Aufgabe 1

Sei $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ eine Matrix, die die Gleichung

$$A^3 - 3A^2 + 2A = 0 \in \mathbb{C}^{n\times n}$$

erfüllt.

a) *Frage:* Welche komplexen Zahlen können Eigenwerte von A sein?

   Dazu: Aus der Voraussetzung folgt, dass das Minimalpolynom von A ein Teiler des Polynoms $X^3 - 3X^2 + 2X$ ist. Dieses hat die Nullstellen $0, 1, 2$, wie eine Nebenrechnung zeigt. Daher kann auch das Minimalpolynom von A nur höchstens die Nullstellen $0, 1, 2$ besitzen. Da die Nullstellen des Minimalpolynoms genau die Eigenwerte sind, besitzt also A höchstens die Zahlen $0, 1, 2$ als Eigenwerte.

b) *Frage:* Weiß man, ob die Abbildung $f_A\colon \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n, x \mapsto Ax$ injektiv ist?

   Dazu: Nein, ohne weitere Angaben kann man das nicht sagen. Denn in a) konnte nicht ausgeschlossen werden, dass A die Zahl 0 als Eigenwert besitzt; sollte das der Fall sein, ist f_A nicht injektiv, da dann $\ker f_A = (\text{Eigenraum von } A \text{ zum Eigenwert } 0) \neq \{0\}$.

c) *Beh.:* Die Matrix A ist diagonalisierbar.

   Bew.: Das charakteristische Polynom von A zerfällt über Linearfaktoren, da die komplexen Zahlen den Grundkörper bilden. Also besitzt A eine Jordannormalform.

   Laut a) ist das Minimalpolynom ein Teiler von $X^3-3X^2+2X = X(X-1)(X-2)$; auch, wenn man daher noch nicht das Minimalpolynom kennt (es gibt noch die Möglichkeiten X, $X-1$, $X-2$, $X(X-1)$, $X(X-2)$, $(X-1)(X-2)$ und $X(X-1)(X-2)$), weiß man auf jeden Fall, dass jeder Linearfaktor nur mit Vielfachheit 1 vorkommt.

   Daher sind die größten der kleinen Jordanblöcke nur (1×1)-Kästchen – also besteht die Jordanform vollständig aus (1×1)-Kästchen und ist daher eine Diagonalmatrix. Das zeigt die Behauptung.

Aufgabe 2

Sei $A \in \mathbb{R}^{7\times 7}$ eine Matrix mit

$$\begin{aligned} \mu_A &= (X-2)^2\,(X-3)^2 \quad \text{und} \\ \chi_A &= -(X-2)^4\,(X-3)^3. \end{aligned}$$

Frage: Welche Möglichkeiten gibt es für die Jordannormalform von A?

Dazu: Aus dem charakteristischen Polynom kann man die Grobstruktur der Jordannormalform ablesen:

$$\begin{pmatrix} \boxed{4\times 4} & \\ & \boxed{3\times 3} \end{pmatrix}$$

Aus dem Minimalpolynom weiß man nun, dass der größte der kleinen Jordanblöcke zu den Eigenwerten 2 und 3 jeweils ein (2×2)-Block ist. Daher gibt es noch die zwei Möglichkeiten

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & & & & & \\ & 2 & & & & & \\ & & 2 & 1 & & & \\ & & & 2 & & & \\ & & & & 3 & 1 & \\ & & & & & 3 & \\ & & & & & & 3 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \begin{pmatrix} 2 & 1 & & & & & \\ & 2 & & & & & \\ & & 2 & & & & \\ & & & 2 & & & \\ & & & & 3 & 1 & \\ & & & & & 3 & \\ & & & & & & 3 \end{pmatrix}$$

für die Feinstruktur der Jordannormalform.

Zusatzfrage: Welche weitere Information über die Matrix A würde erlauben, die richtige Jordannormalform zu bestimmen?

Dazu: Die Dimension des Eigenraums von A zum Eigenwert 2 wäre eine solche Information: Ist die Dimension 2, gibt es zwei kleine Jordanblöcke zum Eigenwert 2, also muss die erste Variante die richtige sein; ist sie stattdessen 3, ist es die zweite Variante.

Aufgabe 3

Sei $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$ eine Matrix, die die Gleichung

$$A^2 + I = 0 \in \mathbb{K}^{n\times n}$$

erfüllt. *Frage:* Ist A diagonalisierbar ist, wenn...

a) ... $\mathbb{K} = \mathbb{C}$?

Dazu: Ja. Das kann man ähnlich wie in Aufgabe 1c) begründen: Das Minimalpolynom muss ein Teiler von $X^2 + 1 = (X - i)(X + i)$ sein, also hat jeder Linearfaktor des Minimalpolynoms Vielfachheit 1 und garantiert daher, dass die Jordannormalform von A aus lauter (1×1)-Kästchen besteht.

b) ... $\mathbb{K} = \mathbb{R}$?

Dazu: Nein. Aus der Voraussetzung folgt, dass das Minimalpolynom ein normierter Teiler von $(X^2 + 1) \in \mathbb{R}[X]$ sein muss. Dieses Polynom ist aber irreduzibel, und hat daher als einzige normierte Teiler das konstante Polynom 1 und sich selbst.

Das konstante Polynom 1 ist niemals ein Minimalpolynom[1], daher muss das Minimalpolynom von A das Polynom $(X^2 + 1)$ sein.

Nach dem Satz von Cayley–Hamilton ist das charakteristische Polynom ein Vielfaches des Minimalpolynoms und enthält daher den Faktor $(X^2 + 1)$. Also zerfällt das charakteristische Polynom (zumindest nicht vollständig) in Linearfaktoren.

Damit kann A (nach Satz 7.59) nicht diagonalisierbar sein.

c) ... $\mathbb{K} = \mathbb{F}_2$ (Körper mit zwei Elementen) und $\dim\ker(A - I) = n$?

Dazu: Ja. Aus $\dim\ker(A - I) = n$ folgt, dass $\ker(A - I) = \mathbb{K}^n$, da der einzige n-dimensionale Unterraum des $\mathbb{K}^n$ der $\mathbb{K}^n$ selbst ist. Nur die Nullmatrix besitzt als Kern den gesamten Quellraum, also folgt $A - I = 0$. Somit ist A die Identitätsmatrix, und liegt als solche sogar schon als Diagonalmatrix vor.

Diese Argumentation funktioniert sogar unabhängig vom Körper $\mathbb{K}$.

[1] außer im in der Vorlesung nicht behandelten Fall von (0×0)-Matrizen