Erinnerung an Basistransformationen

1. Ist $b_1, \dots, b_n$ eine Basis von $\mathbb{R}^n$, so ist die Matrix
$$S := (b_1 | \cdots | b_n) \in \mathbb{R}^{n \times n},$$
die man erhält, wenn man die n Basisvektoren nebeneinander als Spalten schreibt, stets eine invertierbare Matrix.
2. Diese Matrix S ist genau dann eine orthogonale Matrix, wenn die Basis $b_1, \dots, b_n$ sogar eine orthonormale Basis ist. (Man beachte die unglückliche Bezeichnung – die Matrix heißt „orthogonal", aber die Spalten müssen dazu ortho*normal* sein.)

3. Sind $b_1, \dots, b_n$ und $\tilde{b}_1, \dots, \tilde{b}_n$ zwei Basen von $\mathbb{R}^n$, so erfüllt die Matrix
$$T := \tilde{S} S^{-1} \in \mathbb{R}^{n \times n}$$
die Bedingungen
$$T b_i = \tilde{b}_i$$
für alle $i = 1, \dots, n$, wenn man S und $\tilde{S}$ wie in 1. beschrieben aufstellt.
4. Sind die Basen $b_1, \dots, b_n$ und $\tilde{b}_1, \dots, \tilde{b}_n$ sogar Orthonormalbasen, so ist die Transformationsmatrix T eine orthogonale Matrix.

   Sind die beiden Basen nicht Orthonormalbasen, so ist es Zufall, wenn T trotzdem eine orthogonale Matrix ist.

5. Sind linear unabhängige Vektoren $b_1, \dots, b_k$ sowie $\tilde{b}_1, \dots, \tilde{b}_k$ gegeben, und man sucht eine Transformationsmatrix $T \in \mathbb{R}^{n \times n}$ mit
$$T b_i = \tilde{b}_i$$
für alle $i = 1, \dots, k$, kann man dazu wie folgt vorgehen:

   Zunächst ergänzt man die Vektoren $b_1, \dots, b_k$ zu einer vollständigen Basis $b_1, \dots, b_n$ vom $\mathbb{R}^n$, dann ergänzt man die Vektoren $\tilde{b}_1, \dots, \tilde{b}_k$ zu einer vollständigen Basis $\tilde{b}_1, \dots, \tilde{b}_n$ vom $\mathbb{R}^n$ und stellt schließlich die Transformationsmatrix T wie in 3. beschrieben auf.
6. Sind orthonormale Vektoren $b_1, \dots, b_k$ sowie $\tilde{b}_1, \dots, \tilde{b}_k$ gegeben, und man sucht eine Transformationsmatrix $T \in \mathbb{R}^{n \times n}$ mit
$$T b_i = \tilde{b}_i$$
für alle $i = 1, \dots, k$, die außerdem eine orthogonale Matrix ist, kann man dazu wie folgt vorgehen:

   Zunächst ergänzt man die Vektoren $b_1, \dots, b_k$ zu einer vollständigen Orthonormalbasis $b_1, \dots, b_n$ vom $\mathbb{R}^n$, dann ergänzt man die Vektoren $\tilde{b}_1, \dots, \tilde{b}_k$ zu einer vollständigen Orthonormalbasis $\tilde{b}_1, \dots, \tilde{b}_n$ vom $\mathbb{R}^n$ und stellt schließlich die Transformationsmatrix T wie in 3. beschrieben auf. Nach 4. ist die so erhaltene Matrix orthogonal.

7. Ein Beispiel: Wir suchen eine orthogonale Transformationsmatrix $T \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ mit
$$T\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} \quad \text{und} \quad T\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\-1\\0\end{pmatrix}.$$
Dann ergänzen wir jeweils zu zwei Orthonormalbasen des $\mathbb{R}^3$: Zum einen
$$\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix},$$
zum anderen
$$\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\-1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}.$$
(Wenn man nicht weiß, wie man geeignet orthonormal ergänzen soll, kann man auch zunächst lediglich linear unabhängig ergänzen und dann Gram–Schmidt verwenden.)

Eine mögliche Transformationsmatrix der gesuchten Art ist dann
$$T = \begin{pmatrix}0 & 0 & 1\\0 & -1 & 0\\1 & 0 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\0 & 0 & 1\\0 & 1 & 0\end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix}0 & 1 & 0\\0 & 0 & -1\\1 & 0 & 0\end{pmatrix}.$$
(In diesem speziellen Fall hätte man eine solche Matrix auf eine andere Art und Weise vielleicht schneller gefunden. Das hier beschriebene Verfahren funktioniert jedoch immer.)