Verfahren zur orthogonalen Normalform

Gegeben sei eine orthogonale Matrix $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$. Gesucht ist die sog. *orthogonale Normalform* $N \in \mathbb{R}^{n \times n}$ von A und eine orthogonale Transformationsmatrix $S \in \mathbb{R}^{n \times n}$ mit

$$S^T A S = N.$$

0. $A^S := A + A^T \in \mathbb{R}^{n \times n}$ aufstellen.
1. Das charakteristische Polynom von A^S berechnen und dann Basen aller Eigenräume von A^S bestimmen. Diese Basen müssen nicht unbedingt Orthonormalbasen sein.

   Probe auf Verrechner: Die Summe der Eigenwerte von A^S (mit ihrer Vielfachheit im charakteristischen Polynom gezählt) muss gleich der Summe der Diagonaleinträge von A^S sein.
2. Sukzessive die gesuchte orthogonale Normalform und Orthonormalbasis aufstellen, indem man folgenden Schritt so lange wiederholt, bis man n Basisvektoren gefunden hat:
   a) Einen beliebigen Eigenvektor v eines beliebigen Eigenraums von A^S nehmen, der senkrecht auf allen bisher gefundenen Basisvektoren steht.
   Wichtig: Im Allgemeinen wird A^S die Eigenwerte 2, -2 und weitere Eigenwerte besitzen. Man darf mit den Eigenvektoren zu den weiteren Eigenwerten erst beginnen, wenn man die zu den Eigenwerten 2 und -2 abgearbeitet hat. Sonst kann es nämlich passieren, dass die resultierenden (2×2)-Blöcke keine reinen Drehblöcke, sondern Drehspiegelungsblöcke sind, die später noch diagonalisiert werden müssten.
   b) Wenn v ein Eigenvektor von A^S zum Eigenwert ± 2 ist, kann man
   $$v / \|v\|$$
   in die unter Konstruktion befindliche Orthonormalbasis aufnehmen. Der entsprechende Diagonaleintrag der Normalform ist ± 1.
   c) Wenn v ein Eigenvektor zu einem anderen Eigenwert ist, muss man zunächst eine Orthonormalbasis b_1, b_2 des (stets zweidimensionalen) Unterraums
   $$U := \operatorname{span}\{v, Av\}$$
   berechnen, beispielsweise mit Gram–Schmidt. In die unter Konstruktion befindliche Orthonormalbasis kann man dann b_1 und b_2 aufnehmen. In die Normalform kommt ein (2×2)-Drehblock
   $$\begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix},$$
   wobei man den Winkel über die Beziehungen
   $$\cos\alpha = \langle Ab_1, b_1 \rangle$$
   $$\sin\alpha = \langle Ab_1, b_2 \rangle$$
   bestimmen kann. Wem das ungeheuer ist, kann auch einfach die Darstellungsmatrix von A eingeschränkt auf U (bezüglich der Basisvektoren b_1, b_2) aufstellen – das gibt dasselbe Ergebnis. Es gibt auch noch andere Möglichkeiten, den Drehwinkel zu finden.
3. Die insgesamt n Basisvektoren nebeneinander als Spalten in die Transformationsmatrix S schreiben.