Blatt 10, Aufgabe 46

In der Übung hatten wir nicht mehr geschafft, eine Orthonormalbasis von $U^\perp$ zu bestimmen, wobei $U = \operatorname{span} M$ mit $M = \{v_1, v_2\} \subset \mathbb{R}^4$ und

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1+\sqrt{2} \\ 1 \\ 1+\sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} 1-\sqrt{2} \\ 1 \\ 1-\sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Das geht so:

Zunächst ist es hilfreich, sich an Aufgabe 38 von Blatt 9 zu erinnern. Diese sagt nämlich, dass sich $U^\perp = (\operatorname{span} M)^\perp$ einfacher als $U^\perp = M^\perp$ bestimmen lässt. Dies führt dann auf ein lineares Gleichungssystem:

$$\begin{aligned}
M^\perp &= \left\{ x \in \mathbb{R}^4, \;\middle|\; \langle x, v_1 \rangle = 0, \langle x, v_2 \rangle = 0 \right\} \\
&= \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \;\middle|\; \begin{pmatrix} 1+\sqrt{2} & 1 & 1+\sqrt{2} & 1 \\ 1-\sqrt{2} & 1 & 1-\sqrt{2} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = 0 \right\} \\
&\overset{(\star)}{=} \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \;\middle|\; \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = 0 \right\} \\
&= \left\{ x = (x_1, x_2, x_3, x_4)^T \;\middle|\; x_3 = -x_1, x_4 = -x_2 \right\} \\
&= \left\{ (x_1, x_2, -x_1, -x_2)^T \;\middle|\; x_1, x_2 \in \mathbb{R} \right\} \\
&= \left\{ x_1 (1, 0, -1, 0)^T + x_2 (0, 1, 0, -1)^T \;\middle|\; x_1, x_2 \in \mathbb{R} \right\} \\
&= \operatorname{span} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}
\end{aligned}$$

In Schritt $(\star)$ wurde die eigentliche Hauptarbeit geleistet, nämlich das lineare Gleichungssystem auf eine einfache Form zu bringen (verwendete Zeilentransformationen: $\mathrm{II}' := \mathrm{II} + \mathrm{I}$, $\mathrm{II}' := \mathrm{II}/2$, $\mathrm{I}' := \mathrm{I} - \mathrm{II}$, $\mathrm{I}' := \mathrm{I}/\sqrt{2}$, $\mathrm{II}' := \mathrm{II} - \mathrm{I}$); das kann man natürlich auch auf andere Arten und Weisen machen.

In der letzten Zeile der Rechnung steht dann bereits eine Basis von $U^\perp$. Um aus dieser eine Orthonormalbasis zu erhalten, kann man entweder das Gram–Schmidt-Verfahren anwenden (funktioniert immer und man muss nur rechnen, nicht denken) oder durch geschicktes Hinschauen selbst die Basis orthonormieren (geht manchmal schneller).

Hier sieht man, dass die beiden Basisvektoren zufälligerweise schon aufeinander senkrecht stehen, also müssen sie nur noch normiert werden. Damit ist

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\0\\-1\\0\end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}0\\1\\0\\-1\end{pmatrix}$$

eine mögliche Orthonormalbasis von $U^{\perp}$.