Besonderheiten nilpotenter Matrizen

Für jede Matrix $A \in \mathbb{K}^{n \times n}$ sind folgende Aussagen äquivalent:

1. Die Matrix A ist nilpotent, d. h. für eine gewisse natürliche Zahl m ist $A^m = 0$.
2. Das charakteristische Polynom ist $\chi_A = (-X)^n$.
3. Das Minimalpolynom ist von der Form $\mu_A = X^k$ für eine natürliche Zahl k.

   Diese Zahl k ist dann der *Nilpotenzgrad* von A, also die kleinste natürliche Zahl k mit $A^k = 0$.
4. Die Matrix A besitzt eine Jordannormalform; und in dieser gibt es nur einen Großkasten, nämlich den zum einzigen Eigenwert 0.

   Der größte der kleinen Jordanblöcke ist ein $(k \times k)$-Block.

Mittels dieser Eigenschaften kann man beim Aufstellen der Jordanform ein wenig Zeit sparen.

Warnung: Es stimmt, dass nilpotente Matrizen nur den Eigenwert 0 besitzen, das kann man am bekannten charakteristischen Polynom erkennen. Die Umkehrung gilt aber nicht: Beispielsweise ist die Matrix

$$\begin{pmatrix} 0 & & \\ & 0 & -1 \\ & 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$$

nicht nilpotent, aber das charakteristische Polynom $\chi = -X(X^2 + 1)$ zeigt, dass sie als einzigen Eigenwert die Zahl 0 besitzt.