Dualraum

Sei V ein beliebiger Vektorraum über einem festen Körper K.

Def.: (Dualraum)

Der *Dualraum von* V ist definiert als

$$V' := L(V, K) = \{A{:}V \to K \mid A \text{ linear}\}.$$

Elemente von V' sind also nicht etwa wie in Rechenaufgaben oft irgendwelche Spaltenvektoren, sondern gewisse Funktionen – nämlich lineare Funktionen von V nach K.

Bsp.: Die Abbildung $A{:}\,\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}, \left(\begin{smallmatrix}\alpha\\ \beta\\ \gamma\end{smallmatrix}\right) \mapsto 2\alpha + \beta - \gamma$ ist ein Element von $(\mathbb{R}^3)'$. Die Abbildung $f{:}\,\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}, \left(\begin{smallmatrix}\alpha\\ \beta\\ \gamma\end{smallmatrix}\right) \mapsto \sin\alpha + 3\cos\beta - \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}$ ist kein Element von $(\mathbb{R}^3)'$.

Bem.: (Dimension des Dualraums)

Ist V endlichdimensional, so liefert eine Dimensionsformel aus der LA I:

$$\dim V' = \dim L(V, K) = \dim L(V, K^1) = \dim V \cdot \dim K^1 = \dim V \cdot 1 = \dim V.$$

Der Dualraum V' hat also, wenn V endlichdimensional ist, dieselbe Dimension wie der Originalraum V.

Bem.: (Veranschaulichung durch Matrizen)

Für den Spezialfall $V = \mathbb{K}^n$ kann man ein wenig Anschaulichkeit in diese Definition bringen.

Elemente von $\mathbb{K}^n$ seien nach Konvention Spaltenvektoren.

Ist dann $A \in (\mathbb{K}^n)'$ ein Element des Dualraums $(\mathbb{K}^n)'$, also eine lineare Abbildung von $\mathbb{K}^n$ nach $K = K^1$, so kann man zu dieser linearen Abbildung ihre Matrix

$$M(A; B, (1)) \in \mathbb{K}^{1\times n}$$

bezüglich der kanonischen Basis $B = (e_1, \ldots, e_n)$ von $\mathbb{K}^n$ und der kanonischen Basis (1) von $\mathbb{K}^1$ betrachten; diese ist dann ein Zeilenvektor.

Man kann daher in diesem Spezialfall $V = \mathbb{K}^n$ lax sagen: „Der Dualraum $(\mathbb{K}^n)'$ von $\mathbb{K}^n$ ist der Raum der Zeilenvektoren der Länge n."

Wichtige Warnung: Diese Bemerkung soll wirklich nur zur Anschauung im Spezialfall $V = \mathbb{K}^n$ dienen. Sie trifft nicht auf beliebige Vektorräume zu und kann auch nicht bei Übungs- oder Klausuraufgaben eingesetzt werden, bei denen man ja stets von Definitionen ausgehend argumentieren muss.

Bem.: (Hilfreiche Schlussregeln)

Um zu zeigen, dass ein Vektor $x \in V$ gleich dem Nullvektor ist, genügt es zu zeigen, dass

$$f(x) = \langle x, f\rangle = 0$$

für alle $f \in V'$ gilt.

Um zu zeigen, dass ein Vektor $f \in V'$ des Dualraums gleich dem Nullvektor ist, genügt es zu zeigen, dass

$$f(x) = \langle x, f \rangle = 0$$

für alle $x \in V$ gilt.

Def.: (Duale Basis)

Ist $B = (b_1, \ldots, b_n)$ eine Basis von V, so gibt es die sog. *zu B duale Basis* $B' := (b'_1, \ldots, b'_n)$. Diese ist eine Basis des Dualraums V'.

Die Basisvektoren b'_i sind Elemente des Dualraums V', also lineare Abbildungen von V nach K. Um sie zu definieren, genügt es daher (wie immer bei linearen Abbildungen!), ihre Werte auf einer Basis des Quellraums V zu definieren und dann linear fortzusetzen.

Als Basis im Quellraum V nehmen wir die fest gewählte Basis $B = (b_1, \ldots, b_n)$. Die Definition von b'_i ist dann:

$$\begin{aligned} b'_i\colon\ V &\to K \\ b_j &\mapsto \delta_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{für } i = j \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases} \end{aligned}$$

Etwas kürzer kann man diese Definition so schreiben:

$$b'_i(b_j) = \delta_{ij},$$

oder, wenn man die Schreibweise $\langle x, A \rangle := A(x)$ für Funktionen A und Argumente x nutzt, so:

$$\langle b_j, b'_i \rangle = \delta_{ij}.$$

(Die Schreibweise mit spitzen Klammern hat erstmal nichts mit Skalarprodukten zu tun.)

Duale Abbildung

Def.: (Duale Abbildung)

Seien V und W Vektorräume und $A\colon V \to W$ eine lineare Abbildung. Dann definiert man die *zu A duale Abbildung* $A'\colon W' \to V'$ (die Umkehrung der Reihenfolge von V und W ist kein Tippfehler!) wie folgt:

$$\begin{aligned} A'\colon\ W' &\to V' \\ g &\mapsto g \circ A \end{aligned}$$

Dabei bezeichnet „$\circ$“ die Verkettung von Funktionen. Die duale Abbildung ist selbst auch wieder eine lineare Abbildung.

