Cramersche Regel

Wir betrachten das äußerst kreative lineare Gleichungssystem

$$Ax = b$$

mit

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2}, \quad b = \begin{pmatrix} 5 \\ 6 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2,$$

wobei $x \in \mathbb{R}^2$ gesucht ist. Die Matrix A ist invertierbar, da ihre Determinante nicht null ist:

$$\det A = 1 \cdot 4 - 3 \cdot 2 = 4 - 6 = -2 \neq 0.$$

Deswegen ist die cramersche Regel anwendbar; wir können also sofort die eindeutige Lösung des Gleichungssystems angeben:

$$x = \frac{1}{\det A} \begin{pmatrix} \det \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 6 & 4 \end{pmatrix} \\ \\ \det \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 3 & 6 \end{pmatrix} \end{pmatrix} = \frac{1}{-2} \begin{pmatrix} 5 \cdot 4 - 6 \cdot 2 \\ 1 \cdot 6 - 3 \cdot 5 \end{pmatrix} = \frac{1}{-2} \begin{pmatrix} 8 \\ -9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ 4{,}5 \end{pmatrix}$$

Problembeispiel

Es gibt aber auch Beispiele, bei denen das Gleichungssystem zwar eine Lösung hat, aber die cramersche Regel nicht anwendbar ist: Wir betrachten

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2}, \quad b = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2.$$

Mithilfe des Gauß-Algorithmus kann man das Gleichungssystem $Ax = b$ lösen: Es stellt sich heraus, dass es sogar unendlich viele Lösungen besitzt; exemplarisch rechnen wir für eine die Probe:

$$A \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} = b.$$

Die cramersche Regel ist allerdings nicht anwendbar, da die Determinante von A null ist:

$$\det A = 1 \cdot 2 - 1 \cdot 2 = 2 - 2 = 0.$$

(Diesen Umstand hätte man auch ohne Rechnung erkennen können: Denn die Matrix A besitzt zwei gleiche Spalten und hat daher sicher nicht den vollen Rang 2. Determinanten solcher Matrizen sind null.)

Empfehlung

Für Gleichungssysteme, deren Matrix A die Größe (2×2) hat, ist die cramersche Regel eine nette Lösungsformel, mit der man ohne aufwendige Zeilenumformungen die Lösung berechnen kann.

Aber für alle größeren Gleichungssysteme ist die cramersche Regel in der Praxis keine gute Idee: Zum einen muss man hohen Rechenaufwand treiben, um die vielen vorkommenden Determinanten zu bestimmen; und falls der Problemfall $\det A = 0$ vorliegt, muss man sowieso auf den Gauß-Algorithmus ausweichen.