



Universität Augsburg
Mathematisch-Naturwissenschaftliche
Fakultät

Klassische Dynamik eines harmonisch gekoppelten Systems in Gegenwart von Wänden

Bachelorarbeit
zur Erlangung des Bachelorgrades
B.Sc.
der Mathematisch-Naturwissenschaftlichen Fakultät
der Universität Augsburg

vorgelegt von
Michael Hartmann



Institut für Physik
Lehrstuhl für Theoretische Physik I
Prof. Dr. Gert-Ludwig Ingold

17. November 2011

Inhaltsverzeichnis

1. Einleitung	1
2. Caldeira-Leggett-Modell	3
3. Bewegungsgleichungen	6
3.1. Skalierung der Hamiltonfunktion	6
3.2. Eigenschaften der Hamiltonfunktion	7
3.3. Lösung der Bewegungsgleichungen	9
3.4. Einschränken der Geometrie durch Einführen von Wänden	10
3.5. Numerische Bestimmung der Wandkontakte	13
4. Phasenraum und Poincaré-Abbildung für $\alpha = 0$	15
5. Chaos in hamiltonschen Systemen	18
5.1. Liouville-Theorem	18
5.2. Fixpunkte symplektischer Abbildungen	19
5.3. Integrabilität von Hamiltonfunktionen	20
5.4. Poincaré-Birkhoff-Theorem	22
5.5. Stabile und instabile Mannigfaltigkeiten	24
6. Periodische Orbits	26
6.1. Arten von Fixpunkten	26
6.2. Fixpunkte höherer Periode	27
6.3. Familien periodischer Orbits	29
6.4. Stabilität von Fixpunkten	31
7. Fixpunkte 1. Art	33
7.1. Bedingungen	33
7.2. Nullstelle t_1 von $p_x(t)$	34
7.3. Nullstelle t_2 von $p_x(t)$	35
7.4. Symmetrien	37
8. Bifurkationen und Bifurkationsdiagramme	39
9. Numerische Beispiele	43
9.1. $E = 1$	43
9.2. $E = 0.0253$	46

10. Zusammenfassung und Ausblick	50
A. Quelltexte und verwendete Software	52

Kapitel 1.

Einleitung

Dissipation ist ein verbreitetes Phänomen in der Physik und entsteht durch die Ankopplung eines Systems an eine Umgebung mit einer großen Anzahl an Freiheitsgraden. In der klassischen Mechanik werden Reibungseffekte phänomenologisch beschrieben, indem in die Bewegungsgleichungen eine geschwindigkeitsabhängige Kraft eingeführt wird, die der Bewegung entgegenwirkt. In der Quantenmechanik ist diese Vorgehensweise nicht möglich, aber es existieren verschiedene Ansätze, um dissipative Systeme zu beschreiben. Einer dieser Ansätze ist das Caldeira-Leggett-Modell, das das System an ein Bad aus harmonischen Oszillatoren koppelt. Durch die Kopplung kann Energie zwischen System und Bad ausgetauscht werden. Ist die Anzahl der Badoszillatoren groß, fließt Energie über einen langen Zeitraum hauptsächlich vom System ins Bad. Für ein gedämpftes freies Teilchen und N Badoszillatoren ist das Caldeira-Leggett-Modell schematisch in der Abbildung 1.1 gezeigt.

In dieser Arbeit wird ein gedämpftes freies Teilchen untersucht, das durch das Einführen von Wänden auf ein endliches Gebiet beschränkt wird. Aus dem Caldeira-Leggett-Modell erhält man nach Reduktion auf einen einzigen Badoszillator die Hamiltonfunktion für ein freies gedämpftes Teilchen. Nach einer geeigneten Skalierung, durch die die Hamiltonfunktion vereinfacht werden kann, können die Bewegungsgleichungen analytisch gelöst und der Phasenraum durch Poincaré-Schnitte untersucht werden. Insbesondere werden Form und Stabilität periodischer Orbits näher untersucht werden, die essentiell zum Verständnis des Systems sind. Eine Untersuchung der Fixpunkte zeigt, dass die meisten Fixpunkte durch senkrechte Reflexion der Trajektorie an beiden Wänden entstehen. Dadurch lassen sich Lage der Fixpunkte berechnen und Bifurkationsdiagramme in Abhängigkeit von der Kopplung oder der Energie erzeugen, die einen detaillierten Einblick in das Verhalten des Systems geben. Mit diesen Ergebnissen lässt sich das System dann prinzipiell in semiklassischer Näherung untersuchen.

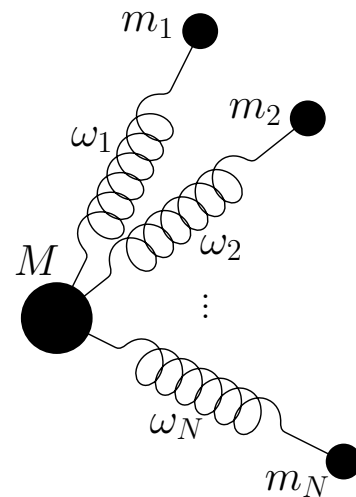


Abbildung 1.1.: Das Caldeira-Leggett-Modell für ein freies Teilchen der Masse M mit N angekoppelten Badoszillatoren. (nach [4])

In Kapitel 2 wird das Caldeira-Leggett-Modell vorgestellt und eine Hamiltonfunktion für das freie gedämpfte Teilchen erhalten. Durch eine geeignete Skalierung wird in Kapitel 3 die Bewegungsgleichungen für die Hamiltonfunktion gelöst, anschließend die Geometrie des Systems durch Einführen von Wänden begrenzt und der Begriff des Poincaré-Schnitts eingeführt. Durch Poincaré-Schnitte kann das System auf ein zweidimensionales System verringert und daher gut visualisiert werden. Durch das Einführen der Wände wird das System stückweise linear und kann wie nichtlineare dynamische Systeme chaotisches Verhalten zeigen. Die Poincaré-Schnitte bestehen im Allgemeinen aus regulären und chaotischen Bereichen. In Kapitel 4 wird der Spezialfall des entkoppelten Systems betrachtet. Einige der Ergebnisse des entkoppelten Systems werden in späteren Kapiteln wieder aufgegriffen. In Kapitel 5 werden grundlegende Eigenschaften chaotischer hamiltonscher Systeme vorgestellt. Insbesondere werden das Liouville-Theorem und das Poincaré-Birkhoff-Theorem vorgestellt, und die unterschiedlichen Arten von Fixpunkten diskutiert. Form und Stabilität der periodischen Orbits werden in Kapitel 6 qualitativ untersucht. Dabei zeigt sich, dass man die Fixpunkten in drei Arten unterscheiden kann. Für die wichtigste Fixpunktart wird in Kapitel 7 die Lage in Abhängigkeit von Energie und Kopplung berechnet. Mit diesen Rechnungen können in Kapitel 8 Bifurkationsdiagramme für diese Fixpunkte erstellt werden, die Lage, Anzahl und Stabilität der Fixpunkte des System in Abhängigkeit von Energie und Kopplung zusammenfassen. In Kapitel 9 werden die erarbeiteten Ergebnisse an zwei numerischen Beispielen verdeutlicht.

In der Diplomarbeit von S. Fiedler [4] wird u. a. auch das freie gedämpfte Teilchen mit Wänden untersucht. Während die Arbeit von Fiedler allerdings das System für kleine Kopplungswerte durch Störungsrechnungen beschreibt, liegt der Schwerpunkt dieser Arbeit in der Beschreibung periodischer Orbits. Beide Arbeiten stellen daher eine Ergänzung dar.

Kapitel 2.

Caldeira-Leggett-Modell

In diesem Kapitel wird das Caldeira-Leggett-Modell [3] vorgestellt, um daraus eine Hamiltonfunktion für ein freies gedämpftes Teilchen zu erhalten. Das Kapitel soll die Herkunft der Hamiltonfunktion motivieren, die in den folgenden Kapiteln der Arbeit untersucht wird. Daher sind die Ausführungen über das Caldeira-Leggett-Modell sehr kurz gehalten, weiterführende Literatur bieten die Arbeiten von A. O. Caldeira und A. J. Leggett [3] oder G.-L. Ingold [6], sowie das Buch von U. Weiss [11].

In vielen Situationen ist es nicht möglich, ein System als isoliert von der Umgebung zu beschreiben. Ankopplungen an andere Freiheitsgrade führen zu Dissipation, so dass Energie irreversibel vom System an die Umgebung abgegeben wird. In der klassischen Mechanik führt man zur Beschreibung von Reibungseffekten phänomenologisch eine geschwindigkeitsabhängige Kraft in die Bewegungsgleichung ein, die der Bewegung entgegenwirkt. Dieses Vorgehen lässt sich aber nicht auf die Quantenmechanik übertragen, weil die Energie für zeitunabhängige Hamiltonfunktionen eine Erhaltungsgröße ist. Hamiltonfunktionen mit expliziter Zeitabhängigkeit führen dagegen zu Problemen mit der Unschärferelation [11].

Eine Möglichkeit dieses Problem zu umgehen bietet das Caldeira-Leggett-Modell. Die Idee des Modells ist, zusätzlich zum eigentlichen System die Umgebung in der Hamiltonfunktion zu beschreiben. Die Energie des Gesamtsystems bleibt somit erhalten und Energie kann zwischen System und Umgebung ausgetauscht werden. Das Modell koppelt das System S mit Impuls p_q , Masse M und Potential $V(q)$ an ein Bad B, das aus harmonischen Oszillatoren besteht, die durch Orte x_i , Impulse p_i und Frequenzen ω_i beschrieben werden. Stört das System das Bad nur schwach, kann die Kopplung durch einen bilinearen Term mit Kopplungsstärken c_i beschrieben werden. Trotz schwacher Kopplung muss der Effekt der Dissipation nicht klein sein, wenn die Anzahl der angekoppelten harmonischen Oszillatoren groß ist.

Somit ergibt sich die Hamiltonfunktion

$$H = H_S + H_B + H_{SB}, \quad (2.1)$$

bestehend aus der Hamiltonfunktion des Systems

$$H_S = \frac{p_q^2}{2M} + V(q), \quad (2.2)$$

der Hamiltonfunktion des Bads

$$H_B = \sum_{i=1}^N \left(\frac{p_i^2}{2m_i} + \frac{m_i \omega_i^2}{2} x_i^2 \right) \quad (2.3)$$

und dem Kopplungsterm

$$H_{SB} = -q \sum_{i=1}^N c_i x_i. \quad (2.4)$$

Der Term (2.4) führt zu einer Renormierung des Potentials, so dass die Kopplung vom Ort q des Systemteilchens abhängt. Das Potentialminimum des Gesamtsystems bei gegebenem q liegt bei

$$x_i = \frac{c_i q}{m_i \omega_i^2}. \quad (2.5)$$

Eliminiert man alle x_i durch Einsetzen von (2.5) in (2.1), erhält man das effektive Potential

$$V_{\text{eff}}(q) = V(q) - \sum_{i=1}^N \frac{c_i^2}{2m_i \omega_i^2} q^2 = V(q) - \sum_{i=1}^N \frac{M}{2} (\Delta \omega_i)^2 q^2, \quad (2.6)$$

welches das System für kleine Abweichungen vom Potentialminimum beschreibt. Der Kopplungsterm (2.4) führt also zu einer Frequenzverschiebung des Systems S um

$$(\Delta \omega)^2 = - \sum_{i=1}^N (\Delta \omega_i)^2 = - \sum_{i=1}^N \frac{c_i^2}{M m_i \omega_i^2} < 0 \quad (2.7)$$

für kleine Oszillationen um das Minimum. Die Potentialrenormierung kann zu großen quantitativen Unterschieden führen und für $\omega_{\text{eff}}^2 = \omega_0^2 + (\Delta \omega)^2 < 0$ das Potential sogar qualitativ ändern.

Um den Effekt der Potentialrenormierung zu beseitigen, ergänzt man (2.4) um einen Term, der die Abweichung von $V(q)$ in (2.6) kompensiert. Die Hamiltonfunktion lautet dann

$$H = \frac{p_q^2}{2M} + V(q) + \sum_{i=1}^N \left(\frac{p_i^2}{2m_i} + \frac{m_i \omega_i^2}{2} x_i^2 \right) - q \sum_{i=1}^N c_i x_i + q^2 \sum_{i=1}^N \frac{c_i^2}{2m_i \omega_i^2}. \quad (2.8)$$

Damit Energie (langfristig) nur vom System ins Bad fließt, muss die Anzahl der Badoszillatoren unendlich groß werden. Für eine endliche Anzahl an Badoszillatoren fließt Energie nach endlicher Zeit wieder vom Bad zurück ins System, wobei die Wiederkehrzeit bereits für wenige Badoszillatoren sehr groß sein kann [11].

Das Ziel dieser Arbeit ist die Beschreibung eines freien gedämpften Teilchens in einer Box. Zunächst wird aber ein freies Teilchen betrachtet, das über die Kopplungskonstante c an einen einzigen Badoszillator mit Masse m , Ort x , Impuls p_x und Frequenz ω_x gekoppelt ist. Aus (2.8) ergibt sich mit $N = 1$

und $V(q) = 0$ die Hamiltonfunktion

$$H = \frac{p_q^2}{2M} + \frac{p_x^2}{2m} + \frac{m}{2} \omega_x^2 x^2 - cxq + \frac{c^2}{2m\omega_x^2} q^2. \quad (2.9)$$

In Kapitel 3.4 werden die Wände eingeführt und das Teilchen in eine Box eingesperrt.

Wählt man als Kopplungskonstante $c = m\omega_x^2$, kann man zeigen, dass die Hamiltonfunktion (2.9) translationsinvariant ist. Die Hamiltonfunktion (2.9) nimmt dann die Form

$$H = \frac{p_q^2}{2M} + \frac{p_x^2}{2m} + \frac{m\omega_x^2}{2} (q - x)^2 \quad (2.10)$$

an. Ohne den letzten Term aus (2.8), der den Effekt der Potentialrenormierung beseitigt, wäre die Hamiltonfunktion (2.10) nicht translationsinvariant.

Kapitel 3.

Bewegungsgleichungen

Im letzten Kapitel wurde die Hamiltonfunktion (2.9) für das freie Teilchen gekoppelt an einen harmonischen Oszillator aus dem Caldeira-Leggett-Modell erhalten. In diesem Kapitel wird nun die Hamiltonfunktion (2.9) skaliert, um die Funktion zu vereinfachen, Eigenschaften der skalierten Hamiltonfunktion diskutiert und die Bewegungsgleichungen gelöst. Anschließend wird die Geometrie des Systems durch Einführen von Wänden beschränkt und der Begriff des Poincaré-Schnitts eingeführt.

