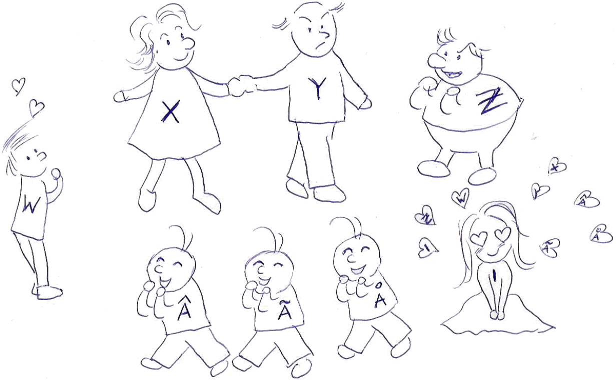
Was sind und was sollen Kategorien?



Ingo Blechschmidt

Gliederung

Produkte in Kategorien I

- Kartesisches Produkt von Mengen: $X \times Y$
- Kartesisches Produkt von Vektorräumen: $V \times W$
- Kartesisches Produkt von Gruppen: $G \times H$
- Minimum von Zahlen: $\min\{n, m\}$
- Größter gemeinsamer Teiler von Zahlen: $\mathrm{ggT}(n, m)$
- Paartyp in Programmiersprachen: `(a,b)`
- Mutterknoten zweier Knoten in einem Graph

All dies sind Spezialfälle des allgemeinen *kategoriellen Produkts*.

Produkte in Kategorien II

$$X \times (Y \times Z) \cong (X \times Y) \times Z$$
$$U \times (V \times W) \cong (U \times V) \times W$$
$$\min\{m, \min\{n, p\}\} = \min\{\min\{m, n\}, p\}$$
$$\operatorname{ggT}(m, \operatorname{ggT}(n, p)) = \operatorname{ggT}(\operatorname{ggT}(m, n), p)$$

All dies sind Spezialfälle der allgemeinen *Assoziativität* des kategoriellen Produkts.

Isomorphismen in Kategorien

- Zwei Mengen X, Y können gleichmächtig sein.
- Zwei Vektorräume V, W können isomorph sein.
- Zwei Gruppen G, H können isomorph sein.
- Zwei top. Räume X, Y können homöomorph sein.
- Zwei Zahlen n, m können gleich sein.
- Zwei Typen `a`, `b` können sich verlustfrei ineinander umwandeln lassen.

All dies sind Spezialfälle des allgemeinen *kategoriellen Isomorphiekonzepts*.

Dualität

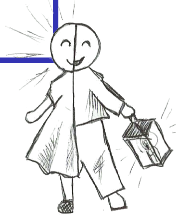
$f \circ g$	$g \circ f$
$\leq$	$\geq$
injektiv	surjektiv
$\{\star\}$	$\emptyset$
$\times$	$\amalg$
ggT	kgV
$\cap$	$\cup$
Teilmenge	Faktormenge

All dies sind Spezialfälle eines allgemeinen *kategoriellen Dualitätsprinzips*.

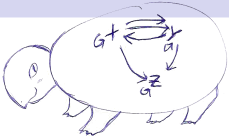
Dualität

`(a,b)`	`Either a b`
Typ der Streams	Typ der endlichen Listen
Monaden	Komonaden
Rechts-Kan-Erweiterung	Links-Kan-Erweiterung

All dies sind Spezialfälle eines allgemeinen *kategoriellen Dualitätsprinzips*.



Kategorien



Definition: Eine Kategorie $\mathcal{C}$ besteht aus

1. einer Klasse von *Objekten* $\operatorname{Ob}\mathcal{C}$,
2. zu je zwei Objekten $X, Y \in \operatorname{Ob}\mathcal{C}$ einer Klasse $\operatorname{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y)$ von *Morphismen* zwischen ihnen und
3. einer Kompositionsvorschrift:

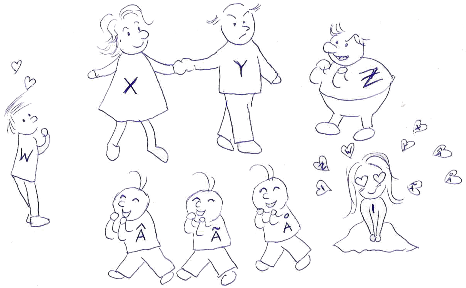
$$\begin{array}{rlcrl} \text{zu} & f \in \operatorname{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y) & \qquad & \text{zu} & f : X \to Y \\ \text{und} & g \in \operatorname{Hom}_{\mathcal{C}}(Y, Z) & & \text{und} & g : Y \to Z \\ \text{habe} & g \circ f \in \operatorname{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Z), & & \text{habe} & g \circ f : X \to Z, \end{array}$$

sodass

1. die Komposition $\circ$ assoziativ ist: $f \circ (g \circ h) = (f \circ g) \circ h$, und
2. es zu jedem $X \in \operatorname{Ob}\mathcal{C}$ einen Morphismus $\mathrm{id}_X \in \operatorname{Hom}_{\mathcal{C}}(X, X)$ mit $f \circ \mathrm{id}_X = f$ und $\mathrm{id}_X \circ g = g$.

