Hier eine kurze Erklärung zu Quadriken und der Hauptachsentransformation. Als Grundlage diente größtenteils eine Beschreibung von Markus Göhl vom Sommersemester 2010.

Quadriken

Definition. Eine Quadrik ist die Nullstellenmenge eines quadratischen Polynoms. Das Polynom darf dabei mehr als nur eine Variable enthalten.

Beispiel. Die Teilmenge

$$Q := \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \,\middle|\, 5x^2 - 4xy + 8y^2 + \frac{20}{\sqrt{5}}x - \frac{80}{\sqrt{5}}y + 4 = 0 \right\} \subset \mathbb{R}^2$$

des zweidimensionalen Raums ist eine Quadrik.

(Nullstellenmengen hat man auch schon in der Schule untersucht, da aber meistens nur von Funktionen einer statt mehrerer veränderlicher Variablen.)

Quadriken kann man in Koordinatensysteme einzeichnen, Wikipedia hat schöne Grafiken dazu: `http://en.wikipedia.org/wiki/Quadric`

Quadriken klassifiziert man in verschiedene Typen (Ellipsoid, Paraboloid, Kegel und einige andere; die Wikipedia-Seite zählt alle Typen auf). Bei der Hauptachsentransformation geht es darum, ohne Zeichnung allein durch Rechnung festzustellen, welchen Typ eine gegebene Quadrik hat.

Beispiel. Erinnert man sich an den Satz von Pythagoras, so sieht man, dass

$$Q := \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \,\middle|\, x^2 + y^2 - 1 = 0 \right\}$$

ein Kreis um den Koordinatenursprung mit Radius 1 ist. Wenn man nun die Koordinaten ändert, beispielsweise

$$\begin{aligned} x &= 2\hat{x} - \hat{y} \\ y &= \hat{x} + \hat{y} \end{aligned}$$

definiert, erhält man die transformierte Quadrik

$$\widehat{Q} := \left\{ \begin{pmatrix} \hat{x} \\ \hat{y} \end{pmatrix} \,\middle|\, (2\hat{x} - \hat{y})^2 + (\hat{x} + \hat{y})^2 - 1 = 0 \right\},$$

fertig vereinfacht gibt das

$$\widehat{Q} = \left\{ \begin{pmatrix} \hat{x} \\ \hat{y} \end{pmatrix} \,\middle|\, 5\hat{x}^2 - 2\hat{x}\hat{y} + 2\hat{y}^2 - 1 = 0 \right\}.$$

Zeichnet man diese Menge in ein Koordinatensystem ein, erhält man einen deformierten Kreis, eine Ellipse; allerdings ist das überhaupt nicht klar, wenn man nur die transformierte Gleichung gegeben hat. Die Hauptachsentransformation ist nun eine Methode, um aus einer gegebenen unübersichtlichen Gleichung eine viel einfacherere zu erhalten.

Hauptachsentransformation

Die Hauptachsentransformation kann man in fünf Schritten als Rechenschema formulieren:

Gegeben: eine beliebige Quadrik.
Gesucht: eine einfachere Form der Quadrik.
Verfahren:

0. Die gegebene Quadrik in Matrixsprache schreiben.
1. Die Matrix orthogonal diagonalisieren, d. h. eine Orthonormalbasis aus Eigenvektoren finden.
2. Wieder zurück in Gleichungssprache übersetzen.
3. Mittels quadratischer Ergänzung die erhaltene Gleichung weiter vereinfachen.
4. Falls lineare Terme übrig bleiben: Zusatztransformation ausführen.

Musterbeispiel

Es sei die zweidimensionale Quadrik

$$Q := \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \,\middle|\, x_1^2 + 4x_1x_2 + x_2^2 + 3x_1 - 5x_2 - 1 = 0 \right\} \subset \mathbb{R}^2$$

gegeben.

Schritt 0

In Matrixsprache schreibt sich die Quadrik als

$$Q = \left\{ x \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, \langle Mx, x\rangle + \langle b, x\rangle + c = 0 \right\},$$

wobei

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, \qquad b = \begin{pmatrix} 3 \\ -5 \end{pmatrix}, \qquad c = -1$$

und die spitzen Klammern $\langle \cdot, \cdot \rangle$ das Standardskalarprodukt im $\mathbb{R}^2$ bezeichnen, zur Erinnerung:

$$\left\langle \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \right\rangle = x_1y_1 + x_2y_2$$

Die Matrix M, der Vektor b und die Zahl c kommen dabei wie folgt zustande: Die Zahl c ist der konstante Term des die Quadrik definierenden Polynoms, also der Summand, der mit keiner der Variablen multipliziert wird.