3.1. Skalierung der Hamiltonfunktion

In diesem Abschnitt soll die Hamiltonfunktion (2.9) skaliert werden. Ziel der Skalierung ist es, die anschließenden Rechnungen zu vereinfachen, die Anzahl der Parameter, von denen (2.9) abhängt, zu reduzieren und (2.9) in eine dimensionslose Form zu bringen, um die Bewegungsgleichungen numerisch auswerten zu können.

Einen Ausgangspunkt bietet die übliche Skalierung der Erzeugungs- und Vernichtungsoperatoren des quantenmechanischen harmonischen Oszillators für $\hbar = 1$. Angewandt auf (2.9) ergibt sich folgende Skalierung:

$$\tilde{q} = \sqrt{M\omega_x}q \quad \tilde{x} = \sqrt{m\omega_x}x \quad \tilde{p}_q = \frac{p_q}{\sqrt{M\omega_x}} \quad \tilde{p}_x = \frac{p_x}{\sqrt{m\omega_x}} \quad (3.1)$$

Die Poisson-Klammern für Orts- und Impulskoordinaten gelten auch für die neuen Koordinaten, die Transformation (3.1) ist also kanonisch.

Weiter ist es sinnvoll die Hamiltonfunktion

$$\tilde{H} = \frac{H}{\omega_x} \quad (3.2)$$

zu skalieren, was zu einer Skalierung der Zeit

$$\tilde{t} = \omega_x t \quad (3.3)$$

führt, damit die hamiltonschen Bewegungsgleichungen erfüllt bleiben.

Setzt man die Skalierungen (3.1) und (3.2) in (2.9) ein, so ergibt sich schließlich

$$\tilde{H} = \frac{1}{2}\tilde{p}_q^2 + \frac{1}{2}\tilde{p}_x^2 + \frac{1}{2}\frac{c^2}{\omega_x^4 M m}\tilde{q}^2 + \frac{1}{2}\tilde{x}^2 - \sqrt{\frac{c^2}{\omega_x^4 M m}}\tilde{x}\tilde{q}, \quad (3.4)$$

was sich durch Einführen der Abkürzung

$$\alpha = \sqrt{\frac{c^2}{\omega_x^4 M m}} \quad (3.5)$$

weiter vereinfachen lässt. Für den in Kapitel 2 vorgestellten Fall $c = m\omega_x^2$ hängt die Kopplung $\alpha = \sqrt{m/M}$ nur von den Massen der beiden Teilchen ab. Die Funktion (3.4) hängt nur noch von den Orten q, x , den Impulsen p_q, p_x und dem dimensionslosen Parameter α ab. Da in allen folgenden Kapiteln diese Skalierung verwendet wird, werden die Tilden im Folgenden weggelassen, so dass sich schließlich die skalierte Hamiltonfunktion

$$H = \frac{1}{2}p_q^2 + \frac{1}{2}p_x^2 + \frac{1}{2}\alpha^2 q^2 + \frac{1}{2}x^2 - \alpha xq \quad (3.6)$$

ergibt.

3.2. Eigenschaften der Hamiltonfunktion

Zunächst werden allgemeine Eigenschaften der Hamiltonfunktion (3.6) diskutiert. In einem späteren Abschnitt wird dann die Geometrie des Systems durch Einführen von Wänden beschränkt. Durch die Wände wird das System auch einige der Eigenschaften verlieren, die in diesem Abschnitt vorgestellt werden.

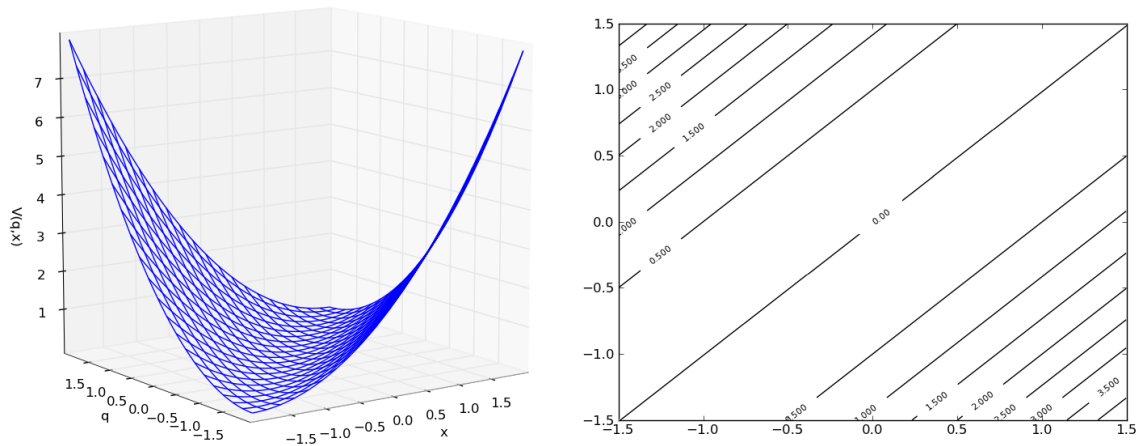


Abbildung 3.1.: Links ist das Potential (3.7) mit Gitterlinien, rechts im Höhenlinienplot für den Wert $\alpha = 1$ abgebildet.

Gleichung (3.6) lässt auch die Interpretation eines Teilchens zu, das sich im zweidimensionalen Potential

$$V(x, q) = \frac{1}{2}\alpha^2 q^2 + \frac{1}{2}x^2 - \alpha x q = \frac{1}{2}(\alpha q - x)^2 \quad (3.7)$$

bewegt. In Abbildung 3.1 ist das Potential für den Wert $\alpha = 1$ dargestellt.

Das Potential (3.7) ist eine homogene Funktion der Koordinaten [12], das heißt es erfüllt die Bedingung

$$V(\lambda q, \lambda x) = \lambda^n V(q, x) \quad (3.8)$$

mit dem Grad der Homogenität $n = 2$. Für homogene Potentiale lässt sich der Virialsatz herleiten, der eine Beziehung zwischen dem zeitlichen Mittelwert der potentiellen und kinetischen Energie herstellt. Für den Grad $n = 2$ gilt $\bar{T} = \bar{V}$, kinetische und potentielle Energie sind also im zeitlichen Mittel gleich.

Eine Transformation, die die Koordinaten und die Zeit mit konstanten Faktoren

$$\tilde{q} = \lambda q \quad \tilde{x} = \lambda x \quad \tilde{t} = \mu t \quad (3.9)$$

skaliert, wird Skalentransformation genannt. Bei homogenen Potentialen bleiben die Bewegungsgleichungen unter einer Skalentransformation invariant, falls

$$\mu^2 = \lambda^{2-n} \quad (3.10)$$

gilt. Für den hier vorliegenden Fall $n = 2$ bleibt die Skalierung der Zeit konstant, da $\mu^2 = 1$. Die Bahnkurve $(q(t), x(t))$ wird abgebildet auf eine Bahnkurve $(\tilde{q}(t), \tilde{x}(t))$ mit

$$\tilde{q}(t) = \lambda q(t) \quad \tilde{x}(t) = \lambda x(t). \quad (3.11)$$

Höhere Energien führen also zu einer Umskalierung im Phasenraum, das System ändert aber qualitativ nicht sein Verhalten.

Zuletzt sollen noch Erhaltungsgrößen des Systems diskutiert werden. Da die skalierte Hamiltonfunktion (3.6) nicht explizit von der Zeit t abhängt, ist die Hamiltonfunktion eine Konstante der Bewegung, die der Energie des Systems entspricht. Außerdem bleibt das Potential (3.7) konstant bei Verschiebungen in Richtung der Äquipotentiallinien $\mathbf{r} = \alpha x + q$. Daher ist der Impuls des Teilchens entlang des Vektors \mathbf{r} unabhängig von der Zeit und

$$P = \alpha p_x + p_q \quad (3.12)$$

eine weitere Konstante der Bewegung. Die Poisson-Klammer beider Erhaltungsgrößen ergibt Null, die Konstanten der Bewegung sind also unabhängig und in Involution. Zwei oder mehr Erhaltungsgrößen sind in Involution, wenn die Poisson-Klammer für beliebige zwei Erhaltungsgrößen Null ergibt. Das System ist integrabel, weil es konservativ ist und bei einem vierdimensionalen Phasenraum zwei Kon-

stanten der Bewegung besitzt [9]. Von den vier Zustandsvariablen q, x, p_q, p_x des Phasenraums sind noch zwei unabhängig. Die Zustände liegen also auf einer zweidimensionalen Hyperfläche im vierdimensionalen Phasenraum.

3.3. Lösung der Bewegungsgleichungen

Aus der Hamiltonfunktion (3.6) ergibt sich ein System aus vier gekoppelten linearen Differentialgleichungen

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} q \\ x \\ p_q \\ p_x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial H}{\partial p_q} \\ \frac{\partial H}{\partial p_x} \\ -\frac{\partial H}{\partial q} \\ -\frac{\partial H}{\partial x} \end{pmatrix}, \quad (3.13)$$

das sich auch in Form von

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} q \\ x \\ p_q \\ p_x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -\alpha^2 & \alpha & 0 & 0 \\ \alpha & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q \\ x \\ p_q \\ p_x \end{pmatrix} \quad (3.14)$$

schreiben lässt. Aus der Herleitung von (3.6) ist klar, dass die Lösungen der Bewegungsgleichungen aus einem linearen Teil, der die freie Bewegung beschreibt, und einem oszillierenden Anteil besteht, der dem harmonischen Oszillator zugeordnet werden kann. Die Eigenvektoren der Matrix in Gleichung (3.14) bilden eine Basis, in der die Koordinatenachsen mit den Hauptachsen zusammenfallen, so dass der Kopplungsterm verschwindet.

Die Berechnung der Eigenwerte der Matrix ergibt $\pm i\omega$ mit

$$\omega = \sqrt{1 + \alpha^2}, \quad (3.15)$$

und einen zweifach entarteten Eigenwert Null. Die Eigenwerte $\pm i\omega$ führen – wie bereits überlegt – zu einer Oszillation mit der Frequenz ω , die nur von der Kopplungsstärke α abhängt. Der zweifach entartete Eigenwert Null ergibt den linearen Term, welcher der freien Bewegung entspricht.

Mit den Anfangsbedingungen $q(0), x(0), p_q(0), p_x(0)$ und den Abkürzungen

$$\begin{aligned} d_0 &= q(0) + \alpha x(0) \\ d_1 &= p_q(0) + \alpha p_x(0) \\ e_0 &= x(0) - \alpha q(0) \\ e_1 &= p_x(0) - \alpha p_q(0) \end{aligned} \quad (3.16)$$

erhält man schließlich

$$\begin{pmatrix} q \\ x \\ p_q \\ p_x \end{pmatrix} = \frac{1}{\omega^2} \left[\begin{pmatrix} -\frac{\alpha}{\omega} e_1 \\ \frac{e_1}{\omega} \\ \alpha \omega e_0 \\ -\omega e_0 \end{pmatrix} \sin \omega t + \begin{pmatrix} -\alpha e_0 \\ e_0 \\ -\alpha e_1 \\ e_1 \end{pmatrix} \cos \omega t + \begin{pmatrix} d_1 \\ \alpha d_1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} t + \begin{pmatrix} d_0 \\ \alpha d_0 \\ d_1 \\ \alpha d_1 \end{pmatrix} \right] \quad (3.17)$$

als Lösungen der Bewegungsgleichungen. Für Anfangsbedingungen $d_1 \neq 0$ ist die Bewegung nicht auf einen endlichen Bereich beschränkt, das Teilchen bewegt sich abhängig vom Vorzeichen von d_1 nach $q, x \rightarrow \pm\infty$.

3.4. Einschränken der Geometrie durch Einführen von Wänden

Um die Bewegung auf einen endlichen Bereich einzuschränken, wird nun die Geometrie des Systems durch das Einführen von Wänden beschränkt und die Auswirkungen auf das System diskutiert. Außerdem wird gezeigt, dass eine unterschiedliche Wahl für den Ort der Wände nur zu Umskalierungen und Verschiebungen im Phasenraum führt, das Verhalten des Systems qualitativ aber nicht beeinflusst.

Ohne Beschränkung der Allgemeinheit befinde sich eine Wand bei $q = 0$, die andere bei $q = 1$. Zwischen zwei Wandkontakten ist die Bewegung durch (3.17) gegeben, bei einem Wandkontakt müssen für die Bewegungsgleichungen neue Anfangsbedingungen berechnet werden. Die Anfangsbedingungen entsprechen dem Zustand $q, x, -p_q, p_x$ zum Zeitpunkt des Wandkontaktes, wobei der Systemimpuls p_q gespiegelt wurde. Der Zeitpunkt des Wandkontakts muss numerisch bestimmt werden, weil die Gleichungen $q(t) = 0$ und $q(t) = 1$ nicht analytisch lösbar sind. Das Einführen der Wände führt zu einem stückweise linearen System. Wie nichtlineare Systeme können stückweise lineare Systeme chaotisches Verhalten aufweisen [5].

Durch das Einführen der Wände ändert sich nun das Verhalten bei Skalentransformationen. Die Hamiltonfunktion mit Wänden wird durch

$$H = \frac{1}{2} p_q^2 + \frac{1}{2} p_x^2 + \frac{1}{2} \alpha^2 q^2 + \frac{1}{2} x^2 - \alpha x q + \lim_{n \rightarrow \infty} (2q - 1)^{2n} \quad (3.18)$$

beliebig genau dargestellt. Der letzte Term in Gleichung (3.18) entspricht dem Beitrag der Wände und ist Null innerhalb der Wände und unendlich außerhalb. Transformiert man die Hamiltonfunktion (3.18) nach (3.9), ergibt sich

$$\tilde{H} = \frac{1}{2} \tilde{p}_q^2 + \frac{1}{2} \tilde{p}_x^2 + \frac{1}{2} \alpha^2 \tilde{q}^2 + \frac{1}{2} \tilde{x}^2 - \alpha \tilde{x} \tilde{q} + \lim_{n \rightarrow \infty} \left(2 \frac{\tilde{q}}{\lambda} - 1 \right)^{2n}. \quad (3.19)$$

Durch die Transformation wird die Position der zweiten Wand von $q = 1$ zu $\tilde{q} = 1/\lambda$ in den neuen Koordinaten verschoben. Anders als im Fall ohne Wände ändert sich hier qualitativ das Verhalten des Systems. Effektiv rücken bei höheren Energien die Wände näher zusammen. Dies ist vergleichbar mit dem quantenmechanischen Potentialtopf, bei dem die Eigenenergien des Systems vom Abstand der Wände abhängen. Verkleinert man den Abstand der Wände, verengt also den Potentialtopf, erhöhen

sich die Eigenenergien. Es ist also unerheblich, ob man die Energie konstant hält und den Abstand der Wände variiert oder umgekehrt. Erhöht man die Energie um den Faktor λ^2 und wählt für die zweite Wand statt $q = 1$ den Ort $q = 1/\lambda$, bleibt das Verhalten des Systems qualitativ gleich. Wie bei Skalentransformationen im System ohne Wände führt diese Transformation nur zu einer Umskalierung im Phasenraum. In den folgenden Kapiteln wird der Abstand der Wände konstant gehalten und das System für unterschiedliche Werte von α und E untersucht.

