

## Übungsblatt 5 zu Modellkategorien

*Lokal präsentierbare Kategorien:  
 große Kategorien, die von kleinen Daten erzeugt werden.*

### Aufgabe 1. Kompakte Objekte in Modulkategorien

- a) Zeige, dass ein  $A$ -Modul  $M$  genau dann endlich erzeugt ist, wenn der Funktor  $\text{Hom}(M, \_) : \text{Mod}(A) \rightarrow \text{Set}$  mit filtrierten Kolimiten von Monomorphismen vertauscht, wenn also für jedes filtrierte Diagramm  $(V_i)_i$ , in der die Übergangsabbildungen  $V_i \rightarrow V_j$  alle injektiv sind, folgende kanonische Abbildung bijektiv ist.

$$\underset{i}{\text{colim}} \text{Hom}(M, V_i) \longrightarrow \text{Hom}(M, \underset{i}{\text{colim}} V_i)$$

- b) Zeige, dass ein  $A$ -Modul  $M$  genau dann endlich präsentiert ist, wenn der Funktor  $\text{Hom}(M, \_)$  mit beliebigen filtrierten Kolimiten vertauscht, wenn  $M$  also  $\aleph_0$ -kompakt ist.

### Aufgabe 2. Kompakte Objekte in der Kategorie der topologischen Räume

Sei  $X$  ein topologischer Raum, der eine Teilmenge  $A \subseteq X$  besitzt, die nicht offen ist. Zeige, dass  $X$  in der Kategorie der topologischen Räume nicht  $\aleph_0$ -kompakt ist.

### Aufgabe 3. Vertauschbarkeit von filtrierten Kolimiten mit endlichen Limiten

Sei  $F : \mathcal{C} \times \mathcal{D} \rightarrow \text{Set}$  ein Funktor.

- a) Konstruiere einen kanonischen Morphismus  $\psi : \underset{c \in \mathcal{C}}{\text{colim}} \underset{d \in \mathcal{D}}{\lim} F(c, d) \rightarrow \underset{d \in \mathcal{D}}{\lim} \underset{c \in \mathcal{C}}{\text{colim}} F(c, d)$ .
- b) Sei  $\mathcal{C}$  sogar eine filtrierte Kategorie und  $\mathcal{D}$  eine endliche. Zeige, dass dann  $\psi$  ein Isomorphismus ist.

Folgore: Endliche Kolimiten von  $\aleph_0$ -kompakten Objekten sind  $\aleph_0$ -kompakt.

### Aufgabe 4. Das Theorem von Whitehead für Modellkategorien

Zeige, dass ein Morphismus zwischen bifasernden Objekten in einer Modellkategorie genau dann eine Homotopieäquivalenz ist, wenn er eine schwache Äquivalenz ist.

### Aufgabe 5. Morphismen zwischen kofasernden und fasernden Objekten

- a) Seien  $X$  ein kofaserndes und  $Y$  ein faserndes Objekt in einer Modellkategorie  $\mathcal{M}$ . Zeige, dass der kanonische Morphismus  $\pi(X, Y) \rightarrow \pi(RX, QY)$  bijektiv ist.
- b) Beweise, dass in  $\text{Ho}(\mathcal{M})$  jeder Morphismus Komposition von Morphismen der Form  $\gamma(f)$  mit  $f \in \text{Mor } \mathcal{M}$  und Morphismen der Form  $\gamma(f)^{-1}$  mit  $f \in \mathcal{W}$  ist.