Fundamentales Motto

Kategorientheorie stellt *Beziehungen zwischen Objekten* statt etwaiger innerer Struktur in den Vordergrund.



Initiale und terminale Objekte

Definition: Ein Objekt X einer Kategorie $\mathcal{C}$ heißt genau dann

- *initial*, wenn
$$\forall Y \in \operatorname{Ob} \mathcal{C}\colon \exists! f : X \to Y.$$
- *terminal*, wenn
$$\forall Y \in \operatorname{Ob} \mathcal{C}\colon \exists! f : Y \to X.$$

Frage: Was ist ein terminales Objekt in Set?

Initiale und terminale Objekte

Definition: Ein Objekt X einer Kategorie $\mathcal{C}$ heißt genau dann

- *initial*, wenn

$$\forall Y \in \operatorname{Ob} \mathcal{C} \colon \exists! f : X \to Y.$$

- *terminal*, wenn

$$\forall Y \in \operatorname{Ob} \mathcal{C} \colon \exists! f : Y \to X.$$

In Set: $\emptyset$ initial, $\{\star\}$ terminal.

In $\mathbb{R}-$Vect: $\mathbb{R}^0$ initial und terminal.

Mono- und Epimorphismen

Definition: Ein Morphismus $f : X \to Y$ einer Kategorie $\mathcal{C}$ heißt genau dann

- *Monomorphismus*, wenn für alle Objekte $A \in \operatorname{Ob} \mathcal{C}$ und $p, q : A \to X$ gilt:

$$f \circ p = f \circ q \quad \Longrightarrow \quad p = q.$$

- *Epimorphismus*, wenn für alle Objekte $A \in \operatorname{Ob} \mathcal{C}$ und $p, q : Y \to A$ gilt:

$$p \circ f = q \circ f \quad \Longrightarrow \quad p = q.$$

Beobachtung in Set, Grp und $\mathbb{R}-$Vect:

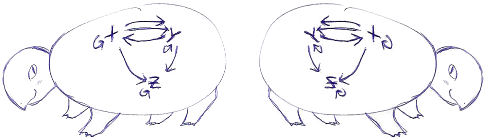
$$f \text{ Mono} \Longleftrightarrow f \text{ injektiv.}$$
$$f \text{ Epi} \Longleftrightarrow f \text{ surjektiv.}$$

Duale Kategorie

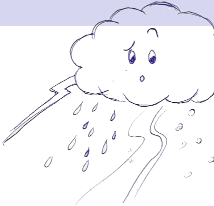
- **Definition:** Zu jeder Kategorie $\mathcal{C}$ gibt es eine zugehörige *duale Kategorie* $\mathcal{C}^{\mathrm{op}}$:

$$\operatorname{Ob} \mathcal{C}^{\mathrm{op}} := \operatorname{Ob} \mathcal{C}$$
$$\operatorname{Hom}_{\mathcal{C}^{\mathrm{op}}}(X, Y) := \operatorname{Hom}_{\mathcal{C}}(Y, X)$$

- **Beispiel:** X in $\mathcal{C}^{\mathrm{op}}$ initial $\iff$ X in $\mathcal{C}$ terminal
- **Beispiel:** f in $\mathcal{C}^{\mathrm{op}}$ Mono $\iff$ f in $\mathcal{C}$ Epi
- **Nichttriviale Frage:** Wie kann man in konkreten Fällen $\mathcal{C}^{\mathrm{op}}$ explizit (inhaltlich) beschreiben?



Anwendungen



- Kategorientheorie liefert einen Leitfaden, um richtige Definitionen zu formulieren.
- Triviales wird *trivialerweise* trivial: Allgemeiner abstrakter Nonsens.
- Konzeptionelle Vereinheitlichung: Viele Konstruktionen in der Mathematik sind Spezialfälle von allgemeinen kategoriellen: Limiten, Kolimiten, adjungierte Funktoren
- Forschungsprogramm der Kategorifizierung, um tiefere Gründe für Altbekanntes zu finden.