Basisergänzung

Hankes Verfahren zur Basisergänzung funktioniert wie folgt:

1. Gegeben sei eine Familie linear unabhängiger Vektoren im $\mathbb{R}^n$: $v_1, \ldots, v_r$.
2. Schreibe diese Vektoren als Zeilen in eine Matrix (diese hat dann das Layout $r \times n$).
3. Bringe mithilfe elementarer Zeilenumformungen diese Matrix auf Zeilenstufenform.
4. Wenn in der sich so ergebenden Matrix gewisse $(n - r)$ viele kanonische Einheitsvektoren so einfügbar sind, dass die Zeilenstufenform erhalten bleibt, so ergänzen diese die ursprünglich gegebene Familie zu einer Basis des $\mathbb{R}^n$.

Beispiel

Seien die Vektoren

$$v_1 := \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad v_2 := \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 5 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^5$$

gegeben. Diese schreiben wir als Zeilen in eine Matrix:

$$\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 5 & 0 & 2 \end{pmatrix},$$

Da diese Matrix schon Zeilenstufenform hat, sind keine Umformungsschritte nötig. Die Einheitsvektoren e_2, e_4, e_5 lassen sich als Zeilen einfügen, ohne dass die Zeilenstufenform verloren geht:

$$\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Also ist die Familie v_1, v_2, e_2, e_4, e_5 eine Basis des $\mathbb{R}^5$.

Hintergrund

Das Verfahren beruht auf folgender Idee: Genau dann ist die um einen Vektor ergänzte Familie

$$v_1, \ldots, v_r, e_i$$

noch linear unabhängig, wenn diejenige Matrix, die aus den als Zeilen geschriebenen Vektoren besteht, „vollen Zeilenrang hat“. Um das nachzuprüfen, würde man natürlich diese Matrix auf Zeilenstufenform bringen und sich dann überraschen lassen, ob sich eine Nullzeile ergibt. Dazu könnte man zunächst genau dieselben elementaren Zeilenumformungen verwenden, die man auch in Schritt 3 benutzt hat: Dabei würde man die neue e_i-Zeile einfach bei jedem Umformungsschritt unverändert mitschleppen.

Wenn man nun den Index i so gewählt hat, dass sich dabei [nach geeigneter Umordnung der Zeilen] eine Zeilenstufenform ergeben würde, sagt einem das Nullzeilenkriterium, dass die um e_i ergänzte Familie in der Tat linear unabhängig ist.

Hinweise

- Verwechselt man in der Verfahrensbeschreibung willkürlich Zeilen und Spalten, erhält man im Allgemeinen falsche Ergebnisse.
- Sollte man nach Schritt 3 sehen, dass die Ergänzung eines bestimmten Einheitsvektors die Zeilenstufenform zerstört, kann man daraus noch nicht schließen, dass die um diesen Einheitsvektor ergänzte Familie linear abhängig ist. Denn je nach verwendeten elementaren Zeilenumformungen erhält man eine andere Zeilenstufenform als Ergebnis!

  Ein Beispiel: Seien die Vektoren $v_1 := \left(\begin{smallmatrix}3\\0\\1\end{smallmatrix}\right), v_2 := \left(\begin{smallmatrix}0\\5\\2\end{smallmatrix}\right) \in \mathbb{R}^3$ gegeben. Die aus den als Zeilen geschriebenen Vektoren gebildete Matrix lautet dann

  $$\begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 0 & 5 & 2 \end{pmatrix},$$

  und man sieht, dass sich die Zeile

  $$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

  nicht ohne Zerstörung der Zeilenstufenform einfügen lässt. Trotzdem ist die Familie v_1, v_2, e_1 eine Basis des $\mathbb{R}^3$, wie man nach der Umformung „$\mathrm{III}' := \mathrm{III} - \frac{1}{3}\mathrm{I}$" erkennt: erkennt:

  $$\begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 0 & 5 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 0 & 5 & 2 \\ 0 & 0 & -1/3 \end{pmatrix}$$

- Eine Matrix, die keine Nullzeile enthält, hat nicht notwendigerweise vollen Zeilenrang. Ein Beispiel ist etwa die Matrix

  $$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}.$$