# Verfahren zur Jordannormalform

Gegeben sei eine beliebige quadratische Matrix $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$, gesucht ist eine Jordannormalform $J$ von $A$. Als Voraussetzung benötigen wir dazu, dass das charakteristische Polynom von $A$ in Linearfaktoren zerfällt; sonst gibt es keine Jordannormalform. Über $\mathbb{C}$ klappt es immer.

1. Das charakteristische Polynom aufstellen und in Linearfaktoren zerlegen.

   *Probe auf Verrechner:* Die Summe der Eigenwerte (mit jeweiliger Vielfachheit im charakteristischen Polynom) muss gleich der Summe der Diagonaleinträge von $A$ sein.
2. Die Grobstruktur der Jordannormalform bestimmen:

   Jeder Eigenwert $\lambda$ erhält einen $(\ell \times \ell)$-Großkasten, wobei $\ell$ die algebraische Vielfachheit von $\lambda$, also die Vielfachheit des Linearfaktors $X - \lambda$ im charakteristischen Polynom, ist.
3. Alle Möglichkeiten für die Feinstruktur, also die Aufteilung der Großkästen in kleine Jordanblöcke, auflisten. Dabei konventionsgemäß die kleinen Jordanblöcke der Größe nach absteigend geordnet aufführen.
4. Mit folgenden Kriterien falsche Kandidaten ausschließen: Die richtige Jordannormalform $J$ erfüllt für jeden Eigenwert $\lambda$...
   a) $\operatorname{rank}(A - \lambda I) = \operatorname{rank}(J - \lambda I)$
   b) Anzahl Jordanblöcke zum Eigenwert $\lambda =$
      $\dim\ker(A - \lambda I)$
   c) Anzahl Jordanblöcke der Größe $\geq (m \times m)$ zum Eigenwert $\lambda =$
      $\dim\ker(A - \lambda I)^m - \dim\ker(A - \lambda I)^{m-1}$
   d) Größe des größten Jordanblocks zum Eigenwert $\lambda =$
      Vielfachheit von $(X - \lambda)$ im Minimalpolynom

# Verfahren zur Jordanbasis

1. Das charakteristische Polynom von $A$ aufstellen und in Linearfaktoren zerlegen.
2. Für jeden Eigenwert $\lambda$ sukzessive Basen der Kerne von $(A-\lambda I)$, $(A-\lambda I)^2$, $(A-\lambda I)^3$, ..., $(A - \lambda I)^k$ bestimmen. Dabei kann man abbrechen, sobald eines der folgenden Kriterien des erste Mal erfüllt ist:
   a) Die Dimension von $\ker(A - \lambda I)^k$ ist die algebraische Vielfachheit von $\lambda$.
   b) Es gilt $\ker(A - \lambda I)^k = \ker(A - \lambda I)^{k+1}$.
   c) Der Exponent $k$ ist gleich der Vielfachheit von $(X - \lambda)$ im Minimalpolynom.
3. Für jeden Eigenwert $\lambda$ so lange die folgenden Schritte wiederholen, bis man insgesamt $n$ Basisvektoren bestimmt hat:
   a) Einen Vektor $v$ aus dem höchsten noch nicht vollständig verbrauchten Kern $\ker(A-\lambda I)^m$ wählen, der nicht im Spann folgender „verbotener" Vektoren liegt: der Basisvektoren des nächstniedrigeren Kerns ($\ker(A-\lambda I)^{m-1}$) und allen zuvor bestimmten Basisvektoren.
   b) Die Vektoren

      $$(A - \lambda I)^{m-1}v, (A - \lambda I)^{m-2}v, \ldots, (A - \lambda I)^1 v, v$$

      in dieser Reihenfolge in die Basis übernehmen.

4. Die Basisvektoren nebeneinander als Spalten in eine Matrix $S \in \mathbb{K}^{n\times n}$ schreiben; es gilt dann $S^{-1}AS = J$.

