

Blatt 13, Aufgabe 61(c)

Sei V endlich-dimensionaler K -Vektorraum und seien die Mengen

$$M_1 := \{f: V \rightarrow V^* \mid f \text{ Isomorphismus}\}$$

und

$$M_2 := \{B: V \times V \rightarrow K \mid B \text{ nicht ausgeartete Bilinearform}\}$$

gegeben.

Behauptung. *Es gibt eine Bijektion zwischen M_1 und M_2 .*

Beweis. Durch kanonische Überlegung kommt man auf die Abbildung

$$\begin{aligned} \varphi: M_1 &\longrightarrow M_2 \\ f &\longmapsto \varphi(f) = ((x, y) \mapsto f(x)(y)) \end{aligned}$$

Dabei ist mit $\varphi(f)$ also folgende Abbildung gemeint,

$$\begin{aligned} \varphi(f): V \times V &\longrightarrow K \\ (x, y) &\longmapsto f(x)(y), \end{aligned}$$

und die Schreibweise $f(x)(y)$ ergibt Sinn, denn da $f \in M_1$, ist $f(x)$ ein Element von V^* , insbesondere also eine Abbildung, die ein Argument $y \in V$ auf ein Element von K schickt.

Warnung: Nicht φ mit $\varphi(f)$, und nicht f mit $f(x)$ verwechseln!

Es ist nun zu zeigen, dass φ wohldefiniert, injektiv und surjektiv ist.

- *Wohldefiniertheit:* Zu zeigen ist, dass die Abbildung $\varphi(f)$ für jedes $f \in M_1$ wirklich ein Element von M_2 ist, d. h. dass $\varphi(f)$ bilinear und nicht ausgeartet ist.

Additivität im ersten Argument: $\varphi(f)(x + \tilde{x}, y) = f(x + \tilde{x})(y) = (f(x) + f(\tilde{x}))(y) = f(x)(y) + f(\tilde{x})(y) = \varphi(f)(x, y) + \varphi(f)(\tilde{x}, y)$ für alle $x, \tilde{x}, y \in V$ (dabei folgt das zweite Gleichheitszeichen wegen der Linearität von f und das dritte nach Definition der Addition von Abbildungen)

Homogenität im ersten Argument: $\varphi(f)(ax, y) = f(ax)(y) = (af(x))(y) = af(x)(y) = a\varphi(f)(x, y)$ für alle $x, y \in V, a \in K$ (das zweite Gleichheitszeichen folgt wegen der Linearität von f , das dritte nach Definition der Skalarmultiplikation von Abbildungen mit Körperelementen)

Additivität im zweiten Argument: $\varphi(f)(x, y + \tilde{y}) = f(x)(y + \tilde{y}) = f(x)(y) + f(x)(\tilde{y}) = \varphi(f)(x, y) + \varphi(f)(x, \tilde{y})$ für alle $x, y, \tilde{y} \in V$ (dabei folgt das zweite Gleichheitszeichen wegen der Linearität von $f(x)$)

Homogenität im zweiten Argument: $\varphi(f)(x, ay) = f(x)(ay) = af(x)(y) = a\varphi(f)(x, y)$ für alle $x, y \in V, a \in K$ (das zweite Gleichheitszeichen folgt wegen der Linearität von $f(x)$)

Nicht-Ausgeartetheit, Teil 1: Sei $x \in V$ fest. Sei $\varphi(f)(x, y) = 0$ für alle $y \in V$, wir müssen zeigen, dass $x = 0$. Nach Voraussetzung gilt also $f(x)(y) = 0$ für alle $y \in V$, also ist schon die Abbildung $f(x)$ die Nullabbildung, d. h. es gilt $f(x) = 0$. Da f insbesondere injektiv ist, folgt $x = 0$.

Nicht-Ausgeartetheit, Teil 2: Sei $y \in V$ fest und gelte $\varphi(f)(x, y) = 0$ für alle $x \in V$, wir müssen zeigen, dass $y = 0$. Dazu zeigen wir, dass $\alpha(y) = 0$ für alle $\alpha \in V^*$, nach Vorlesung folgt dann schon, dass $y = 0$. Sei also $\alpha \in V^*$ beliebig. Da f insbesondere surjektiv ist, gibt es ein $x \in V$ mit $f(x) = \alpha$. Somit folgt $\alpha(y) = f(x)(y) = 0$.

- *Injektivität:* Seien $f, g \in M_1$ mit $\varphi(f) = \varphi(g)$, wir müssen zeigen, dass $f = g$. Nach Voraussetzung folgt zunächst, dass $f(x)(y) = g(x)(y)$ für alle $x, y \in V$. Da diese Gleichheit für alle $y \in V$ gilt, folgt $f(x) = g(x)$. Da wiederum diese Gleichheit für alle $x \in V$ gilt, folgt $f = g$.