Diese Definition ist so zu verstehen: Um anzugeben, was die Abbildung $A'\colon W' \to V'$ machen soll, muss man angeben, was ihr Funktionswert $A'(g)$ für Stellen $g \in W'$ der Definitionsmenge sein soll. Dieser Funktionswert $A'(g)$ soll ein Element von V', also eine lineare Abbildung von V nach K, sein.

Ein beliebiges Element $g \in W'$ des Quellraums ist eine lineare Abbildung von W nach K; die Komposition $g \circ A$ ist daher eine lineare Abbildung von V nach K – also ein Element von V', genau wie gewünscht.

Bem.: (Grundlegende Rechenregel für die duale Abbildung)

Direkt nach Definition gilt für alle $A\colon V \to W$, $g \in W'$, $x \in V$:

$$(A'(g))(x) = (g \circ A)(x) = g(A(x)),$$

oder in der Schreibweise mit spitzen Klammern:

$$\langle x, A'g \rangle = \langle Ax, g \rangle.$$

Die obere Zeile ist so zu verstehen: $A'(g) \in V'$ ist selbst eine lineare Abbildung von V nach K; diese hat einen bestimmten Wert $(A'(g))(x)$ für Stellen x ihres Definitionsbereichs V. Die Rechenregel sagt, dass dieser Wert gleich $g(A(x))$ ist.

Diese Rechenregel erinnert vielleicht an die der adjungierten Abbildung, hat aber zunächst nichts mit ihr zu tun.

Bem.: („Keine dualen Vektoren")

Man kann also zu jeder linearen Abbildung $A\colon V \to W$ die duale Abbildung $A'\colon W' \to V'$ definieren. Das kann man mit beliebigen Vektoren nicht! Das soll heißen: Ist $x \in V$ ein Element von V, so ist *kein* hypothetischer eindeutig zugehöriger „dualer Vektor" $x' \in V'$ definiert.

Das ist von der Schreibweise her verwirrend: Schreibt man „$x' \in V'$", so meint man einfach irgendeinen Vektor des Dualraums V'. Schreibt man aber „A'", so meint man ganz speziell die zu A duale Abbildung A', und nicht etwa irgendeine Abbildung.

Unterräume $U^\perp$ und $^\perp(U')$

Def.: (Unterraum $U^\perp$)

Ist $U \subset V$ ein Unterraum, so ist ein Unterraum $U^\perp \subset V'$ des Dualraums von V wie folgt definiert:

$$U^\perp := \{f \in V' \mid f(u) = \langle u, f \rangle = 0 \text{ für alle } u \in U\} \subset V'$$

Diese Definition soll ein wenig an die Definition des orthogonalen Komplements erinnern, hat aber bis auf das leider gemeinsam benutzte Symbol $^\perp$ erstmal nichts damit zu tun.

Def.: (Unterraum $^\perp(U')$)

Analog kann man zu einem Unterraum $U' \subset V'$ des Dualraums von V einen Unterraum $^\perp(U')$ des ursprünglichen Raums V definieren:

$$^\perp(U') := \{x \in V \mid f(x) = \langle x, f \rangle = 0 \text{ für alle } f \in U'\} \subset V$$

Doppeldualraum

Def.: (Doppeldualraum)

Ist V ein beliebiger Vektorraum, so hat man ja seinen Dualraum $V' = L(V, K)$ definiert. Dieser Dualraum ist nun selbst wieder ein Vektorraum, und hat daher selbst einen Dualraum – dieser heißt *Doppeldualraum* von V:

$$V'' := (V')' = L(V', K) = L(L(V, K), K)$$

Def.: (Kanonische Abbildung J)

Bei Aufgabe 29 soll man einige Eigenschaften der kanonischen Abbildung J zeigen. Diese kann wie folgt definiert werden:

$$\begin{array}{rccl} J\colon & V & \to & V'' \\ & x & \mapsto & J(x) := \_\_(x) \end{array}$$

Diese Definition ist so zu verstehen: $J(x)$ soll ja ein Element des Doppeldualraums V'' sein, also eine lineare Abbildung von V' nach K. Die Kurzschreibweise $\_\_(x)$ bezeichnet nun folgende lineare Abbildung von V' nach K:

$$\begin{array}{rccl} \_\_(x)\colon & V' & \to & K \\ & f & \mapsto & f(x) \end{array}$$

Bem.: (Grundlegende Rechenregel für J)

Direkt nach Definition gilt für alle $x \in V$, $f \in V'$:

$$(J(x))(f) = f(x),$$

oder in der Schreibweise mit spitzen Klammern:

$$\langle f, Jx \rangle = \langle x, f \rangle.$$

Bem.: (Bedeutung der kanonischen Abbildung J)

In Aufgabe 29 wird gezeigt, dass die kanonische Abbildung $J\colon V \to V''$ zumindest für den Fall, dass V endlichdimensional ist, ein Isomorphismus ist. Das ist sehr positiv aufzufassen! Denn wäre V nicht zu seinem Doppeldualraum V'' isomorph, so würde die Folge

$$V,\ V',\ V'',\ V''',\ V'''',\ldots$$

aus immer komplizierteren Vektorräumen bestehen.

Dem ist nun aber nicht so: V'' ist wieder „dasselbe“ (genauer: „isomorph“) wie V, V''' wie V', V'''' wie V'' und damit wie V, usw.