Der Vektor b sammelt die Koeffizienten der linearen Glieder auf, also derjenigen Summanden, in denen genau eine Variable genau einmal vorkommt.

[Je nach Geschmack schreiben andere nicht „$\langle b, x\rangle$“, sondern „$2\langle b, x\rangle$“, und müssen dann als b entsprechend die Hälfte nehmen.]

Auf der Hauptdiagonale der Matrix M stehen die Koeffizienten der rein-quadratischen Terme, d. h. der Summanden, in denen genau eine Variable genau zweimal vorkommt; im Beispiel sind das x_1^2 und x_2^2 (jeweils mit Koeffizient 1), nicht aber $4x_1x_2$.

Die restlichen Komponenten der Matrix ergeben sich aus den gemischt-quadratischen Termen, d. h. den Summanden, in denen genau zwei Variablen jeweils genau einmal vorkommen, im Beispiel ist das lediglich $4x_1x_2$. In die Matrix trägt man aber nicht einfach den Koeffizienten, im Beispiel also die Zahl 4, ein, sondern die Hälfte des Koeffizienten (also 2), und zwar in gleich zwei Zellen der Matrix:

Beispiel. Der Term $4x_1x_2$ schreibt vor, dass man in die $(1, 2)$-Komponente (erste Zeile, zweite Spalte) und in die $(2, 1)$-Komponente (zweite Zeile, erste Spalte) jeweils $4/2 = 2$ einträgt.

Bei einem hypothetischen anderen Term wie $12x_3x_7$ müsste man in die $(3, 7)$-Komponente und in die $(7, 3)$-Komponente jeweils $12/2 = 6$ eintragen.

Bemerkung. Wenn dieser Verfahrensschritt seltsam anmutet, kann man mal die durch das Verfahren angegebene Gleichung in Matrixform, also $\langle Mx, x\rangle + \langle b, x\rangle + c = 0$, durch Einsetzen eines beliebigen Vektors $x = \left(\begin{smallmatrix} x_1 \\ x_2 \end{smallmatrix}\right)$ fertig ausrechnen. Dabei wird man feststellen, dass man wieder genau auf die ursprüngliche Gleichung kommt.

Schritt 1

Nun muss man die Matrix orthogonal diagonalisieren. „Orthogonal“ bedeutet dabei, dass man nicht irgendeine Basis aus Eigenvektoren finden soll, sondern eine, die sogar eine Orthonormalbasis ist.

(Zur Erinnerung: Eine Basis heißt „Orthonormalbasis“, wenn jeder Vektor der Basis Länge 1 hat und je zwei verschiedene Basisvektoren aufeinander senkrecht stehen. Ein Vektor x hat genau dann Länge 1, wenn $\|x\| = \sqrt{\langle x, x\rangle} = 1$. Vektoren x, y stehen genau dann aufeinander senkrecht, wenn $\langle x, y\rangle = 0$.)

Da die in Schritt 0 konstruierte Matrix stets symmetrisch ist, weiß man aus der allgemeinen Theorie, dass es auf jeden Fall möglich ist, die Matrix orthogonal zu diagonalisieren, man muss nur das Standardprogramm durchziehen:

- Charakteristisches Polynom:
  $$\chi(\lambda) = \det \begin{pmatrix} 1-\lambda & 2 \\ 2 & 1-\lambda \end{pmatrix} = (1-\lambda)^2 - 4 = \lambda^2 - 2\lambda - 3 = (\lambda+1)(\lambda-3)$$
- Eigenwerte (= Nullstellen des charakteristischen Polynoms):
  $\lambda_1 = -1$, $\lambda_2 = 3$

Sollte die Zahl 0 ein Eigenwert sein, sollte man an dieser Stelle darauf achten, sie als *letzten* Eigenwert aufzuführen. Sonst funktioniert nämlich Schritt 4 später nicht richtig.