Eine weitere Konsequenz ist, dass der Virialsatz nach Einführen der Wände nicht mehr anwendbar ist, also die zeitlich gemittelte kinetische und potentielle Energie nicht mehr gleich sind. Numerisch zeigt sich, dass die mittlere kinetische Energie fast immer groer als die mittlere potentielle Energie ist. Besonders bei hohen Energien ist die kinetische Energie deutlich groer als die potentielle.

Die Transformation

$$\tilde{q} = q + \Delta q \quad \tilde{x} = x \quad \tilde{p}_q = p_q \quad \tilde{p}_x = p_x \quad (3.20)$$

verschiebt die Wände bei konstantem Abstand um Δq . Angewendet auf (3.20) erhält man die Hamiltonfunktion

$$H = \frac{1}{2} \tilde{p}_q^2 + \frac{1}{2} \tilde{p}_x^2 + (\alpha \tilde{q} - (x + \alpha \Delta q))^2 + \lim_{n \rightarrow \infty} (2\tilde{q} - 2\Delta q - 1)^{2n}. \quad (3.21)$$

Ein Vergleich von (3.21) mit (3.18) zeigt, dass das Verschieben der Wände nur eine Verschiebung der x -Koordinate bewirkt. Physikalisch ist dieses Ergebnis einsichtig: Das Potential 3.7 entspricht anschaulich einer Art Rinne, das durch den Parameter α in der q - x -Ebene gedreht wird. Durch die Wände wird das Teilchen in einen Unterraum des Phasenraums eingesperrt. Zum einen kann es den Bereich zwischen den Wänden nicht verlassen, zum anderen ist es durch die Energieerhaltung auf einen Bereich um das Potentialminimum beschränkt. Verschiebt man die Wände bei konstantem Abstand, ist das Teilchen zwar in einem anderen Teil des Phasenraums eingesperrt, das Potential (also die Rinne) sieht aber für das Teilchen in beiden Gebieten gleich aus. Die Verschiebung der Wände bewirkt also nur eine Verschiebung der q - und x -Koordinaten.

Außerdem wird durch die Wände die Konstante der Bewegung (3.12) zerstört, weil bei einem Wandkontakt nur p_q gespiegelt wird. Die ursprüngliche Konstante der Bewegung (3.12) bleibt zwar weiterhin zwischen zwei Wandkontakten konstant, springt aber bei jedem Wandkontakt. Eine Ausnahme ist der Fall $\alpha = 0$, bei dem zumindest der Betrag von (3.12) auch nach Wandkontakten erhalten bleibt. Da die Energie weiter erhalten ist, liegen die Zustände nun auf einer dreidimensionalen Hyperfläche im vierdimensionalen Phasenraum.

Da eine dreidimensionale Bewegung nur schwer darstellbar ist, wird die Dimension des Problems durch einen Poincaré-Schnitt um eine Dimension reduziert. Dazu betrachtet man eine Hyperfläche Σ des Phasenraums, die von zwei Phasenraumvektoren aufgespannt wird. Durchstot die Trajektorie die Hyperfläche Σ , wird ein Punkt auf der Fläche markiert. Diese Durchstoßpunkte werden als P_0, P_1, P_2, \dots bezeichnet. Im Poincaré-Schnitt betrachtet man also nur Zustände, die auf der Hyperebene Σ

liegen. Interpretiert man jeden Punkt P_{i+1} als Bild seines Vorgängers P_i

$$P_{i+1} = \mathbf{M}(P_i), \quad (3.22)$$

erhält man eine iterative Abbildungsvorschrift $\mathbf{M} : \Sigma \rightarrow \Sigma$, die im Allgemeinen nicht linear und nicht durch einen analytischen Ausdruck darstellbar ist.

Im Folgenden wird als Hyperfläche Σ die Fläche $q = 0$ gewählt und der (x, p_x) -Poincaré-Schnitt betrachtet. Da der Kopplungsterm $-\alpha q x$ und der Term $\frac{1}{2}\alpha^2 q^2$ bei $q = 0$ verschwinden, liegen die Zustände innerhalb eines Kreises um $x = p_x = 0$ mit Radius $r = \sqrt{2E}$. Aus dem Poincaré-Schnitt können die Koordinaten x, p_x direkt abgelesen werden, aus der Energieerhaltung (3.6) lässt sich $p_q = \pm \sqrt{2E - x^2 - p_x^2}$ bis auf das Vorzeichen bestimmen. Kurz bevor die Trajektorie die Wand $q = 0$ berührt gilt die negative, kurz nach dem Wandkontakt die positive Lösung. Somit bestimmt ein Punkt im Poincaré-Schnitt eindeutig einen Zustand im Phasenraum. Da die Hamiltonfunktion (3.6) quadratisch von p_x abhängt, ist der Poincaré-Schnitt symmetrisch zur x -Achse.

Durch das Einführen von Poincaré-Schnitten kann die Hamiltonfunktion (3.6) auf ein zweidimensionales Problem reduziert werden. In Poincaré-Schnitten sind aber nur Trajektorien zu sehen, die die Schnittebene Σ berühren. Für Anfangsbedingungen

$$d_1 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad p_q(0) = -\alpha p_x(0) \quad (3.23)$$

bewegt sich die Trajektorie zunächst nur im harmonischen Potential. Für kleine Amplituden berührt die Trajektorie nie die Wand und das Problem reduziert sich auf das des eindimensionalen harmonischen Oszillators. Neben den periodischen Orbits, die in Poincaré-Schnitten zu erkennen sind, existieren also auch immer harmonische Oszillationen. Diese Orbits sind instabil, da die Trajektorie bereits für beliebig kleine Abweichungen von $d_1 = 0$ wieder die Wände berührt. Außer den harmonischen Oszillationen treffen alle Trajektorien die Wände und lassen sich somit im Poincaré-Schnitt erkennen.

Abbildung 3.2 (links) zeigt ein Beispiel für einen Poincaré-Schnitt. Der Poincaré-Schnitt wurde erstellt, indem für einige Anfangsbedingungen mehrere tausend Durchstoßpunkte der Trajektorie mit der Fläche Σ bestimmt wurden. Periodische Orbits entsprechen geschlossenen Kurven im Phasenraum und erzeugen daher im Poincaré-Schnitt einzelne, endlich viele Punkte. Quasiperiodische Orbits wiederholen sich nie exakt und führen im Poincaré-Schnitt zu geschlossenen Kurven. Einzelne verstreute Punkte deuten auf chaotisches Verhalten hin. Im chaotischen Bereich halten sich benachbarte Trajektorien nach kurzer Zeit in der Regel in komplett anderen Bereichen des Phasenraums auf. Ein Beispiel für eine chaotische Trajektorie ist in Abbildung 3.2 (rechts) zu sehen. Ein Phasenraum wie in Abbildung 3.2 (links) mit chaotischen und regulären Bereichen wird als gemischt bezeichnet.

Um diese Ergebnisse besser interpretieren zu können, wird in Kapitel 5 Chaos in hamiltonschen Systemen diskutiert.

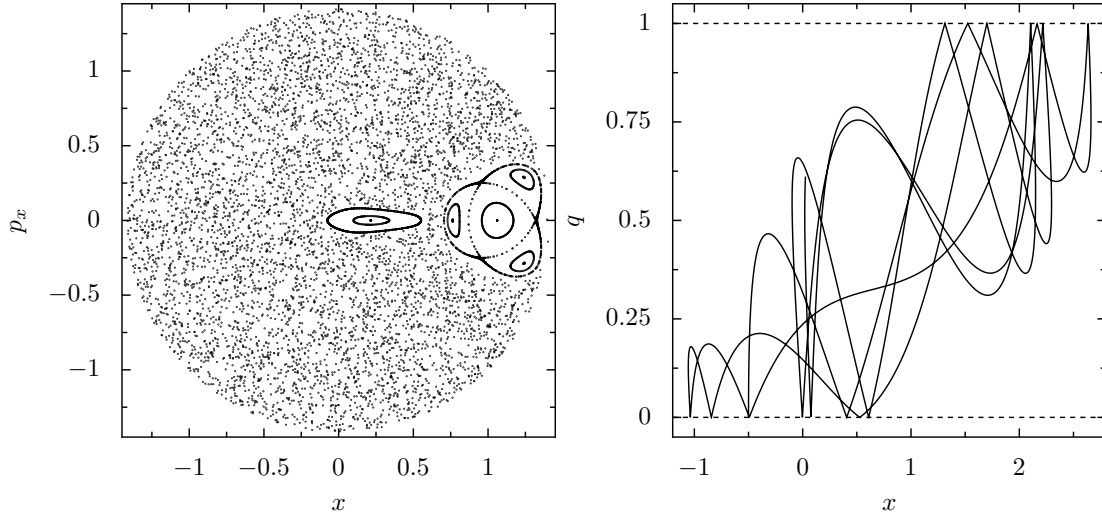


Abbildung 3.2.: Links ist der Poincaré-Schnitt für $E = 1$ und $\alpha = 2$ abgebildet, rechts ist der Ausschnitt einer Trajektorie für die Anfangsbedingungen $p_x = 0$, $x = -0.5$ zu sehen, die im chaotischen Bereich liegt.

3.5. Numerische Bestimmung der Wandkontakte

Der Zeitpunkt t_0 der nächsten Reflexion der Trajektorie an einer Wand ergibt sich aus den Gleichungen der Form

$$\begin{aligned} q(t_{0,1}) &= A\omega \sin(\omega t_{0,1}) + B\omega \cos(\omega t_{0,1}) + Ct_{0,1} + D = 0 \\ q(t_{0,2}) &= A\omega \sin(\omega t_{0,2}) + B\omega \cos(\omega t_{0,2}) + Ct_{0,2} + D = 1, \end{aligned} \quad (3.24)$$

wobei die Zahlen auf der rechten Seite aus der Wahl der Position der Wände folgen und die Konstanten A, B, C, D durch die Anfangsbedingungen festgelegt werden. Der gesuchte Zeitpunkt t_0 ist die kleinste (positive) Zahl, die eine der oberen beiden Gleichungen löst. Der Wert für t_0 muss numerisch bestimmt werden, da die Gleichungen (3.24) analytisch nicht nach $t_{0,1}$ bzw. $t_{0,2}$ aufgelöst werden können.

Die Nullstellen der Ableitung von $q(t)$

$$\frac{dq(t)}{dt} = p_q(t) = A \cos(\omega t) - B \sin(\omega t) + C \quad (3.25)$$

lassen sich analytisch berechnen:

$$t_{1,2,3,4} = \pm \frac{1}{\omega} \arccos \left(\frac{\pm B \sqrt{A^2 + B^2 - C^2} - AC}{A^2 + B^2} \right) \quad (3.26)$$

Zwischen zwei Nullstellen t_n und t_{n+1} von $p_q(t)$ ist $q(t)$ streng monoton, so dass in diesem Intervall höchstens eine Nullstelle von $q(t)$ liegt. Um den Zeitpunkt t_0 des ersten Wandkontakts zu finden, prüft man, ob zwischen den Nullstellen t_n und t_{n+1} die Trajektorie eine der beiden Wände durchbricht, also ob zwischen $q(t_n)$ und $q(t_{n+1})$ eine Wand liegt. Durchbricht die Trajektorie im Intervall $[t_n, t_{n+1}]$ eine Wand, kann die gesuchte Zeit t_0 durch eine Kombination aus Newton- und Bisektionsverfahren

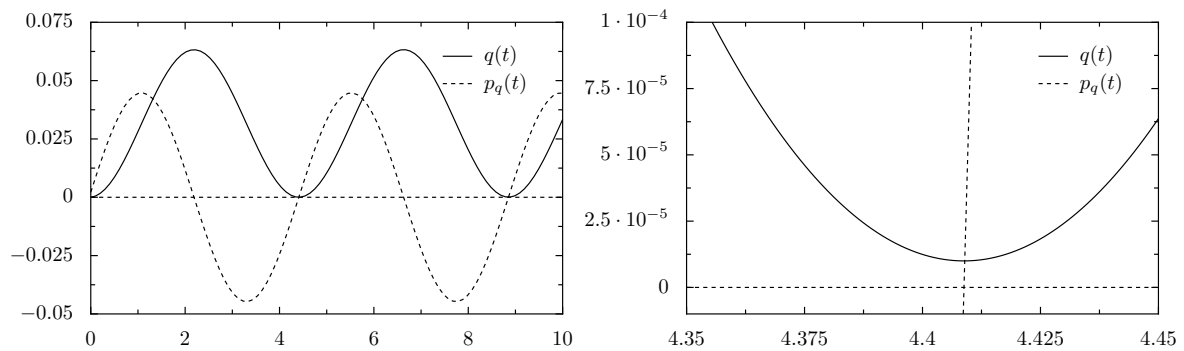


Abbildung 3.3.: $q(t)$ und $p_q(t)$ für $E = 0.002$ und $\alpha = 1$ bei Anfangsbedingungen $q = 0$, $x = 0.06317278$, $p_x = -0.00213413$; $q(t)$ besitzt ein Minimum in der Nähe der Wand; $p_q(t) \approx 0$ an dieser Stelle. Numerisch ist es problematisch zu bestimmen, ob die Trajektorie zu diesem Zeitpunkt die Wand berührt oder nicht. Die Vergrößerung rechts zeigt, dass in diesem Fall die Wand nicht berührt wird.

numerisch berechnet werden. Eine Beschreibung der beiden numerischen Verfahren findet sich u. a. in [8].

Gilt für den Radikanden $A^2 + B^2 - C^2 < 0$ in (3.26), ist die Funktion $q(t)$ streng monoton und t_0 kann ebenfalls durch eine Kombination aus Newton- und Bisektionsverfahren bestimmt werden.

