# Aufgaben zur Jordonnormalform & Co.

1. Sei $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ eine Matrix, die die Gleichung
$$A^3 - 3A^2 + 2A = 0 \in \mathbb{C}^{n\times n}$$
erfüllt.
   a) Welche komplexen Zahlen können Eigenwerte von $A$ sein?
   b) Weiß man, ob die Abbildung $f_A\colon \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n, x \mapsto Ax$ injektiv ist?
   c) Zeige, dass $A$ diagonalisierbar ist.

2. Sei $A \in \mathbb{R}^{7\times 7}$ eine Matrix mit
$$\begin{aligned} \mu_A &= \phantom{-}(X-2)^2\,(X-3)^2 \quad \text{und} \\ \chi_A &= -(X-2)^4\,(X-3)^3. \end{aligned}$$
Welche Möglichkeiten gibt es für die Jordannormalform von $A$?[1]

3. Sei $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$ eine Matrix, die die Gleichung
$$A^2 + I = 0 \in \mathbb{K}^{n\times n}$$
erfüllt. Entscheide, ob $A$ diagonalisierbar ist, wenn…
   a) …$\mathbb{K} = \mathbb{C}$,
   b) …$\mathbb{K} = \mathbb{R}$,
   c) …$\mathbb{K} = \mathbb{F}_2$ (Körper mit zwei Elementen) und $\dim\ker(A - I) = n$.

4. Sei $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ die Matrix
$$A = \begin{pmatrix} 2 & -5 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}.$$
Gib alle $f_A$-invarianten Unterräume von $\mathbb{R}^2$ an (mit Beweis), wobei wie üblich
$$\begin{aligned} f_A\colon\ \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ x &\longmapsto Ax. \end{aligned}$$
*Hinweis:* Fallunterscheidung über die Dimension eines hypothetischen $f_A$-invarianten Unterraums.[1]

5. Sei $A$ wie in Aufgabe 3 (und $\mathbb{K}$ unbekannt). Was ist die Dimension des Unterraums
$$U := \operatorname{span}\{A^0, A^1, A^2, A^3, \ldots\} \subset \mathbb{K}^{n\times n}?$$
*Hinweis:* Man kann alle bis auf zwei der unendlich vielen Erzeuger weglassen (welche, und wieso?). Daher ist die Dimension höchstens zwei (wieso?).[1]

6. Sei $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$ eine Matrix und $\beta \in \mathbb{K}$ eine feste Zahl.
   a) Wie hängen die charakteristischen Polynome von $A$ und $A - \beta I$ miteinander zusammen?
   b) Wie steht es um die Minimalpolynome?

   (Jeweils mit Beweis.)

[1] aus der Kielhöfer-Klausur vom SS 2008