# Verfahren zum Minimalpolynom

Gegeben sei eine beliebige quadratische Matrix $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$, gesucht ist das Minimalpolynom $\mu_A$ von $A$. Dieses ist durch folgende Eigenschaft eindeutig bestimmt:

> Das Minimalpolynom ist dasjenige *normierte* Polynom *kleinsten Grades*, das die Gleichung
> $$\mu_A(A) = 0 \in \mathbb{K}^{n\times n}$$
> erfüllt.

Nach dem Satz von Cayley–Hamilton ist das Minimalpolynom stets ein Teiler des charakteristischen Polynoms. Außerdem besitzen beide Polynome dieselben Linearfaktoren, nur im Allgemeinen mit anderen Vielfachheiten.

Allgemeiner besitzen beide Polynome auch dieselben irreduziblen (beispielsweise quadratischen) Faktoren, nur mit anderen Vielfachheiten. Das wurde aber in der Vorlesung nicht bewiesen und kann daher nicht verwendet werden.

## . . . über Teiler des charakteristischen Polynoms

1. Das charakteristische Polynom von $A$ aufstellen und in irreduzible Faktoren zerlegen.
2. All diejenigen normierten Teiler des charakteristischen Polynoms auflisten, in denen auch jeder Linearfaktor des charakteristischen Polynoms vorkommt. Diese Teiler dem Grad nach aufsteigend ordnen.
3. Sukzessive die Kandidatenpolynome $f$ daraufhin prüfen, ob sie die Gleichung $f(A) = 0$ erfüllen. Das erste erfolgreiche Polynom ist das gesuchte Minimalpolynom von $A$.

## . . . über verallgemeinerte Eigenräume

1. Das charakteristische Polynom von $A$ aufstellen und in irreduzible Faktoren zerlegen. Falls nicht ausschließlich Linearfaktoren in der Zerlegung vorkommen, muss das andere Verfahren oben verwendet werden; abbrechen.
2. Zu jedem Linearfaktor $(X - \lambda)$ im charakteristischen Polynom die Vielfachheit $k$ im Minimalpolynom bestimmen:

   Dazu sukzessive die Dimensionen der Kerne von $(A - \lambda I)$, $(A - \lambda I)^2$, $(A - \lambda I)^3$ usw. berechnen; der erste Exponent, ab dem sich die Dimension nicht mehr ändert, ist die gesuchte Vielfachheit $k$. (Und der zugehörige Kern ist der verallgemeinerte Eigenraum von $A$ zum Eigenwert $\lambda$.)
3. Das Minimalpolynom als Produkt der Linearfaktoren mit entsprechenden Vielfachheiten zusammensetzen.

## ... über die Jordannormalform

1. Die Jordannormalform von $A$ aufstellen.
2. Das Minimalpolynom als Produkt der Linearfaktoren $(X-\lambda)^k$ zu jedem Eigenwert $\lambda$ zusammensetzen, wobei jeweils der Exponent $k$ gleich der Größe des größten Jordanblocks zum Eigenwert $\lambda$ ist.

# Beispiel

Sei die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 3 & & & 2 & \\ 1 & 3 & & & 2 \\ & & 3 & & \\ & & & 3 & \\ & & & & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{5\times 5}$$

gegeben. Wir wollen als erstes die Jordannormalform aufstellen.