Die numerische Bestimmung der Nullstellen funktioniert in den meisten Fällen sehr gut. In seltenen Fällen gibt es Probleme, wenn $q(t)$ in der Nähe der Wand sehr flach ist, also $p_q(t) \approx 0$. In diesen sehr seltenen Fällen lässt sich im Rahmen der Rechengenauigkeit nicht immer bestimmen, ob $q(t)$ die Wand berührt oder nicht. Tritt dieses Problem beim Erstellen von Poincaré-Schnitte auf, kann man einfach eine Trajektorie mit leicht anderen Anfangsbedingungen verwenden. Abbildung 3.3 zeigt ein Beispiel für diese Art von Problemen.

Kapitel 4.

Phasenraum und Poincaré-Abbildung für $\alpha = 0$

In diesem Kapitel soll der Spezialfall der Kopplung $\alpha = 0$ untersucht werden. Es wird sich zeigen, dass für $\alpha = 0$ der Phasenraum vollständig regulär ist und aus periodischen und quasiperiodischen Orbits besteht. Insbesondere werden einige Ergebnisse im nächsten Kapitel verwendet, um die Grundlagen chaotischer hamiltonscher Systeme zu erklären.

Die Trajektorie starte bei $q(0) = 0$ mit positivem Systemimpuls p_q . Da für die Kopplung $\alpha = 0$ gilt, folgt aus (3.15) $\omega = 1$. Zusammen mit den Anfangsbedingungen

$$d_0 = q(0) = 0 \quad d_1 = p_q(0) \quad e_0 = x(0) \quad e_1 = p_x(0) \quad (4.1)$$

vereinfachen sich die Bewegungsgleichungen (3.17) zu

$$\begin{pmatrix} q \\ x \\ p_q \\ p_x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ p_x(0) \\ 0 \\ -x(0) \end{pmatrix} \sin t + \begin{pmatrix} 0 \\ x(0) \\ 0 \\ p_x(0) \end{pmatrix} \cos t + \begin{pmatrix} p_q(0) \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} t + \begin{pmatrix} q(0) \\ 0 \\ p_q(0) \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (4.2)$$

Für $\alpha = 0$ entspricht p_q der ursprünglichen Konstante der Bewegung (3.12) vor Einführen der Wände. Der Wert von p_q bleibt zwischen zwei Wandkontakten konstant, bei Wandreflexionen ändert sich das Vorzeichen. Somit sind neben der Hamiltonfunktion die Energie des Systemteilchens $\frac{1}{2}p_q^2$ und die Energie des Bads $\frac{1}{2}p_x^2 + \frac{1}{2}x^2$ weitere Konstanten der Bewegung und das System bleibt nach Einführen der Wände integrabel. Der Zeitpunkt des nächsten Wandkontakts ($q = 0$ bzw. $q = 1$) lässt sich leicht analytisch berechnen, weil $q(t)$ nur noch eine lineare Gleichung ist:

$$q = p_q(0)t + q(0) \quad \Rightarrow \quad t = \frac{q - q(0)}{p_q(0)} \quad (4.3)$$

Die Zeit zwischen zwei aufeinander folgenden Wandkontakten ist konstant und beträgt $t_0 = 1/p_q(0)$.

Damit lässt sich nun die Poincaré-Abbildung zwischen zwei Wandkontakten bei $q = 0$ bestimmen. Dazu berechnet man mit (4.2) die neuen Anfangsbedingungen

$$\tilde{d}_0 = q(t_0) = 1 \quad \tilde{d}_1 = -p_q(t_0) = -p_q(0) \quad \tilde{e}_0 = x(t_0) \quad \tilde{e}_1 = p_x(t_0) \quad (4.4)$$

nach dem ersten Wandkontakt bei $q = 1$ zum Zeitpunkt t_0 . Mit den Anfangsbedingungen (4.4) und den Bewegungsgleichungen (4.2) können die Werte für x, p_x zum Zeitpunkt $2t_0$ berechnet werden, wenn die Trajektorie wieder die Fläche Σ berührt. Somit erhält man die Abbildungsvorschrift $\mathbf{M} : \Sigma \rightarrow \Sigma$

$$\begin{pmatrix} x_{i+1} \\ (p_x)_{i+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \varphi & \sin \varphi \\ -\sin \varphi & \cos \varphi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_i \\ (p_x)_i \end{pmatrix} \quad (4.5)$$

mit dem Drehwinkel

$$\varphi = \varphi(E, (x_i^2 + (p_x)_i^2)) = \frac{2}{p_q(0)} = \frac{2}{\sqrt{2E - (p_x)_i^2 - x_i^2}}. \quad (4.6)$$

Die Abbildung entspricht einer Drehung um den Winkel φ um den Ursprung ($x = p_x = 0$). Der Drehwinkel nimmt für größere Abstände zum Ursprung monoton zu und divergiert am Rand des Poincaré-Schnitts. Die Abhängigkeit des Drehwinkels vom Abstand zum Ursprung und ein Beispiel für einen Poincaré-Schnitt sind in Abbildung 4.1 dargestellt.

Fixpunkte ergeben sich durch Drehungen um Winkel

$$\varphi \stackrel{!}{=} n \cdot 2\pi \quad \Rightarrow \quad \sqrt{x^2 + p_x^2} = \sqrt{2E - \frac{1}{n^2\pi^2}} \quad \text{mit } n = 1, 2, 3, \dots \quad (4.7)$$

Die Fixpunkte der Abbildung (4.5) liegen auf konzentrischen Kreisen um den Ursprung und bilden eine unendliche Folge, die gegen den Rand des Poincaré-Schnitts konvergiert. Für Energiewerte von

$$E_n = \frac{1}{2n^2\pi^2} \quad (4.8)$$

entstehen neue Fixpunktkreise, die bei ansteigender Energie vom Ursprung immer weiter an den Rand des Poincaré-Schnitts wandern. Der letzte Fixpunktkreis entsteht bei dem Energiewert $E = \frac{1}{2\pi^2}$. Außerdem ist der Ursprung unabhängig vom Energiewert ein Fixpunkt.

Kann ein Drehwinkel $\varphi = \frac{n}{m} \cdot 2\pi$ durch ganze Zahlen m, n ausgedrückt werden, ergeben sich für die entsprechenden Punkte im Poincaré-Schnitt periodische Orbits. Die Trajektorie ist periodisch und schließt sich nach einer Zeit T , Zustände zu den Zeiten t und $t + T$ sind identisch. Orbits der Periode m lassen sich durch die Bedingung

$$\varphi \stackrel{!}{=} \frac{n}{m} \cdot 2\pi \quad \Rightarrow \quad \sqrt{x^2 + p_x^2} = \sqrt{2E - \frac{m^2}{n^2\pi^2}} \quad (4.9)$$

finden (m und n seien teilerfremd). Daraus lässt sich auch erkennen, dass Fixpunkte im Poincaré-Schnitt Orbits der Periode 1 entsprechen und Gleichung (4.7) ein Spezialfall von (4.9) ist. Außerdem liegen periodische Orbits wie Fixpunkte auf Kreisen. Auf einem solchen Kreis findet man daher eine ganze Familie von Orbits gleicher Periode. Lässt sich der Drehwinkel nicht durch ganze Zahlen m, n ausdrücken, schließt sich die Trajektorie nie, die Bewegung ist quasiperiodisch. Für beide Fälle ist in Abbildung 4.2 ein Beispiel dargestellt.

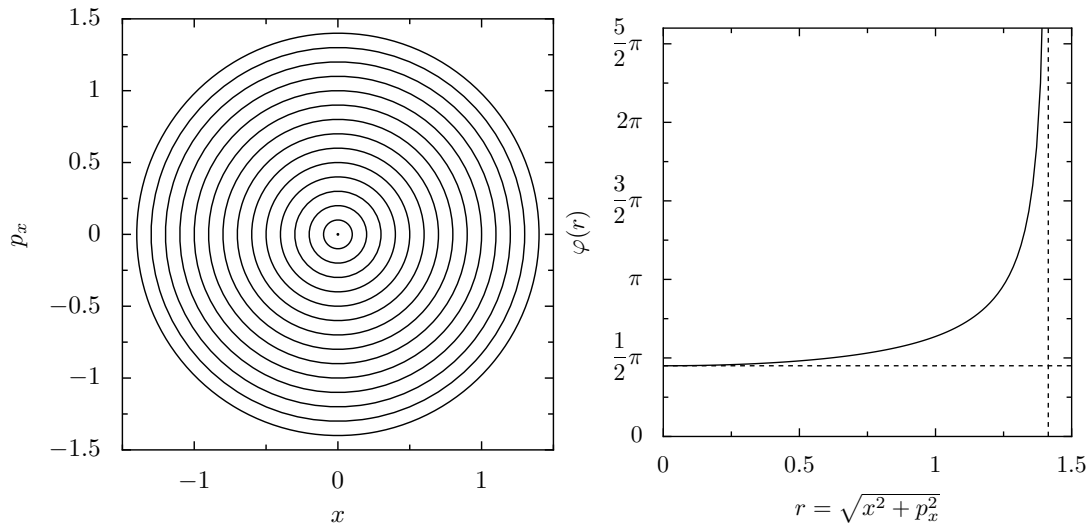


Abbildung 4.1.: Links ist der Poincaré-Schnitt für $\alpha = 0$ und $E = 1$ abgebildet, rechts der Graph des Drehwinkels in Abhängigkeit des Abstands vom Ursprung. Der Drehwinkel beim Ursprung beträgt $\varphi(r = 0) = \sqrt{2} \approx 81^\circ$, zum Rand des Poincaré-Schnitts divergiert der Drehwinkel.

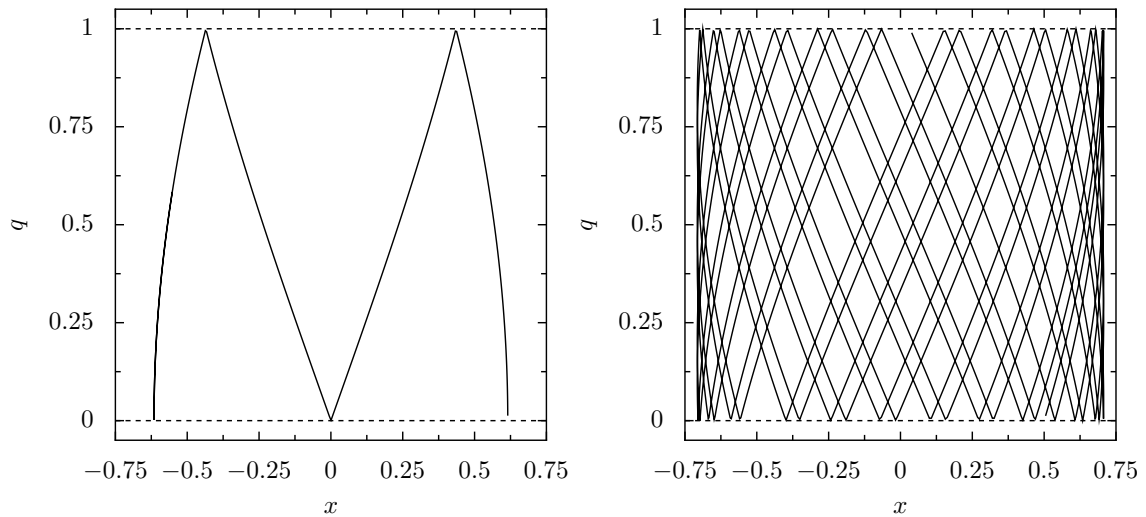


Abbildung 4.2.: Links ist eine periodische Bewegung abgebildet für $E = 1$ und den Anfangsbedingungen $x(0) = \sqrt{2E - \frac{16}{\pi^2}} \approx 0.616$, $p_x(0) = 0$. Der entsprechende Drehwinkel beträgt $\varphi = \frac{\pi}{2}$, die Bewegung entspricht einem Orbit der Periode 4 und die Trajektorie schließt sich nach acht Wandkontakten.

Rechts ist der Ausschnitt einer quasiperiodischen Bewegung ebenfalls für $E = 1$ mit den Anfangsbedingungen $x(0) = p_x(0) = 0.5$ in einem Zeitraum von $\Delta t = 40$ abgebildet. Da die Bewegung quasiperiodisch ist, schließt sich die Trajektorie nie und füllt im Laufe der Zeit die komplette Fläche aus.

Kapitel 5.

Chaos in hamiltonschen Systemen

In diesem Kapitel werden grundlegende Eigenschaften konservativer, hamiltonscher Systeme vorgestellt, Fixpunkte symplektischer Abbildungen untersucht, das Liouville- und Poincaré-Birkhoff-Theorem erklärt und auf die Hamiltonfunktion (3.6) mit Wänden angewandt. Insbesondere sind die vorgestellten Eigenschaften wesentlich für das Verständnis der folgenden Kapitel. Eine ausführlichere Darstellung findet sich in den Büchern [1], [5], [7] und [10].

5.1. Liouville-Theorem

Die Dynamik eines hamiltonschen Systems wird vollständig durch die Hamiltonfunktion $H(\mathbf{p}, \mathbf{q})$ festgelegt, die von den Impulsen und Orten aller Teilchen abhängt. Hamiltonfunktionen $H(\mathbf{p}, \mathbf{q}, t)$, die zusätzlich von der Zeit abhängen, werden im Folgenden nicht betrachtet. Der Zustand eines Systems zur Zeit t wird eindeutig durch die beiden N -dimensionalen Vektoren \mathbf{p} und \mathbf{q} festgelegt. Die zeitliche Entwicklung der Trajektorie $(\mathbf{p}(t), \mathbf{q}(t))$ im $2N$ -dimensionalen Phasenraum folgt aus den hamiltonschen Bewegungsgleichungen

$$\frac{dp_i}{dt} = \frac{\partial H}{\partial q_i} \quad \frac{dq_i}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial p_i}. \quad (5.1)$$

Ist die Hamiltonfunktion zeitunabhängig, so ist sie eine Konstante der Bewegung und entspricht der Energie des Systems:

$$\frac{dH}{dt} = \sum_i \left(\frac{\partial H}{\partial p_i} \frac{dp_i}{dt} + \frac{\partial H}{\partial q_i} \frac{dq_i}{dt} \right) + \frac{\partial H}{\partial t} \stackrel{(5.1)}{=} \frac{\partial H}{\partial t} = 0 \quad (5.2)$$

Fasst man Impuls- und Ortsvektor zum $2N$ -dimensionalen Phasenraumvektor

$$\mathbf{u} = \begin{pmatrix} \mathbf{p} \\ \mathbf{q} \end{pmatrix} \quad (5.3)$$

zusammen und definiert die Vektorfunktion

$$\mathbf{F}(\mathbf{u}, t) = \mathbf{S}_N \nabla H, \quad (5.4)$$

wobei der Nabla-Operator auf alle N Orts- und Impulskoordinaten wirkt

$$\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial p_1}, \frac{\partial}{\partial p_2}, \dots, \frac{\partial}{\partial p_N}, \frac{\partial}{\partial q_1}, \frac{\partial}{\partial q_2}, \dots, \frac{\partial}{\partial q_N} \right)^T, \quad (5.5)$$

lassen sich die Bewegungsgleichungen (5.1) in Form von

$$\frac{d\mathbf{u}}{dt} = \mathbf{F}(\mathbf{u}, t) \quad (5.6)$$

schreiben. Für \mathbf{S}_N in (5.4) ergibt sich dabei die symplektische Matrix

$$\mathbf{S}_N = \begin{pmatrix} \mathbf{O}_N & -\mathbf{I}_N \\ \mathbf{I}_N & \mathbf{O}_N \end{pmatrix}, \quad (5.7)$$

die aus den N -dimensionalen Einheitsmatrizen \mathbf{I}_N und Nullmatrizen \mathbf{O}_N besteht.