Probe auf Verrechner: Die Summe der Eigenwerte (mit Vielfachheit gezählt) muss gleich der Summe der Diagonaleinträge von A sein. Hier geht die Probe auf, da $-1+3=2=1+1$.

– Eigenräume:

zum Eigenwert -1: $\ker\begin{pmatrix}1+1 & 2\\ 2 & 1+1\end{pmatrix} = \ker\begin{pmatrix}2 & 2\\ 2 & 2\end{pmatrix} = \operatorname{span}\left\{\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}\right\}$

zum Eigenwert 3: $\ker\begin{pmatrix}1-3 & 2\\ 2 & 1-3\end{pmatrix} = \ker\begin{pmatrix}-2 & 2\\ 2 & -2\end{pmatrix} = \operatorname{span}\left\{\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}\right\}$

– Mögliche Orthonormalbasis aus Eigenvektoren:

$$B = (v_1, v_2),$$

wobei

$$v_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}, \qquad v_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}.$$

Lässt man die beiden Normierungsfaktoren $\frac{1}{\sqrt{2}}$ weg, hat man zwar immer noch eine Basis aus Eigenvektoren, aber nicht mehr eine orthonormale Basis aus Eigenvektoren. Den richtigen zu verwendenden Normierungsfaktor erhält man über die Formel 1/(Länge des zu normierenden Vektors).

Schließlich muss man noch darauf achten, dass je zwei verschiedene Basisvektoren aufeinander senkrecht stehen. Dazu muss man speziell in diesem Beispiel aber nicht einmal eine Rechnung durchführen, denn man weiß aus allgemeiner Theorie, dass Eigenvektoren einer symmetrischen Matrix zu verschiedenen Eigenwerten notwendigerweise aufeinander senkrecht stehen.

– Basistransformation:

$$M = S\widehat{M}S^{-1},$$

wobei

$$\widehat{M} = \begin{pmatrix}-1 & 0\\ 0 & 3\end{pmatrix}, \qquad S = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1 & 1\\ -1 & 1\end{pmatrix}.$$

(Zur Erinnerung: In der Diagonalform $\widehat{M}$ stehen auf der Hauptdiagonale die Eigenwerte (in der Reihenfolge, wie man sie bei ihrer Berechnung oben beliebig festgelegt hat) und außerhalb der Hauptdiagonale Nullen, und in die Matrix S schreibt man die Eigenvektoren (in derselben Reihenfolge) nebeneinander als Spalten. Der Übersichtlichkeit ist hier der gemeinsame Faktor $\frac{1}{\sqrt{2}}$ nach vorne gezogen.)

Schritt 2

Jetzt erfolgt die Rückübersetzung:

$$\begin{aligned}\widehat{Q} &:= \left\{ \hat{x} = \begin{pmatrix} \hat{x}_1 \\ \hat{x}_2 \end{pmatrix} \,\middle|\, \langle \widehat{M}\hat{x}, \hat{x}\rangle + \langle S^T b, \hat{x}\rangle + c = 0 \right\} \\ &= \left\{ \begin{pmatrix} \hat{x}_1 \\ \hat{x}_2 \end{pmatrix} \,\middle|\, -\hat{x}_1^2 + 3\hat{x}_2^2 + \frac{8}{\sqrt{2}}\hat{x}_1 - \frac{2}{\sqrt{2}}\hat{x}_2 - 1 = 0 \right\}\end{aligned}$$

Diese transformierte Form zeichnet sich dadurch aus, dass es keine gemischt-quadratischen Terme mehr gibt; in diesem Sinn ist diese Form einfacher als die ursprünglich gegebene.

Grafisch gilt zwar nicht, dass $Q = \widehat{Q}$, aber $\widehat{Q}$ entsteht aus Q „vermöge der orthogonalen Basistransformation S^T“. Anschaulich hat man das Koordinatensystem so gedreht und gespiegelt, dass die neuen Koordinatenachsen mit den Achsen der Quadrik (den sog. Hauptachsen!) übereinstimmen; dadurch vereinfachte sich die Gleichung.

