Die einzige Abbildung*

$$f\colon V \times V \longrightarrow W,$$

die sowohl linear als auch bilinear ist, ist die Nullabbildung.

Beweis. Sei f also eine solche Abbildung. Dann gilt für alle $x, y \in V$ die Rechnung

$$f(x,y) = f(x+0, 0+y) = f((x,0)+(0,y)) = f(x,0) + f(0,y) = 0 + 0 = 0,$$

wobei der zweite Schritt nach Definition der Addition in $V \times V$, der dritte Schritt wegen der Linearität von f und der vierte Schritt wegen der Bilinearität von f möglich ist. $\square$

Beispiel einer „Sylvesterform" über dem Körper $\mathbb{F}_3$

Zur Erinnerung: Addition und Multiplikation sehen in $\mathbb{F}_3$ so aus:

+	0	1	2
0	0	1	2
1	1	2	0
2	2	0	1

·	0	1	2
0	0	0	0
1	0	1	2
2	0	2	1

Wir wollen jetzt Kor. 9.128 illustrieren.

$$A := \begin{array}{c}\begin{pmatrix}1&2&1\\2&0&0\\1&0&2\end{pmatrix}\\ \hline \begin{pmatrix}1&&\\&1&\\&&1\end{pmatrix}\end{array} \xrightarrow[\substack{\mathrm{II}' := \mathrm{II}-2\mathrm{I}\\ \mathrm{III}' := \mathrm{III}-\mathrm{I}}]{\text{Zeilen:}} \begin{array}{c}\begin{pmatrix}1&2&1\\0&2&1\\0&1&1\end{pmatrix}\\ \hline \begin{pmatrix}1&&\\&1&\\&&1\end{pmatrix}\end{array} \xrightarrow[\text{genauso}]{\text{Spalten:}} \begin{array}{c}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&2&1\\0&1&1\end{pmatrix}\\ \hline \begin{pmatrix}1&1&2\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\end{array}$$

$$\xrightarrow[\mathrm{III}' := \mathrm{III}-2\mathrm{II}]{\text{Zeilen:}} \begin{array}{c}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&2&1\\0&0&2\end{pmatrix}\\ \hline \begin{pmatrix}1&1&2\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\end{array} \xrightarrow[\text{genauso}]{\text{Spalten:}} \begin{array}{c}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&2&0\\0&0&2\end{pmatrix} =: D\\ \hline \begin{pmatrix}1&1&0\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix} =: X\end{array}$$

denn $1/2 = 2$ in $\mathbb{F}_3$

Jetzt können wir nicht mehr weitermachen, da 2 keine Quadratwurzel im Körper $\mathbb{F}_3$ besitzt:
$0^2 = 0 \neq 2$, $1^2 = 1 \neq 2$, $2^2 = 1 \neq 2$.

Also: $X^T A X = D$.

Begründung für die Anführungszeichen in der Überschrift:
„Sylvesterform" sagt man eigentlich nur über $\mathbb{R}$.