Eine grundlegende Eigenschaft der hamiltonschen Bewegungsgleichungen ist, dass $2N$ -dimensionale Phasenraumvolumina erhalten bleiben. Die Inkompressibilität des Phasenraumvolumens wird Liouville-Theorem genannt und folgt aus der Anwendung der Divergenz auf (5.6):

$$\nabla \cdot \mathbf{F} = \sum_{i=1}^N \left(\frac{\partial}{\partial p_i} \cdot \left(-\frac{\partial H}{\partial q_i} \right) + \frac{\partial}{\partial q_i} \cdot \left(\frac{\partial H}{\partial p_i} \right) \right) = 0 \quad (5.8)$$

Eine geschlossene Fläche im Phasenraum verändert zwar im Laufe der Zeit ihre Form, das eingeschlossene Volumen bleibt aber konstant. Daher besitzen hamiltonsche Systeme keine Attraktionsgebiete im Phasenraum wie anziehende Fixpunkte, anziehende Grenzzyklen oder seltsame Attraktoren.

5.2. Fixpunkte symplektischer Abbildungen

Da für zeitunabhängige Hamiltonfunktionen die Energie eine Erhaltungsgröße ist, ist die Bewegung des Systems im Phasenraum auf eine $(2N - 1)$ -dimensionale Hyperfläche beschränkt. Durch einen Poincaré-Schnitt mit einer $(2N - 2)$ -dimensionalen Hyperfläche Σ kann die Dimension des Problems weiter verringert werden. Da jeder Punkt auf dem Poincaré-Schnitt eindeutig einem Zustand entspricht, existiert eine Abbildung $\mathbf{M} : \Sigma \rightarrow \Sigma$, die jeden Punkt eines Poincaré-Schnitts bijektiv auf einen Punkt des nächsten Schnitts abbildet. Die Abbildung \mathbf{M} ist symplektisch und erhält daher $(2N - 2)$ -dimensionale Volumina.

Da sich aus der Hamiltonfunktion (3.6) eine zweidimensionale Poincaré-Abbildung ergibt, sollen in diesem Abschnitt Fixpunkte zweidimensionaler symplektischer Abbildungen untersucht werden. Fixpunkte der Abbildung \mathbf{M} entsprechen Orbits der Periode 1. Da Fixpunkte beliebiger Periode r Fixpunkte der Abbildung \mathbf{M}^r entsprechen, lassen sich die Ergebnisse auf Fixpunkte höherer Periode übertragen.

Sei $\mathbf{J} = \mathbf{D}\mathbf{M}$ die Jacobi-Matrix von \mathbf{M} an einem zu untersuchenden Fixpunkt. Da \mathbf{M} symplektisch ist, beträgt die Determinante $\det(\mathbf{J}) = 1$. Da die Determinante das Produkt der Eigenwerte ist, treten die Eigenwerte von \mathbf{J} in Paaren von λ und $1/\lambda$ auf. Für die Eigenwerte $\lambda_{1,2}$ von \mathbf{J} ergibt sich die quadratische Gleichung

$$\det \begin{pmatrix} J_{11} - \lambda & J_{12} \\ J_{21} & J_{22} - \lambda \end{pmatrix} = \lambda^2 - \hat{T}\lambda + 1 = 0, \quad (5.9)$$

wobei $\hat{T} = J_{11} + J_{22}$ die Spur der Jacobi-Matrix bezeichnet und der letzte Term $\det(\mathbf{J}) = J_{11}J_{22} - J_{12}J_{21} = 1$ entspricht. Die Lösungen von λ berechnen sich zu

$$\lambda_{1,2} = \frac{1}{2} \left(\hat{T} \pm \sqrt{\hat{T}^2 - 4} \right). \quad (5.10)$$

Durch die Wurzel in (5.10) ergeben sich drei unterschiedliche Fälle für die Eigenwerte $\lambda, 1/\lambda$:

- a) $\hat{T} > 2$: Die Eigenwerte sind reell und positiv ($\lambda, 1/\lambda > 0$), der Fixpunkt wird hyperbolisch genannt.
- b) $2 > \hat{T} > -2$: Die Eigenwerte sind komplex und liegen auf dem Einheitskreis ($\lambda, 1/\lambda = \exp(\pm i\varphi)$), der Fixpunkt wird elliptisch genannt.
- c) $\hat{T} < -2$: Die Eigenwerte sind reell und negativ ($\lambda, 1/\lambda < 0$), der Fixpunkt wird hyperbolisch mit Reflexion genannt.

Im Fall hyperbolischer Fixpunkte liegen die Bildpunkte benachbarter Trajektorien auf Hyperbelästen und die Eigenvektoren legen die Richtung der Asymptoten fest. Punkte in der Umgebung elliptischer Fixpunkte liegen auf einer Ellipse und rotieren mit dem Winkel φ , der sich aus den Eigenwerten ergibt, pro Iteration um den Fixpunkt. Quasiperiodische Orbits füllen die Ellipse komplett aus, periodische Orbits führen zu einer endlichen Anzahl an Punkten. Die periodischen Orbits um einen elliptischen Fixpunkt bilden eine dichte Menge. Abbildung 5.1 zeigt ein Beispiel für einen Poincaré-Schnitt mit hyperbolischen und elliptischen Fixpunkten, sowie das Verhalten von Punkten auf dem Poincaré-Schnitt in der Nähe eines elliptischen Fixpunktes.

5.3. Integrabilität von Hamiltonfunktionen

Eine zeitunabhängige Hamiltonfunktion H_0 ist integrabel, wenn sie N unabhängige Konstanten der Bewegung besitzt, die in Involution sind. Addiert man zur Hamiltonfunktion H_0 einen Störterm H_1 , wird die resultierende Hamiltonfunktion

$$H = H_0 + \alpha H_1 \quad (5.11)$$

im Allgemeinen nicht integrabel sein. Einige Orbits zerfallen nach Einführen der Störung, andere bleiben erhalten. Existiert für einen Orbit eine Erzeugende, die die Hamilton-Jacobi-Gleichung für das gestörte System löst, bleibt der Orbit nach Einführen der Störung stabil. Versucht man eine Lösung der

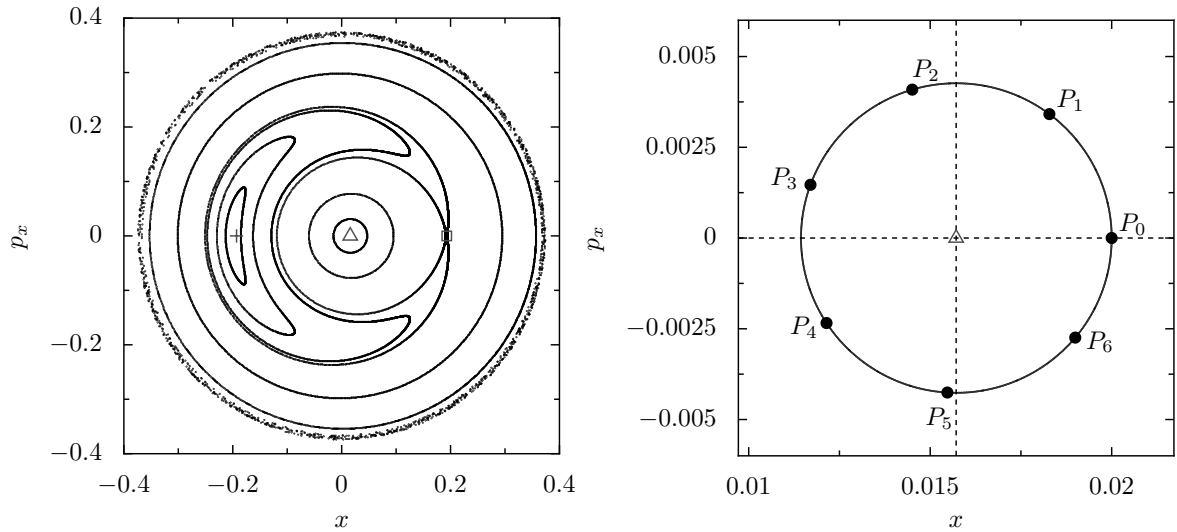


Abbildung 5.1.: Die linke Graphik zeigt den Poincaré-Schnitt für $\alpha = 0.01$ und $E = 0.07$. Man kann zwei elliptische Fixpunkte (gekennzeichnet durch Plus und Dreieck) und einen hyperbolischen Fixpunkt (Quadrat) erkennen. In der Nähe des Rands verhält sich das System chaotisch. Weitere Fixpunkte und Orbits höherer Periode befinden sich zwar u. a. am linken Rand vor dem chaotischen Bereich, sind in der Graphik aber nicht sichtbar. Rechts ist ein Poincaré-Schnitt für gleiche Energie und Kopplung mit wenigen Punkten zu sehen. Der Startpunkt $P_0 = (0.02, 0)$ liegt in der Nähe eines elliptischen Fixpunktes (Dreieck). Die numerisch bestimmten Eigenwerte des Fixpunkts betragen $\lambda_{1,2} \approx \exp(\pm i 0.93)$. Die Punkte rotieren mit einem Winkel $\varphi \approx 0.93 \approx 52^\circ$ um den Fixpunkt. Zur Orientierung wurde die Ellipse, auf der die Punkte liegen, in die Graphik eingezeichnet.

Hamilton-Jacobi-Gleichung durch den Ansatz einer Potenzreihe in α zu konstruieren, erkennt man, dass für rationale Frequenzverhältnisse die Reihe divergiert und keine Erzeugende existiert. Selbst für irrationale Zahlen ist nicht klar, ob die Potenzreihe konvergiert, weil rationale Zahlen beliebig genau durch irrationale Zahlen approximiert werden können. Das KAM-Theorem (benannt nach Kolmogorow, Arnol'd und Moser) liefert eine hinreichende Voraussetzung für welche Frequenzverhältnisse die Potenzreihe konvergiert und der Orbit nach Einführung der Störung stabil bleibt. Physikalisch lässt sich auf Grund der beschränkten Genauigkeit jeder Messung nicht zwischen rationalen und irrationalen Zahlen unterscheiden. Daher gibt das KAM-Theorem an, für welche Frequenzverhältnisse die „meisten“ Orbits stabil bleiben. Orbits mit rationalem Frequenzverhältnis m/n und kleinem n zerfallen zuerst. Zwar ist das KAM-Theorem auf die Hamiltonfunktion (3.6) nicht anwendbar [4], dennoch zeigt sich numerisch, dass gerade diese Orbits bereits bei kleinen Störungen zerfallen.

Weiterführende Literatur zum KAM-Theorem findet sich unter [1], [5], [7], [10].

5.4. Poincaré-Birkhoff-Theorem

Um die Auswirkungen der Störung zu untersuchen, betrachtet man zunächst die Poincaré-Abbildung (4.5) für das integrable System $\alpha = 0$. Nach Einführen von Polarkoordinaten kann (4.5) als

$$\mathbf{M} : \begin{pmatrix} r_{i+1} \\ \varphi_{i+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r_i \\ \varphi_i + 2\pi \nu(r_i) \end{pmatrix} \quad (5.12)$$

mit

$$\nu(r_i) = \frac{1}{\pi \sqrt{2E - r_i^2}} \quad (5.13)$$

geschrieben werden.

Wie in Abbildung 4.1 zu erkennen, nimmt der Drehwinkel und damit auch $\nu(r)$ monoton mit dem Abstand vom Ursprung zu. Einen Fixpunktkreis c_0 erhält man gerade für $\nu(r_f) \in \mathbb{Z}$. Neben c_0 betrachte man zwei weitere Kreise c_1, c_2 in der Nähe des Fixpunktkreises mit $r(c_1) < r_f$ und $r(c_2) > r_f$. Wendet man die Abbildung \mathbf{M} (5.12) auf die drei Kreise an, stellt man fest, dass Punkte auf dem kleineren Kreis c_1 gegen den Uhrzeigersinn rotieren, Punkte auf dem Kreis c_2 im Uhrzeigersinn rotieren, während alle Punkte auf c_0 Fixpunkte sind und somit gar nicht rotieren (siehe Abbildung 5.2, links). Der Drehsinn ergibt sich dabei aus $\phi = \nu(r) \bmod 2\pi$: Punkte mit $\phi > \pi$ rotieren im Uhrzeigersinn, Punkte mit $\phi < \pi$ rotieren gegen den Uhrzeigersinn. Für dieses Beispiel wurde $\nu(r_f) = 1$ angenommen, für andere Werte kann sich der Drehsinn von c_1 und c_2 umkehren.