Wenn man konkret zwischen Originalpunkten und transformierten Punkten umrechnen mag, kann man das mithilfe der beiden Formeln

$$\begin{aligned}\hat{x} &= S^T x \\ x &= (S^T)^{-1}\hat{x} = S\hat{x}\end{aligned}$$

tun, wobei man sich praktischerweise die Invertierung von S sparen kann, da man aus der allgemeinen Theorie weiß, dass das Inverse einer orthogonalen Matrix (d. h. einer Matrix, deren Spalten eine Orthonormalbasis bilden – das ist hier der Fall) einfach durch ihre Transponierte gegeben ist.

Schritt 3

In diesem vorletzten Schritt nutzt man quadratische Ergänzung, um die noch übrigen linearen Terme zu entfernen und so die Gleichung noch weiter zu vereinfachen.

$$\begin{aligned}&-\hat{x}_1^2 + 3\hat{x}_2^2 + \frac{8}{\sqrt{2}}\hat{x}_1 - \frac{2}{\sqrt{2}}\hat{x}_2 - 1 \\ &= -\left(\hat{x}_1^2 - \frac{8}{\sqrt{2}}\hat{x}_1\right) + 3\left(\hat{x}_2^2 - \frac{2}{3\sqrt{2}}\hat{x}_2\right) - 1 \\ &= -\left(\left(\hat{x}_1 - \frac{4}{\sqrt{2}}\right)^2 - \left(\frac{4}{\sqrt{2}}\right)^2\right) + 3\left(\left(\hat{x}_2 - \frac{1}{3\sqrt{2}}\right)^2 - \left(\frac{1}{3\sqrt{2}}\right)^2\right) - 1 \\ &= -\hat{\hat{x}}_1^2 + 8 + 3\hat{\hat{x}}_2^2 - \frac{1}{6} - 1 \\ &= -\hat{\hat{x}}_1^2 + 3\hat{\hat{x}}_2^2 + \frac{41}{6},\end{aligned}$$

wobei

$$\begin{aligned}\hat{\hat{x}}_1 &= \hat{x}_1 - \frac{4}{\sqrt{2}},\\ \hat{\hat{x}}_2 &= \hat{x}_2 - \frac{1}{3\sqrt{2}}.\end{aligned}$$

Die quadratische Ergänzung funktioniert so: Als erstes fasst man die Terme zu den verschiedenen Variablen zusammen und klammert die Koeffizienten der quadratischen Glieder jeweils aus. Dann ergänzt man mithilfe der ersten oder zweiten binomischen Formel, und schließlich vereinfacht man soweit wie möglich.

Als Endergebnis erhält man somit:

$$\hat{\hat{Q}} := \left\{ \begin{pmatrix} \hat{\hat{x}}_1 \\ \hat{\hat{x}}_2 \end{pmatrix} \,\middle|\, -\hat{\hat{x}}_1^2 + 3\hat{\hat{x}}_2^2 + \frac{41}{6} = 0 \right\}$$

Wikipedia (oder Auflösen nach $\hat{\hat{x}}_1 = \pm\sqrt{3\hat{\hat{x}}_2^2 + 41/6}$) sagt dann, dass es sich hierbei um eine Hyperbel handelt.

Warnung. Es ist wichtig, vor der quadratischen Ergänzung die Koeffizienten vor den quadratischen Faktoren auszuklammern. Die Huthutkoordinaten darf man also nur als Verschiebung $\hat{\hat{x}}_i := \hat{x}_i \pm c_i$ der Hutkoordinaten definieren, nicht als gleichzeitige Verschiebung und Streckung (wie etwa $\hat{\hat{x}}_i := 17(\hat{x}_i \pm c_i)$). Denn sonst ist die resultierende Transformation nicht orthogonal.

Schritt 4

Wenn nach Schritt 3 keine lineare Terme mehr vorhanden sind, ist man bereits fertig. Ansonsten dient dieser letzte Schritt dazu, noch von den linearen Termen alle bis auf einen zu eliminieren.

Da beim Musterbeispiel keine linearen Terme übrig geblieben sind, gehen wir jetzt von einem neuen Beispiel aus,

$$\hat{\hat{Q}} := \left\{ \begin{pmatrix} \hat{\hat{x}}_1 \\ \hat{\hat{x}}_2 \\ \hat{\hat{x}}_3 \end{pmatrix} \,\middle|\, \hat{\hat{x}}_1^2 - 12\hat{\hat{x}}_2 - 4\hat{\hat{x}}_3 - 12 = 0 \right\},$$

das bereits die Schritte 0 bis 3 durchlaufen hat.