Warnung: Da M_1 und M_2 keine Vektorräume sind, hat φ auch keine Chance, linear zu sein. Daher genügt es ohne gesonderte Begründung hier nicht, den typischen Ansatz $\varphi(f) = 0$ zu machen und dann zu versuchen, $f = 0$ zu folgern.

- *Surjektivität:* Sei $B \in M_2$ eine beliebige nicht ausgeartete Bilinearform. Wir müssen ein $f \in M_1$ mit $\varphi(f) = B$ finden; ausgeschrieben bedeutet das, dass $\varphi(f)(x, y) = f(x)(y) = B(x, y)$ für alle $x, y \in V$ gelten soll.

Davon inspiriert definieren wir:

$$\begin{aligned} f: V &\longrightarrow V^* \\ x &\longmapsto f(x) = (y \mapsto B(x, y)) \end{aligned}$$

Dabei ist mit $f(x)$ also die Abbildung

$$\begin{aligned} f(x): V &\longrightarrow K \\ y &\longmapsto f(x)(y) = B(x, y) \end{aligned}$$

gemeint. Direkt nach Definition ist dann klar, dass $\varphi(f) = B$; wir müssen aber noch zeigen, dass f wohldefiniert und wirklich ein Element von M_1 ist.

Wohldefiniertheit: Zu zeigen ist, dass $f(x)$ für alle $x \in V$ wirklich ein Element von V^* ist, also wirklich eine lineare Abbildung von V nach K ist. Wir müssen also nachprüfen, ob

$$f(x)(y + \tilde{y}) = f(x)(y) + f(x)(\tilde{y}) \quad \text{und} \quad f(x)(ay) = af(x)(y)$$

für alle $y, \tilde{y} \in V$ und $a \in K$ gilt. Wenn wir die Definition von $f(x)$ einsetzen, folgt das sofort über die Linearität von B im zweiten Argument.

Um zu zeigen, dass f ein Element von M_1 ist, müssen wir zeigen, dass f linear, injektiv und surjektiv ist.

Linearität von f : Zu zeigen ist, dass

$$f(x + \tilde{x}) = f(x) + f(\tilde{x}) \quad \text{und} \quad f(ax) = af(x)$$

für alle $x, \tilde{x} \in V$ und $a \in K$ gilt. Da auf den linken und rechten Seiten jeweils Abbildungen (von V nach K) stehen, sind diese Aussagen gleichbedeutend damit, dass

$$f(x + \tilde{x})(y) = f(x)(y) + f(\tilde{x})(y) \quad \text{und} \quad f(ax)(y) = af(x)(y)$$

für alle $x, \tilde{x}, y \in V$ und $a \in K$ gilt. Wenn wir die Definition von f einsetzen, folgt das sofort über die Linearität von B im ersten Argument.

Injektivität von f : Sei $f(x) = 0$ (Nullabbildung von V nach K), wir müssen zeigen, dass $x = 0$. Nach Voraussetzung gilt also $f(x)(y) = 0(y) = 0$ für alle $y \in V$; nach Definition folgt somit $B(x, y) = 0$ für alle $y \in V$. Da B nicht ausgeartet ist, gilt somit $x = 0$.

Surjektivität von f : Dazu hilft die Dimensionsformel:

$$\dim \operatorname{im} f = \dim V - \dim \ker f = \dim V - 0 = \dim V = \dim V^*,$$

also folgt $\operatorname{im} f = V^*$ und damit die Surjektivität von f . □

Abschließend noch ein paar Bemerkungen:

1. Die Hauptaufgabe bestand darin, auf die Abbildungsvorschrift von φ zu kommen. Danach waren zwar noch viele Nachweise zu erbringen, die meisten konnte man aber recht knapp erledigen. Um Unklarheiten vorzubeugen, wollte ich hier auch nichts abkürzen; in der Klausur hätte man aber an einigen Stellen (beispielsweise bei den Linearitätsprüfungen) auch einfach „klar“ hinschreiben können.
2. In der Linearen Algebra I hatten wir uns überlegt, dass es stets einen kanonischen Isomorphismus von V in den Bidualraum $(V^*)^*$ gibt. Die Aufgabe zeigt, dass es im Allgemeinen aber keinen kanonischen Isomorphismus von V nach V^* gibt, da es im Allgemeinen auch keine kanonische Bilinearform auf V gibt.

Ist V allerdings nicht irgendein Vektorraum, sondern ein euklidischer, so kommt V ja mit einem Skalarprodukt $\langle \cdot, \cdot \rangle$ daher; nach Definition ist das Skalarprodukt gerade eine nicht ausgeartete Bilinearform, also ein Element von M_2 , womit man in diesem Fall doch einen kanonischen Isomorphismus von V nach V^* angeben kann, nämlich $\varphi^{-1}(\langle \cdot, \cdot \rangle)$.

3. Im Kontext der Programmiersprache Haskell kommt der Übergang von M_1 zu M_2 sehr häufig vor. Man spricht da von „Currying“, nach dem Mathematiker und Logiker Haskell Curry.