Wird die integrable Hamiltonfunktion H_0 durch eine Funktion αH_1 gestört, erhält man aus (5.12) die Abbildung

$$\mathbf{M}_\alpha : \begin{pmatrix} r_{(i+1)} \\ \varphi_{(i+1)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r_i + \alpha f(r_i, \varphi_i) \\ \varphi_i + 2\pi \nu(r_i) + \alpha g(r_i, \varphi_i) \end{pmatrix}. \quad (5.14)$$

$f(r_i, \varphi_i)$ und $g(r_i, \varphi_i)$ in (5.14) seien beliebige Funktionen, die vom Abstand r und dem Winkel φ abhängen. Die Abbildungsvorschrift (5.14) ist nach dem Liouville-Theorem ebenfalls flächenerhaltend. Für kleine Störungen $\alpha \ll 1$ überleben die Kurven c_1 und c_2 die Störung und ändern ihre Form nur geringfügig. Insbesondere rotieren Punkte auf $\mathbf{M}_\alpha(c_1)$ weiterhin gegen den Uhrzeigersinn und Punkte auf $\mathbf{M}_\alpha(c_2)$ weiter im Uhrzeigersinn. Zwischen beiden Kurven muss daher eine Kurve c_α existieren, auf der die Punkte nicht rotieren, sondern nur radial verschoben werden. Wendet man die Abbildung \mathbf{M}_α auf c_α an, erhält man daraus eine Kurve $\mathbf{M}_\alpha(c_\alpha)$. Auf Grund des Liouville-Theorems müssen beide Kurven c_α und $\mathbf{M}_\alpha(c_\alpha)$ die gleiche Fläche einschließen. Das ist wiederum nur möglich, wenn sich beide Kurven in einer geraden Anzahl von Punkten schneiden. Diese Schnittpunkte entsprechen gerade Fixpunkte der Abbildung \mathbf{M}_α . Orbits mit rationalem Frequenzverhältnis zerfallen durch die Störung also nicht komplett, sondern es entsteht eine gerade Anzahl an Fixpunkten – jeweils gleich viele elliptische wie hyperbolische Fixpunkte (siehe Abbildung (5.2), rechts). Dieses Theorem wurde

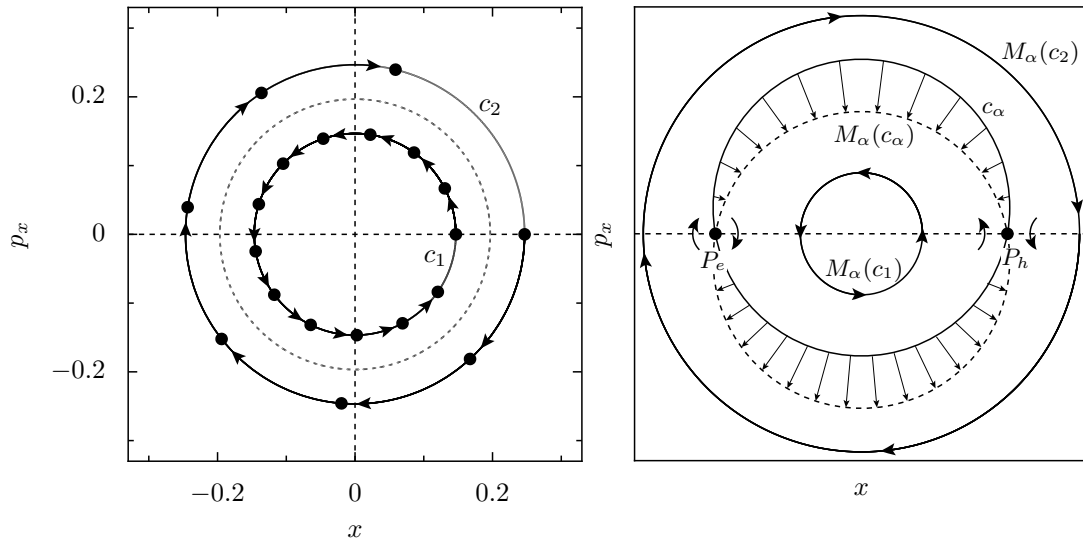


Abbildung 5.2.: Links ist der Poincaré-Schnitt für das integrable System $\alpha = 0$ bei der Energie $E = 0.07$ dargestellt. Punkte auf der Kurve c_1 rotieren gegen den Uhrzeigersinn, Punkte auf der Kurve c_2 rotieren im Uhrzeigersinn. Die gestrichelte Kurve zwischen c_1 und c_2 ist ein Fixpunktkreis, Punkte auf dieser Kurve rotieren gar nicht.

Rechts ist der Poincaré-Schnitt qualitativ nach Einschalten der Störung abgebildet. Die Kurven c_1, c_2 werden durch die Störung auf die Kurven $M_\alpha(c_1), M_\alpha(c_2)$ abgebildet, verändern aber kaum ihre Form und behalten ihren Drehsinn. Zwischen beiden Kurven liegt die Kurve c_α . Punkte auf c_α werden durch die Abbildung $M_\alpha(c_\alpha)$ nicht gedreht, sondern nur radial gestreckt. Die Kurven c_α und $M_\alpha(c_\alpha)$ schneiden sich in den Punkten P_e und P_h . Diese Punkte entsprechen gerade einem elliptischen (P_e) und einem hyperbolischen (P_h) Fixpunkt von M_α .

Die Grundidee für beide Graphiken stammt aus [1] und [7].

von Poincaré kurz vor seinem Tod aufgestellt, von Birkhoff bewiesen und wird daher als Poincaré-Birkhoff-Theorem bezeichnet. Das Poincaré-Birkhoff-Theorem lässt sich auf Fixpunkte beliebiger Periode r anwenden. Die Argumentation verläuft analog, wenn man die Abbildung M'_α betrachtet. Es ist anzumerken, dass das Theorem nicht für symplektische Abbildungen höherer Dimensionen gilt.

Die Abbildung (5.2) zeigt qualitativ, wie die Fixpunkte im Poincaré-Schnitt 5.1 (links) entstehen. Eine quantitative Darstellung war nicht möglich, da die Graphik sonst auf Grund des geringen Abstands von c_α und $M_\alpha(c_\alpha)$ sehr unübersichtlich geworden wäre. Die Fixpunkte des Poincaré-Schnitts in Abbildung (5.1) (links) für $E = 0.07$ und $\alpha = 0.01$ liegen bei:

Fixpunkt	Plus	Dreieck	Quadrat
Form	elliptisch	elliptisch	hyperbolisch
x	-0.199669	0.015715	0.19305351
p_x	0	0	0
Eigenwerte	$\lambda_{1,2} = 0.9172 \pm 0.3985i$	$\lambda_{1,2} = 0.5972 \pm 0.8021i$	$\lambda_1 = 1.4571, \lambda_2 = 0.6863$

Der innerste Fixpunktkreis des ungestörten Systems $\alpha = 0$ und $E = 0.07$ besitzt nach (4.7) den Radius $r = \sqrt{2E - 1/\pi^2} \approx 0.197$. Durch die Störung wird der ursprünglich stabile Orbit instabil und der

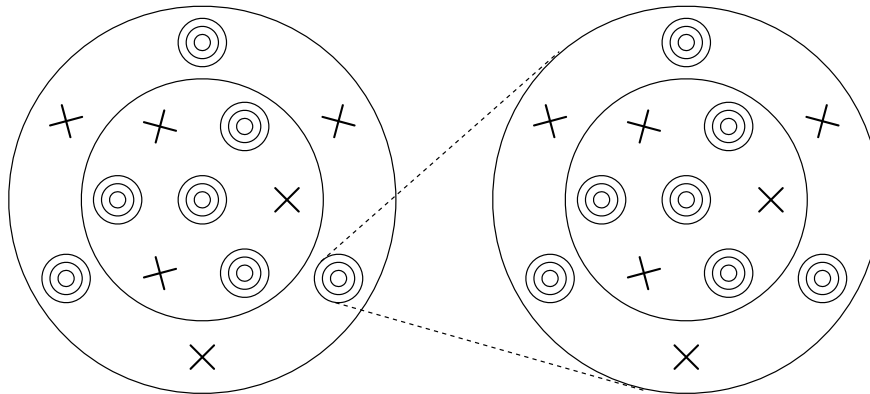


Abbildung 5.3.: Selbstähnliche Struktur um einen elliptischen Fixpunkt: Bei Vergrößerung um einen elliptischen Fixpunkt weist der Poincaré-Schnitt ähnliche Strukturen wie der unvergrößerte Poincaré-Schnitt auf. (nach [1], [7])

Fixpunktkreis zerfällt in einen elliptischen und einen hyperbolischen Fixpunkt (Plus und Quadrat in Abbildung 5.1, links). Da die Störung klein ist, befinden sich die beiden neu entstandenen Fixpunkte in der Nähe des ursprünglichen Fixpunktkreises. Numerisch erkennt man den elliptischen und hyperbolischen Fixpunkt in Poincaré-Schnitten bereits bei einer Störung von $\alpha = 10^{-5}$. Der entsprechende Orbit im ungestörten System wird also bereits für sehr geringe Störungen instabil, während sich der Poincaré-Schnitt sonst noch kaum sichtbar vom ungestörten Poincaré-Schnitt unterscheidet.

Zerfällt ein Fixpunkt, entsteht nach dem Poincaré-Birkhoff-Theorem eine gerade Anzahl von Fixpunkten, von denen mindestens ein Fixpunkt wieder elliptisch ist. In der Nähe dieses elliptischen Fixpunktes kann das System wieder – zumindest in guter Näherung – durch eine Abbildung der Form (5.12) beschrieben werden. Daher sieht der Poincaré-Schnitt in der Umgebung eines elliptischen Fixpunktes ähnlich aus wie der Poincaré-Schnitt des gesamten Systems: Um den Fixpunkt verlaufen elliptische Kurven und zwischen diesen Kurven können sich wiederum Fixpunkte befinden, die durch zerstörte resonante Orbits entstanden sind. Wendet man das Poincaré-Birkhoff-Theorem rekursiv an, erkennt man, dass die Umgebung eines elliptischen Fixpunkts selbstähnliche Strukturen aufweisen kann. Abbildung (5.3) zeigt schematisch die selbstähnliche Struktur. Ein numerisches Beispiel für $E = 0.0253$ und $\alpha = 0.2$ findet sich in Abbildung (5.4). Jede Vergrößerung entspricht qualitativ dem Aussehen des gesamten Poincaré-Schnitts.

5.5. Stabile und instabile Mannigfaltigkeiten

Im Gegensatz zu der Rotationsbewegung um elliptische Fixpunkte ist die Bewegung in der Nähe von hyperbolischen Fixpunkten instabil. Die stabilen und instabilen Kurven, die zu einem hyperbolischen Fixpunkt hin- oder von ihm weglafen, verhalten sich chaotisch. Stabile und instabile Kurven dürfen sich selbst nicht schneiden, da ansonsten die entsprechende Trajektorie nicht eindeutig wäre, andererseits dürfen sie sich gegenseitig schneiden. Die Schnittpunkte werden homokline Punkte genannt und sind im Allgemeinen keine Fixpunkte oder Fixpunkte höherer Periode, so dass aus der Existenz

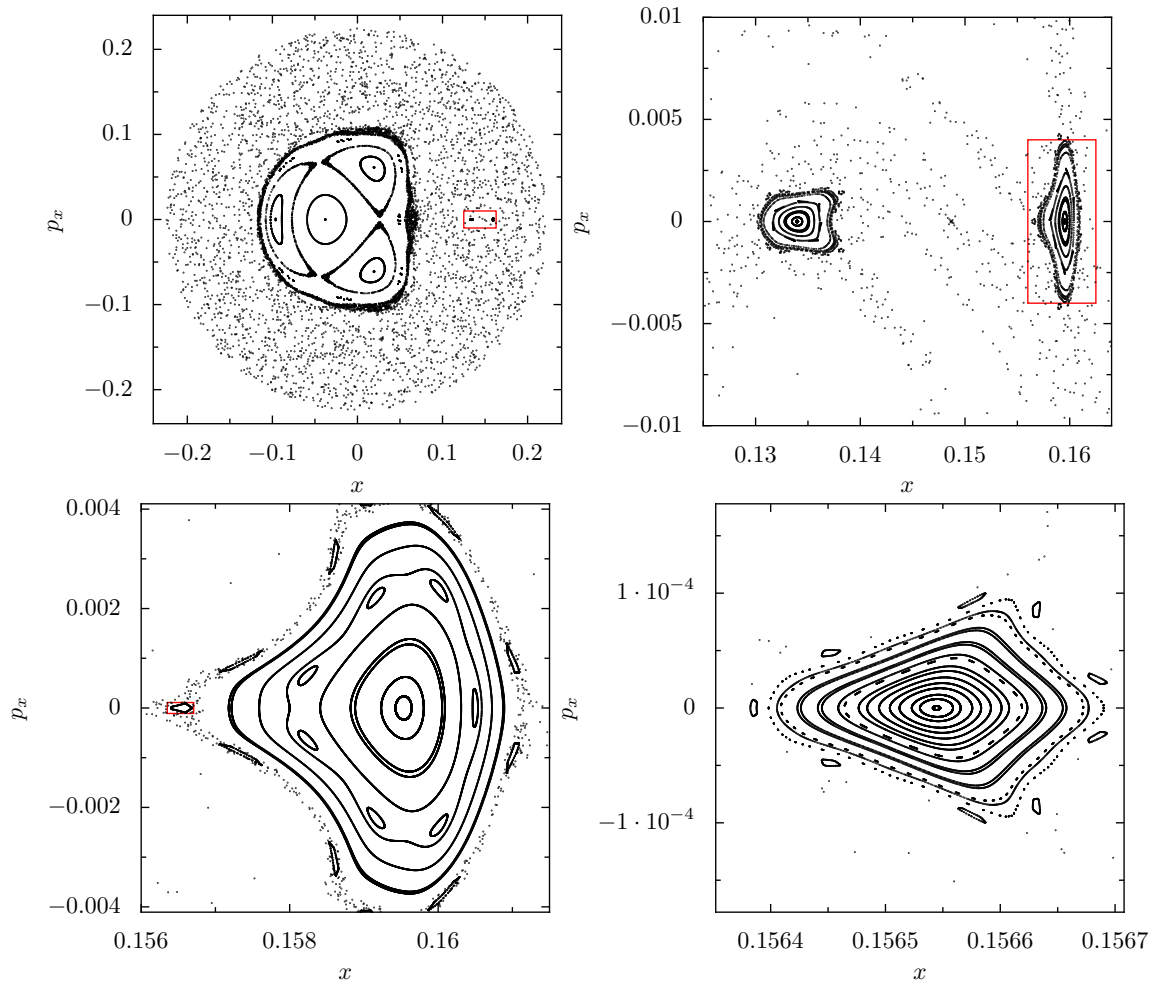


Abbildung 5.4.: Der Poincaré-Schnitt für $E = 0.0253$ und $\alpha = 0.2$ weist selbstähnliche Strukturen auf. Die obere rechte und die beiden unteren Graphiken sind Vergrößerungen des Poincaré-Schnitts links oben.

eines homoklinen Punktes die Existenz unendlich vieler solcher Punkte folgt. Um den hyperbolischen Fixpunkt zu erreichen, muss die Abbildung \mathbf{M}_α unendlich mal auf den homoklinen Punkt angewandt werden. Zwischen zwei homoklinen Punkten P und $\mathbf{M}_\alpha(P)$ liegen unendlich viele weitere homokline Punkte, was zu einem äußerst komplexen Netzwerk der stabilen und instabilen Kurven führt.

