Aufgaben zum Skalarprodukt

0. Die Teilaufgaben (d) und (e) von A54 sind gut.

1. Sei U ein beliebiger Unterraum eines euklidischen (oder unitären) Vektorraums V.
   a) *Zeige:* Es gilt $U \subset (U^\perp)^\perp$.

      Hinweis: Mit einer Skizze kann man sich zumindest schonmal von der Gültigkeit der Behauptung überzeugen. Der Beweis geht sehr schnell, wenn man die Definition von $U^\perp$ kennt und man sich vom mehrmaligen Umdenken nicht verwirren lässt.

   b) Sei nun V außerdem endlich-dimensional. *Zeige:* $U = (U^\perp)^\perp$.

      Hinweis: Es gibt eine Dimensionsformel für $U^\perp$, die hier in Kombination mit a) sehr nützlich ist.

2. a) Sei V ein euklidischer (oder unitärer) Vektorraum endlicher Dimension und $f\colon V \to V$ eine orthogonale lineare Abbildung. Sei $U \subset V$ ein Unterraum.

      Zeige: $f[U^\perp] = (f[U])^\perp$.

      Hinweis: Die Richtung „$\subset$“ geht ohne Tricks. Für die andere Richtung sind Dimensionsformeln hilfreich.

   b) Finde ein Beispiel einer symmetrischen (2×2)-Matrix und eines Unterraums $U \subset \mathbb{R}^2$, für die die Aussage in a) nicht gilt.

3. Sei $S \in \mathbb{R}^{n\times n}$ eine symmetrische positiv definite Matrix. Nach Übungsaufgabe 37(a) wissen wir, dass dann die Definition

   $$\langle x, y\rangle := x^T S y$$

   ein Skalarprodukt auf $\mathbb{R}^n$ definiert, welches nur im Ausnahmefall $S = I_n$ mit dem Standardskalarprodukt übereinstimmt.

   Nehmen wir an, jemand verwendet das Sylvesterformverfahren, um eine Transformationsmatrix X mit

   $$X^T S X = D$$

   zu finden, wobei D eine Diagonalmatrix ist, deren Hauptdiagonaleinträge in $\{-1, 0, 1\}$ liegen.

   Die i-te Spalte von X sei mit $x_i \in \mathbb{R}^n$ bezeichnet.

   a) *Berechne:* $\langle x_i, x_j\rangle$ für alle $i, j = 1, \ldots, n$.

   b) *Zeige:* D ist die Einheitsmatrix.