Blatt 5, Aufgabe 22(d)

Gegeben ist die nilpotente Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{4\times 4},$$

gesucht ist ihre Jordanform und eine Jordanbasis. Zunächst stellen wir die Jordanform auf:

1. Das charakteristische Polynom ist $\chi_A = (-X)^4$, da A nilpotent.
2. Die Grobstruktur für die Jordannormalform ist also
$$\left(\boxed{\quad 4\times 4 \quad}\right),$$
da das charakteristische Polynom aus genau einem Linearfaktor besteht.
3. Es gibt insgesamt fünf Möglichkeiten für die Feinstruktur:
$$\left(\boxed{\boxed{\begin{matrix}0&1&&\\&0&1&\\&&0&1\\&&&0\end{matrix}}}\right)\quad \left(\boxed{\begin{matrix}\boxed{\begin{matrix}0&1&\\&0&1\\&&0\end{matrix}}&\\&\boxed{0}\end{matrix}}\right)\quad \left(\boxed{\begin{matrix}\boxed{\begin{matrix}0&1\\&0\end{matrix}}&\\&\boxed{\begin{matrix}0&1\\&0\end{matrix}}\end{matrix}}\right)\quad \left(\boxed{\begin{matrix}\boxed{\begin{matrix}0&1\\&0\end{matrix}}&&\\&\boxed{0}&\\&&\boxed{0}\end{matrix}}\right)\quad \left(\boxed{\begin{matrix}\boxed{0}&&&\\&\boxed{0}&&\\&&\boxed{0}&\\&&&\boxed{0}\end{matrix}}\right)$$
4. Wegen $A \neq 0$, $A^2 \neq 0$, $A^3 = 0$ ist der Nilpotenzgrad 3 und damit $\mu_A = X^3$. Nach dem Minimalpolynomkriterium ist also der größte Jordanblock ein 3×3-Block, also bleibt nur die Möglichkeit
$$J = \left(\boxed{\begin{matrix}\boxed{\begin{matrix}0&1&\\&0&1\\&&0\end{matrix}}&\\&\boxed{0}\end{matrix}}\right).$$

Nun suchen wir eine Jordanbasis. Dazu hätten wir die Jordanform gar nicht benötigt (im Gegenteil – aus der Struktur der Basis kann man die Jordanform ablesen), aber sie hilft zur Orientierung.

1. Wie oben ist $\chi_A = (-X)^4$.
2. Nebenrechnungen ergeben folgende Basen:
$$\begin{aligned} \ker(A - 0I) &= \operatorname{span}\{e_4, e_2 - e_3\} && (1)\\ \ker(A - 0I)^2 &= \operatorname{span}\{e_4, e_2 - e_3, e_2\} && (2)\\ \ker(A - 0I)^3 &= \operatorname{span}\{e_4, e_2 - e_3, e_2, e_1\}, \text{ fertig.} && (3)\end{aligned}$$
Es hier gleich mehrere Gründe, wieso wir nach dem dritten Kern aufhören durften: Mehr als vier Dimensionen finden wir im $\mathbb{R}^4$ sowieso nicht; die Dimension der algebraischen Vielfachheit ist erreicht; der Exponent ist die Vielfachheit von $(X - 0)$ im Minimalpolynom.

3. Der höchste noch nicht verbrauchte Kern ist $\ker(A-0I)^3$. Die „verbotenen Vektoren" sind die Basisvektoren des nächstniedrigeren Kerns; wir wählen e_1 als Vektor, der im höchstern Kern, aber nicht im Spann der verbotenen Vektoren liegt. Dann ergeben sich die Basisvektoren $(A-0I)^2e_1, (A-0I)e_1, e_1$, also

$$\begin{pmatrix}0\\0\\0\\2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix} \tag{4}$$

(in dieser Reihenfolge). Damit haben wir eine Teilbasis für den 3×3-Block bestimmt.

Bem.: Wir hätten auch $17e_1$ oder e_1+e_2 anstelle von e_1 verwenden können. Jedoch hätte das Verfahren mit e_2 oder $17e_2$ nicht funktioniert.

Da wir die Jordanform schon aufgestellt haben, können wir jetzt schon sehen, dass nur noch ein Eigenvektor fehlt. Wir können aber auch streng nach Schema vorgehen:

Dazu müssen wir zunächst wieder den höchsten Kern $\ker(A-0I)^3$ untersuchen. Die verbotenen Vektoren sind dann die drei Basisvektoren in (4) sowie die drei Kernvektoren in (2). Alle Basisvektoren der höchsten Kerns liegen aber schon im Spann dieser sechs Vektoren, also ist $\ker(A-0I)^3$ „verbraucht".

Daher müssen wir den nächsten Kern, $\ker(A-0I)^2$, untersuchen. Die verbotenen Vektoren sind dann andere, nämlich die drei Basisvektoren in (4) sowie die beiden Kernvektoren in (1). Wieder liegen aber alle Basisvektoren von $\ker(A-0I)^2$ schon im Spann dieser fünf Vektoren, also ist auch $\ker(A-0I)^2$ verbraucht.

Es bleibt also nur der Kern $\ker(A-0I)$ mit den Basisvektoren e_4 und e_2-e_3. Die verbotenen Vektoren sind dann lediglich die drei Basisvektoren in (4); der Basisvektor e_2-e_3 liegt nicht im Spann der verbotenen Vektoren und kann daher verwendet werden.

Damit haben wir eine Teilbasis für den 1×1-Block bestimmt:

$$\begin{pmatrix}0\\1\\-1\\0\end{pmatrix}.$$

Bem.: Wir hätten auch $17(e_2-e_3)$ oder $(e_2-e_3)+30e_4$ verwenden können. Nicht funktioniert hätten e_4 und $17e_4$.

4. Insgesamt erhalten wir

$$S^{-1}AS = J,$$

wobei

$$S = \begin{pmatrix}0&0&1&0\\0&1&0&1\\0&1&0&-1\\2&1&0&0\end{pmatrix}.$$