Kapitel 6.

Periodische Orbits

Nachdem im letzten Kapitel die Grundlagen chaotischer hamiltonscher Systeme vorgestellt wurden, wird in diesem Kapitel die Form periodischer Orbits der Hamiltonfunktion (3.6) mit Wänden vorgestellt und die Stabilität von Fixpunkten diskutiert. Insbesondere wird sich zeigen, dass sich Fixpunkte in drei verschiedene Arten unterscheiden lassen und sich von elliptisch in hyperbolisch und umgekehrt umwandeln können. Außerdem können Fixpunkte bei Änderung der Systemparameter entstehen oder zerstört werden. Während in diesem Kapitel periodische Orbits qualitativ untersucht werden, wird in Kapitel 7 Lage und Verhalten bestimmter Fixpunkte in Abhängigkeit von α und E berechnet.

6.1. Arten von Fixpunkten

Betrachtet man Poincaré-Schnitte für verschiedene Werte von α und E , so erkennt man, dass sich drei Arten von Fixpunkten unterscheiden lassen, die im Folgenden als Fixpunkte 1. Art, Fixpunkte 2. Art und Fixpunkte 3. Art bezeichnet werden. Im Folgenden wird angenommen, dass die Trajektorie bei $q(0) = 0$ startet und die Wand $q = 1$ zum Zeitpunkt t_0 trifft.

Fixpunkte 1. Art entstehen, wenn die Trajektorie senkrecht von der Wand $q = 0$ startet und die Wand $q = 1$ senkrecht trifft; für Fixpunkte 1. Art gilt also $p_x(0) = p_x(t_0) = 0$. Fixpunkte 1. Art liegen daher

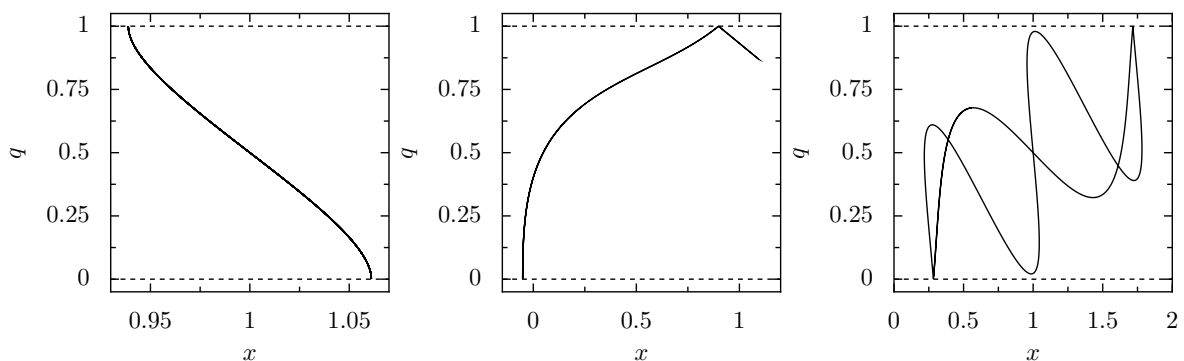


Abbildung 6.1.: Die unterschiedlichen Arten von Fixpunkten:

links: Fixpunkt 1. Art ($\alpha = 2, E = 1$)

mitte: Fixpunkt 2. Art ($\alpha = 0.67, E = 0.13$)

rechts: Fixpunkt 3. Art ($\alpha = 2, E = 0.5$)

im Poincaré-Schnitt auf der x -Achse. Da die Trajektorie beide Wände senkrecht trifft, beschreibt die Trajektorie im Ortsraum zwischen zwei Wandkontakten immer die gleiche Kurve (siehe Abbildung 6.1, links). Außerdem bleibt der Betrag der ursprünglichen Erhaltungsgröße (3.12) nach Wandkontakten konstant. Für alle Punkte der Trajektorie ist also

$$P^2 = (\alpha p_x + p_q)^2 = \alpha^2 p_x^2 + 2\alpha p_x p_q + p_q^2 = p_q(0)^2 \quad (6.1)$$

konstant. Außerdem sind die Trajektorien vieler, aber nicht aller Fixpunkte 1. Art im Ortsraum punktsymmetrisch zu $(q = 1/2, x = \alpha/2)$. So ist beispielsweise die Trajektorie in Abbildung 6.1 (links) punktsymmetrisch zu $(q = 1/2, x = 1)$. Da diese Art von Fixpunkt die häufigste und damit wichtigste Art ist, wird im nächsten Kapitel die Lage dieser Fixpunkte für gegebene Werte von α und E berechnet und die Punktsymmetrie der Trajektorien näher untersucht.

Fixpunkte 2. Art liegen in Poincaré-Schnitten ebenfalls auf der x -Achse. Die Trajektorie startet mit $p_x(0) = 0$, trifft aber die Wand $q = 1$ nicht senkrecht wie im vorherigen Fall, sondern läuft nach der Reflexion in Richtung des steilsten Anstiegs des Potentials. Zum Zeitpunkt der Reflexion gilt also $\alpha p_x(t_0) = p_q(t_0)$. Üblicherweise ist die kinetische Energie der Trajektorie nach der Reflexion nicht groß genug, um die gegenüberliegende Wand $q = 0$ zu erreichen. In diesem Fall läuft die Trajektorie in Richtung des steilsten Anstiegs, wird immer langsamer bis sie zum Stillstand kommt und kehrt dann wieder um (siehe Abbildung 6.1, mitte). Wählt man als Schnittfläche für den Poincaré-Schnitt $q = 1$, erkennt man statt einem Fixpunkt einen Fixpunkt Periode 2. Periodischen Orbits entsprechen im Phasenraum geschlossenen Kurven. Daher hängt die Periode eines Orbits von der Wahl der Schnittfläche des Poincaré-Schnitts ab.

Noch seltener als Fixpunkte 2. Art sind in Poincaré-Schnitten Fixpunkte 3. Art zu erkennen. Im Gegensatz zu den ersten beiden Arten liegt der Fixpunkt im Poincaré-Schnitt nicht auf der x -Achse. Die Trajektorie wird an der Wand $q = 1$ mit $p_x(t_0) \neq 0$ reflektiert und trifft die Wand $q = 0$ bei $x = x(0)$ mit $p_x = -p_x(0)$, wodurch sich die Trajektorie schließt (siehe Abbildung 6.1, rechts). Da der Poincaré-Schnitt symmetrisch bezüglich der x -Achse ist, tauchen Fixpunkte 3. Art immer in Paaren auf und liegen bei $x = x(0)$ und $p_x = \pm p_x(0)$. Die Trajektorie im Ortsraum ist für beide Fixpunkte identisch, nur die Richtung, in der die Kurve durchlaufen wird, hängt vom Fixpunkt ab. Die Trajektorie in Abbildung 6.1 (rechts) ist punktsymmetrisch zu $(q = 0.5, x = 1)$. Fixpunkte 3. Art sind v. a. bei hohen Werten von α recht häufig, aber da die Fixpunkte meist hyperbolisch sind und in chaotischen Gebieten liegen, sind sie im Poincaré-Schnitt meist nicht zu erkennen.

6.2. Fixpunkte höherer Periode

Fixpunkte höherer Periode ergeben sich meist durch senkrechte Reflexion an einer Wand analog zu Fixpunkten 1. Art, oder – wie bei Fixpunkten 2. Art – indem die Trajektorie nach einem Wandkontakt in Richtung des steilsten Anstiegs läuft. Abbildung (6.2) zeigt einige Beispiele für Fixpunkte höherer Ordnung.

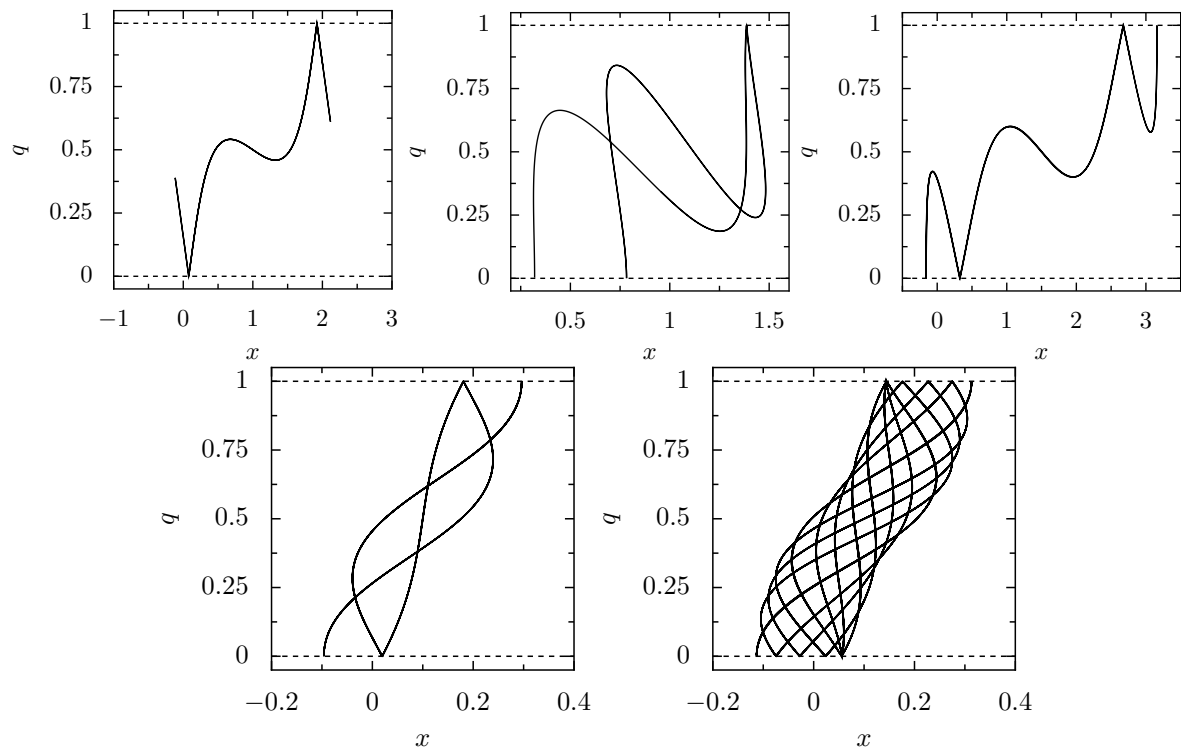


Abbildung 6.2.: Beispiele für Fixpunkte höherer Periode:
 oben, links: Fixpunkt der Periode 2 ($\alpha = 2$, $E = 0.4$)
 oben, mitte: Fixpunkt der Periode 2 ($\alpha = 2$, $E = 0.5$)
 oben, rechts: Fixpunkt der Periode 3 ($\alpha = 3$, $E = 1$)
 unten, links: Fixpunkt der Periode 3 ($\alpha = 0.2$, $E = 0.0253$)
 unten, rechts: Fixpunkt der Periode 11 ($\alpha = 0.2$, $E = 0.0253$)

Oben links ist ein Fixpunkt der Periode 2 abgebildet. Ähnlich wie bei Fixpunkten 2. Art trifft die Trajektorie die beiden Wände nicht senkrecht, sondern läuft in Richtung des steilsten Anstiegs und kehrt wieder um. Da die Trajektorie die Wand $q = 0$ zweimal bei $x \approx 0.08$ mit $p_x \approx \pm 0.40$ berührt, ergibt sich für den Fixpunkt die Periode 2. Im Poincaré-Schnitt liegen die Punkte symmetrisch zur x -Achse.

Der Fixpunkt in der oberen mittleren Abbildung besitzt ebenfalls Periode 2. Die Trajektorie trifft die Wand $q = 0$ beide Male mit Impuls $p_x = 0$, auch wenn die Graphik das Auge etwas täuscht. Anders als bei Fixpunkten 1. Art wird die Trajektorie nicht senkrecht an der Wand $q = 1$ reflektiert, sondern erst wieder an der Wand $q = 0$. Die Punkte im Poincaré-Schnitt liegen daher auf der x -Achse. Betrachtet man den Poincaré-Schnitt der Ebene $q = 1$, ergibt sich ebenfalls ein Fixpunkt der Periode 2. In diesem Fall liegen die beiden Punkte aber symmetrisch zur x -Achse.

Die obere rechte Abbildung zeigt einen Periode-3-Orbit. Die Trajektorie startet senkrecht von der Wand, trifft nach zwei Wandkontakten senkrecht die Wand $q = 1$ und läuft wieder den selben Weg zurück. Ein Punkt liegt im Poincaré-Schnitt auf der x -Achse, die anderen beiden symmetrisch zur x -Achse. Die Trajektorie scheint punktsymmetrisch zu ($q = 0.5$, $x = \alpha/2$) zu sein.

Der Orbit in der unteren linken Graphik besitzt die Periode 3. Wie im letzten Beispiel trifft die Trajektorie die Wand $q = 0$ einmal senkrecht und zweimal mit einem Impuls $p_x \neq 0$, so dass im Poincaré-Schnitt wieder ein Punkt auf der x -Achse und zwei symmetrisch zur x -Achse liegen. Außerdem scheint die Trajektorie auch wieder punktsymmetrisch zu $(q = 0.5, x = \alpha/2)$ zu sein.

Die untere rechte Graphik zeigt einen Orbit der Periode 11. Die Trajektorie startet bei $x \approx -0.11$ senkrecht von der Wand und trifft nach vielen Reflexionen die Wand $q = 1$ bei $x \approx 0.32$ wieder senkrecht.

6.3. Familien periodischer Orbits

In der Umgebung von elliptischen Fixpunkten liegen Punkte im Poincaré-Schnitt auf einer Ellipse und rotieren mit konstantem Winkel φ pro Iteration um den Fixpunkt. Ist die Bewegung periodisch, erkennt man im Poincaré-Schnitt endlich viele Punkte. Der Drehwinkel eines Orbits der Periode n entspricht $\varphi = m/n \cdot 2\pi$, wobei m eine ganze Zahl ist. Da für alle Punkte auf der Ellipse der Drehwinkel φ konstant ist, existieren auf der Ellipse unendlich viele weitere Orbits der gleichen Periode. Um einen elliptischen Fixpunkt sind die periodischen Orbits also nicht isoliert, sondern bilden eine Familie. Ausgehend von einem Punkt P_0 auf der Ellipse erhält man einen weiteren Orbit gleicher Periode, indem man P_0 auf der Ellipse um den Winkel θ dreht. Entspricht der Winkel θ einem ganzzahligen Vielfachen des Drehwinkels φ , erhält man wieder den selben Orbit; für alle anderen Drehwinkel einen neuen Orbit.