1. Das charakteristische Polynom zerlegt sich als
$$\chi_A(X) = -X(X-3)^4.$$
Die Probe geht auf: $0+3+3+3+3 = 12 =$ Summe der Diagonaleinträge von $A$.
2. Die Grobstruktur der Jordannormalform ist also
$$\begin{pmatrix} \boxed{\phantom{0}} & \\ & \boxed{4\times 4} \end{pmatrix}.$$
3. Es gibt insgesamt fünf Möglichkeiten für die Feinstruktur:
$$\begin{pmatrix} \boxed{0} & \\ & \boxed{\boxed{\begin{matrix} 3 & 1 & & \\ & 3 & 1 & \\ & & 3 & 1 \\ & & & 3 \end{matrix}}} \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} \boxed{0} & \\ & \boxed{\begin{matrix} \boxed{\begin{matrix} 3 & 1 & \\ & 3 & 1 \\ & & 3 \end{matrix}} & \\ & \boxed{3} \end{matrix}} \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} \boxed{0} & \\ & \boxed{\begin{matrix} \boxed{\begin{matrix} 3 & 1 \\ & 3 \end{matrix}} & \\ & \boxed{\begin{matrix} 3 & 1 \\ & 3 \end{matrix}} \end{matrix}} \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} \boxed{0} & \\ & \boxed{\begin{matrix} \boxed{\begin{matrix} 3 & 1 \\ & 3 \end{matrix}} & & \\ & \boxed{3} & \\ & & \boxed{3} \end{matrix}} \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} \boxed{0} & \\ & \boxed{\begin{matrix} \boxed{3} & & & \\ & \boxed{3} & & \\ & & \boxed{3} & \\ & & & \boxed{3} \end{matrix}} \end{pmatrix}$$
4. Eine Nebenrechnung zeigt, dass $\dim\ker(A-3I) = 2$. Daher gibt es in der richtigen Jordanform genau zwei Jordanblöcke zum Eigenwert 3, also bleiben nur die zweite und dritte Möglichkeit.

   Eine weitere Nebenrechnung zeigt, dass $\dim\ker(A-3I)^2 = 3$. In der richtigen Jordanform gibt es daher zum Eigenwert 3 genau einen (denn $3-2=1$) Jordanblock, der mindestens Größe $2\times 2$ hat. Also scheidet die dritte Möglichkeit aus, womit die zweite als einzig verbliebene die richtige Jordanform sein muss:
$$J = \begin{pmatrix} \boxed{0} & \\ & \boxed{\begin{matrix} \boxed{\begin{matrix} 3 & 1 & \\ & 3 & 1 \\ & & 3 \end{matrix}} & \\ & \boxed{3} \end{matrix}} \end{pmatrix}.$$

Als nächstes wollen wir auch noch eine Jordanbasis bestimmen.

1. Wie schon oben geschrieben gilt $\chi_A(X) = -X(X-3)^4$.
2. Nebenrechnungen ergeben folgende Basen:

$$\begin{aligned}
\ker(A-0I) &= \operatorname{span}\{2e_2 - 3e_5\}, \text{ fertig nach Kriterium a)}\\
\ker(A-3I) &= \operatorname{span}\{e_2, e_3\}\\
\ker(A-3I)^2 &= \operatorname{span}\{e_2, e_3, e_1\}\\
\ker(A-3I)^3 &= \operatorname{span}\{e_2, e_3, e_1, e_4\}, \text{ fertig nach Kriterium a)}
\end{aligned}$$

3. Für den Eigenwert 0 wählen wie $2e_2 - 3e_5$ als einzigen Basisvektor.

   Für den Eigenwert 3 wählen wir als erstes den Vektor $e_4$. Dann ergeben sich die Basisvektoren $(A-3I)^2 e_4, (A-3I)e_4, e_4$, also $2e_2, 2e_1, e_4$.

   Noch sind wir nicht fertig; der höchste unverbrauchte Kern für den Eigenwert 3 ist $\ker(A-3I)$, und wir wählen $e_3$ als Basisvektor. (Etwas genauer: Die Basisvektoren $e_2, e_3, e_1$ von $\ker(A-3I)^3$ liegen auch in $\ker(A-3I)^2$ und der letzte Basisvektor $e_4$ ist linear abhängig zu den eben bestimmten Vektoren. Daher ist $\ker(A-3I)^3$ verbraucht. Auch $\ker(A-3I)^2$ ist verbraucht, denn seine Basisvektoren $e_2, e_3$ liegen auch in $\ker(A-3I)$ und $e_1$ ist linear abhängig zu den eben bestimmten Vektoren. Somit ist $\ker(A-3I)$ der letzte verbleibende unverbrauchte Kern.)
4. Es gilt also $S^{-1}AS = J$, wobei

$$S = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -3 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$