Aus der Vorlesung ist bekannt, dass es in dieser Situation eine orthogonale Matrix T gibt, die

1. für diejenigen Indizes i, sodass der Koeffizient vor $\hat{\hat{x}}_i$ nicht null ist, in der i-ten Spalte den i-ten kanonischen Einheitsvektor enthält und
2. $T\frac{\hat{\hat{b}}}{\|\hat{\hat{b}}\|} = e_n$ erfüllt, wobei e_n der letzte kanonische Einheitsvektor und $\hat{\hat{b}}$ der Koeffizientenvektor der linearen Terme ist.

Ist man nur an der Normalform, nicht aber an der dazu benötigten Koordinatentransformation interessiert, kann man sich sparen, eine solche Matrix T aufzustellen.

Die transformierte Quadrikgleichung erhält man dann einfach dadurch, indem man die linearen Terme streicht und durch einen einzigen neuen linearen Term ersetzt, nämlich

$$\|\hat{\hat{b}}\| \cdot \hat{\hat{\hat{x}}}_n;$$

im Beispiel also

$$\hat{\hat{\hat{x}}}_1^2 + \sqrt{12^2 + 4^2} \cdot \hat{\hat{\hat{x}}}_3 - 12 = 0.$$

Um dann das endgültige Endergebnis zu erhalten, muss man noch eine Verschiebung vornehmen, die den konstanten Term eliminiert (zuerst den Vorfaktor ausklammern, dann die neuen Koordinaten einführen):

$$\hat{\hat{\hat{\hat{x}}}}_1^2 + \sqrt{160}\,\hat{\hat{\hat{\hat{x}}}}_3 = 0,$$

wobei $\hat{\hat{\hat{\hat{x}}}}_1 = \hat{\hat{\hat{x}}}_1$, $\hat{\hat{\hat{\hat{x}}}}_2 = \hat{\hat{\hat{x}}}_2$, $\hat{\hat{\hat{\hat{x}}}}_3 = \hat{\hat{\hat{x}}}_3 - 12/\sqrt{160}$.

Bemerkung. Theoretischer Hintergrund für diesen letzten Schritt ist die Transformation mit T^T (genauso, wie man in Schritt 2 mit S transformiert hat).

Unterscheidung in Mittelpunktsquadriken/Paraboloide

Bei manchen Quadriktypen kann man sinnvoll von einem „Mittelpunkt" sprechen. Dabei sind für einen beliebigen Punkt $\xi \in \mathbb{R}^n$ folgende Aussagen äquivalent (vgl. Satz 9.68 im Skript):

1. Der Punkt ξ ist ein Mittelpunkt der Quadrik.
2. Es gilt $A\xi + \frac{1}{2}b = 0$.
3. Für alle Vektoren $x \in \mathbb{R}^n$ mit $\xi + x \in Q$ gilt $\xi - x \in Q$, die Quadrik ist also punktsymmetrisch mit Spiegelungszentrum ξ.

Am einfachsten findet man Mittelpunkte, indem man das Gleichungssystem in 2. löst. Eine gegebene Quadrik kann keinen, genau einen oder unendlich viele gleichberechtigte Mittelpunkte besitzen – denn das Gleichungssystem kann keine, genau eine oder unendlich viele Lösungen besitzen. Falls die Quadrik mindestens einen Mittelpunkt besitzt, heißt sie *Mittelpunktsquadrik*; sonst *Paraboloid*.

Das anfangs betrachtete Musterbeispiel besitzt genau einen Mittelpunkt, nämlich

$$\xi = \begin{pmatrix} 13/6 \\ -11/6 \end{pmatrix}.$$

Siehe auch

Im Internet gibt es viele vollständig durchgerechnete Beispiele zu Quadriken, hier ein paar Links:

- `http://www.mia.uni-saarland.de/Teaching/MFI07/kap49.pdf`
  (zweidimensionales Beispiel)
- `http://m19s28.dyndns.org/iblech/stuff/carina-tutor-mehrere-variable/`
  (ganz unten; leicht andere Schreibweise als hier, dafür aber eine Staatsexamensaufgabe)
- `http://www.arndt-bruenner.de/mathe/scripts/eigenmatrix.htm`
  (Rechner für zwei- und dreidimensionale Quadriken)