# Zur Häufungspunktaufgabe der Probeklausur

**Behauptung.** *Es gibt eine Folge, die ganz im Intervall* $[0, 1]$ *verläuft und abzählbar unendlich viele Häufungspunkte besitzt.*

*Bemerkung.* Allgemein bei Abzählbarkeitsfragen ist es hilfreich, sich an das Gedankenexperiment *Hilberts Hotel* zu erinnern:

1. Wir stellen uns ein Hotel vor, das abzählbar unendlich viele Zimmer besitzt; die Zimmer seien mit natürlichen Zahlen durchnummeriert und alle Zimmer seien durch Gäste belegt.
2. Jetzt trifft ein neuer Gast ein; wie kann er oder sie untergebracht werden? Dazu können wir jeden Gast anweisen, in das nächsthöhere Zimmer zu wechseln (also von Zimmer 1 nach 2, von 2 nach 3 usw.). Dann ist das Zimmer mit der Nummer 1 nämlich wieder frei.
3. Nun reist ein Bus mit abzählbar unendlich vielen zusätzlichen Gästen an; wie können sie alle untergebracht werden? Dazu weisen wir jeden Gast an, aus Zimmer $n$ in Zimmer $2n$ zu wechseln. Dann sind nämlich alle Zimmer mit ungeraden Zimmernummern wieder frei.
4. Nicht mehr für die Aufgabe relevant, aber auch möglich, ist es, Gäste aus abzählbar unendlich vielen Bussen, die jeweils abzählbar unendlich viele Gäste beinhalten, im Hotel unterzubringen. (Wie?)

*Beweis.* Wir wählen uns zunächst irgendeine abzählbar unendliche Teilmenge $\{x_1, x_2, \ldots\}$ von $[0, 1]$; die Elemente dieser Menge sollen die Häufungspunkte der Folge werden. (Wir können beispielsweise $x_n := 1/n$ setzen.)

Dann konstruieren wir wie folgt eine Folge $(a_n)_n$: Auf jeden zweiten Platz setzen wir die Zahl $x_1$, die restlichen Plätze vergeben wir noch nicht. Dann ist zumindest $x_1$ schonmal sicherlich ein Häufungspunkt der Folge.

Auf jeden zweiten Platz der restlichen Plätze (also insgesamt jeden vierten Platz) setzen wir $x_2$. Dann ist auch $x_2$ Häufungspunkt der Folge.

Nach diesem Schema können wir fortfahren: Wir setzen jeweils auf die zweiten Plätze der unvergebenen Plätze den nächsten Häufungspunkt in spe. Dabei bleiben stets unendlich viele Folgenglieder unbesetzt, sodass wir jeweils fortfahren können.

Als Ergebnis erhalten wir eine Folge mit den gewünschten Eigenschaften. □

*Bemerkung.* Es gibt noch eine Alternativkonstruktion, die man sich ähnlich wie bei der Cauchyproduktformel veranschaulichen kann: Unsere Aufgabe ist es ja, alle Elemente des das $(\infty \times \infty)$-Zahlenschemas

$$\begin{matrix} x_1 & x_1 & x_1 & \cdots \\ x_2 & x_2 & x_2 & \cdots \\ x_3 & x_3 & x_3 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{matrix}$$

in einer Folge unterzubringen. Das ist schwierig, wenn wir das Schema horizontal oder vertikal ablaufen, weil wir dann „unendlich oft“ unendlich lange Teilfolgen zusammensetzen müssten.

Wir können das Schema aber auch diagonal schlangenförmig ablaufen: Zuerst die erste Diagonale (bestehend nur aus $x_1$), dann die zweite (bestehend aus $x_2$, $x_1$), dann die dritte ($x_3$, $x_2$, $x_1$) und so weiter. Auf diese Weise bringen wir jedes Element des Zahlenschemas genau einmal in der entstehenden Folge unter.

Als Ergebnis erhalten wir also ebenfalls eine Folge mit den gewünschten Eigenschaften.