Abbildung (6.3) zeigt einige Trajektorien einer Familie von Orbits der Periode 3 für $\alpha = 0$ und $E = 0.5$. Familien periodischer Orbits sind aber keine spezielle Eigenschaft des Kopplungswerts $\alpha = 0$, sondern existieren um jeden elliptischen Fixpunkt bei beliebiger Kopplung α . Als Beispiel wurde $\alpha = 0$ gewählt, weil in diesem Fall periodische Orbits der gleichen Familie sehr exakt berechnet werden können. Der Anfangspunkt im Poincaré-Schnitt für den Orbit a) liegt auf der x -Achse bei $(x \approx -0.3, p_x = 0)$. Jeder weitere Orbit ergibt sich durch Drehung des Anfangspunktes von Orbit a) um den Fixpunkt bei $x = p_x = 0$. Einem Orbit der Familie entsprechen im Poincaré-Schnitt drei Punkte, die auf einem Kreis liegen. Abbildung 6.4 (links) zeigt für einige Orbits die entsprechenden Punkte im Poincaré-Schnitt.

Die Trajektorie aus a) entspricht der Form des Buchstabens N. Dreht man den Ausgangspunkt etwas, spaltet sich das N langsam auf. Bei einer Drehung von 30° entspricht die Trajektorie einem Raute-muster, die Trajektorie weist eine hohe Symmetrie auf. Bei noch größeren Drehungen schließt sich die Trajektorie mehr und mehr und bildet für eine Drehung von 60° ein spiegelverkehrtes N. Bei höheren Drehungen als 60° fächert sich die Trajektorie wieder auf und bildet für eine Drehung von 90° wieder ein Raute-muster. Bei einer Drehung von 120° geht der periodische Orbit wieder in sich selbst über, die Orbits a) und i) sind identisch.

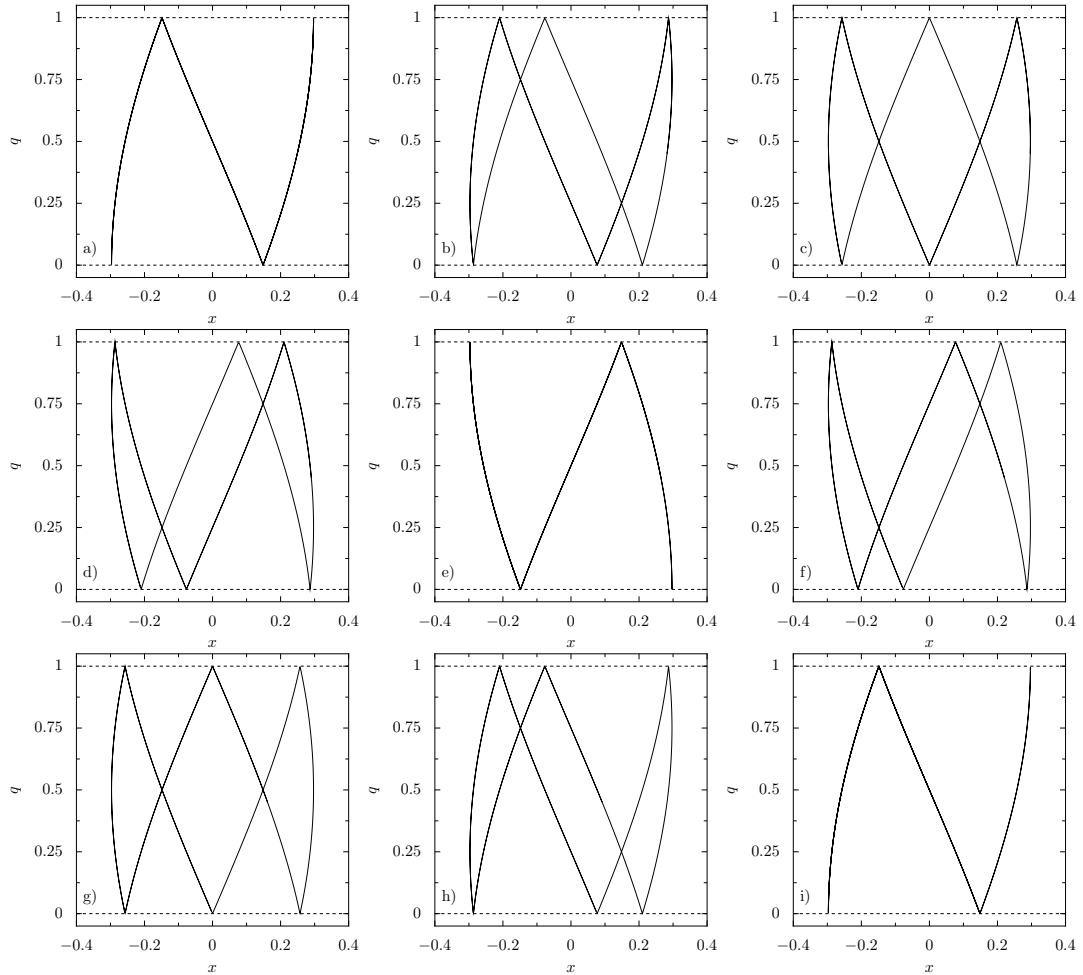


Abbildung 6.3.: Familie periodische Orbits für $\alpha = 0$, $E = 0.5$:

Die Orbits liegen auf einem Kreis um $(x = 0, p_x = 0)$ mit Radius $r = \sqrt{2E - \frac{3^2}{\pi^2}} \approx 0.297$.

- a) $x(0) = r$, $p_x(0) = 0$
- b) Drehung um 15° ($x(0) = -0.287$, $p_x(0) = -0.077$)
- c) Drehung um 30° ($x(0) = -0.257$, $p_x(0) = -0.148$)
- d) Drehung um 45° ($x(0) = -0.210$, $p_x(0) = -0.210$)
- e) Drehung um 60° ($x(0) = -0.148$, $p_x(0) = -0.257$)
- f) Drehung um 75° ($x(0) = -0.077$, $p_x(0) = -0.287$)
- g) Drehung um 90° ($x(0) = -0.000$, $p_x(0) = -0.297$)
- h) Drehung um 105° ($x(0) = 0.077$, $p_x(0) = -0.287$)
- i) Drehung um 120° ($x(0) = 0.148$, $p_x(0) = -0.257$)

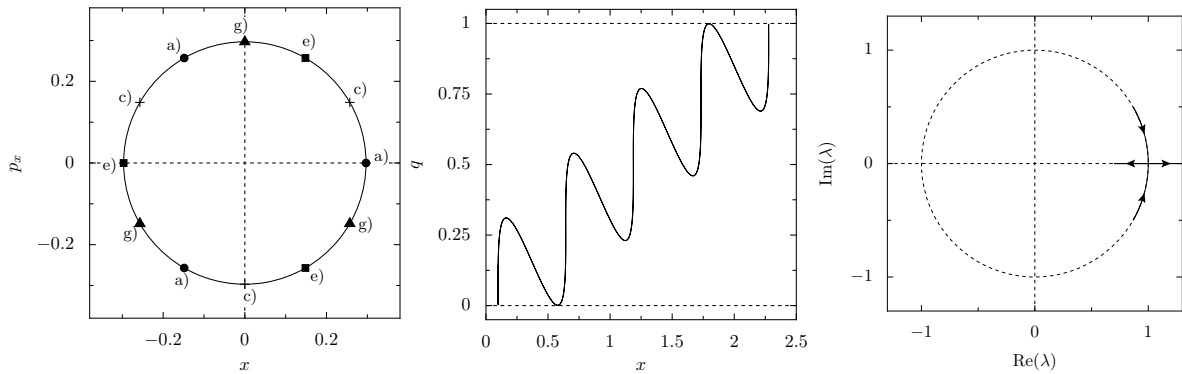


Abbildung 6.4.: links: Punkte für einige Trajektorien der Familie periodischer Orbits im Poincaré-Schnitt; mitte: Fixpunkt 1. Art ($\alpha = 2.375$, $E = 0.2$); rechts: Weg, den die Eigenwerte in der komplexen Ebene zurücklegen, während ein elliptischer Fixpunkt zu hyperbolisch wechselt.

6.4. Stabilität von Fixpunkten

Ändert sich bei einem kritischen Wert eines Systemparameters μ_c eines dynamischen Systems die Anzahl oder Stabilität der Fixpunkte, spricht man von einer Bifurkation des Systems. Das System unterscheidet sich für $\mu < \mu_c$ und $\mu > \mu_c$ qualitativ in seinem Verhalten. Das in dieser Arbeit untersuchte System hängt vom Kopplungswert α und der Energie E ab. Das System durchläuft Bifurkationen in beiden Parametern.

Aus Poincaré-Schnitten erkennt man, dass für größere Werte von E der chaotische Bereich im Poincaré-Schnitt in der Regel abnimmt und ein elliptischer Fixpunkt großer Ausbreitung entsteht. Erhöht man dagegen den Kopplungswert α bei konstanter Energie, zerfallen typischerweise mehr und mehr Fixpunkte oder werden instabil bis der Phasenraum fast ausschließlich aus chaotischen Bereichen besteht. Für noch größere Werte von α entstehen viele kleine Inseln, die Orbits hoher Perioden entsprechen. In Kapitel 9 werden zwei numerische Beispiele anhand von Poincaré-Schnitten diskutiert, die diese Behauptungen bestätigen.

Ein elliptischer oder hyperbolischer Fixpunkt wird zerstört, wenn durch eine kleine Änderung der Energie E oder des Kopplungswertes α die Trajektorie an einer Wand reflektiert wird, die sie zuvor nicht getroffen hat, oder eine Wand nicht mehr berührt, an der sie zuvor reflektiert wurde. Beide Fälle führen dazu, dass sich der zunächst periodische Orbit schlagartig ändert und der Fixpunkt nicht mehr existiert. Abbildung 6.4 (mitte) zeigt ein Beispiel für einen Fixpunkt 1. Art, der bei geringfügig kleinerem Kopplungswert α nicht mehr existiert. Der entsprechende Fixpunkt existiert bei konstanter Energie $E = 0.2$ für Kopplungswerte $2.375 \lesssim \alpha \lesssim 2.447$ und wandert im Poincaré-Schnitt entlang der x -Achse von $x(\alpha = 2.375) \approx 0.1$ zu $x(\alpha = 2.447) \approx 0.3$.

Zudem können Fixpunkte ihre Form von hyperbolisch zu elliptisch und umgekehrt ändern. Wechselt ein Fixpunkt von elliptisch zu hyperbolisch, ändern sich seine Eigenwerte von komplex mit Betrag 1 (also $\exp(\pm i\varphi)$) zu reell mit einem Eigenwert größer als 1, der andere kleiner als 1. Abbildung 6.4 (rechts) zeigt den Weg, den die Eigenwerte in der komplexen Ebene zurücklegen. Die beiden

Eigenwerte λ und $1/\lambda$ laufen auf dem Einheitskreis und treffen sich bei $\lambda = 1$. Von dort aus trennen sie sich wieder und laufen auf der Imaginärachse in unterschiedliche Richtungen. Wandelt sich ein elliptischer Fixpunkt in einen hyperbolischen Fixpunkt mit Reflexion um, treffen sich beide Eigenwerte bei $\lambda = -1$. Ändert ein Fixpunkt seine Form von hyperbolisch zu elliptisch, laufen die Eigenwerte entsprechend in die andere Richtung.

Kapitel 7.

Fixpunkte 1. Art

Im letzten Kapitel wurden die verschiedenen Arten von Fixpunkten vorgestellt. Die häufigste und daher wichtigste Fixpunktart sind Fixpunkte 1. Art. In diesem Kapitel wird die Lage von Fixpunkten 1. Art für beliebige Werte von α und E berechnet. Mit den Ergebnissen dieses Kapitels lassen sich Bifurkationsdiagramme erstellen, die im nächsten Kapitel diskutiert werden.

7.1. Bedingungen

Fixpunkte 1. Art entstehen, wenn die Trajektorie senkrecht von der Wand $q(0) = 0$ startet und zum Zeitpunkt t_0 an der Wand $q = 1$ senkrecht reflektiert wird. Daraus ergeben sich folgende vier Bedingungen:

$$q(0) = 0 \quad (7.1)$$

$$p_x(0) = 0 \quad (7.2)$$

$$p_x(t_0) = 0 \quad (7.3)$$

$$q(t_0) = 1 \quad (7.4)$$

Wertet man diese Bedingungen geschickt aus, erhält man die Lage der Fixpunkte $x(0)$ in Abhängigkeit von α und E . Setzt man zunächst $q(0) = 0$ und $p_x(0) = 0$ in die Bewegungsgleichungen (3.17) ein, erhält man:

$$q(t) = \frac{1}{\omega^2} \left(\frac{\alpha^2 p_q(0)}{\omega} \sin \omega t - \alpha x(0) \cos \omega t + p_q(0)t + \alpha x(0) \right) \quad (7.5)$$

$$x(t) = \frac{1}{\omega^2} \left(-\frac{\alpha p_q(0)}{\omega} \sin \omega t + x(0) \cos \omega t + \alpha p_q(0)t + \alpha^2 x(0) \right) \quad (7.6)$$

$$p_x(t) = -\frac{x(0)}{\omega} \sin \omega t - \frac{\alpha p_q(0)}{\omega^2} \cos \omega t + \frac{\alpha p_q(0)}{\omega^2} \quad (7.7)$$

Durch Einführung der Abkürzungen

$$A = -\frac{x(0)}{\omega} \quad B = -\frac{\alpha p_q(0)}{\omega^2} \quad \frac{A}{B} = \frac{\omega x(0)}{\alpha p_q(0)} \quad (7.8)$$

lässt sich Gleichung (7.7) als

$$p_x(t) = A \sin \omega t + B \cos \omega t - B \quad (7.9)$$

schreiben.

Bisher wurden nur die Bedingungen (7.1) und (7.2) verwendet, um die Gleichungen für $q(t)$ und $p_x(t)$ zu vereinfachen. Um die Bedingung (7.3) zu erfüllen, berechnet man die Nullstellen t_1 von $p_x(t)$ und setzt sie in $q(t) = 1$ ein, um auch die letzte Bedingung (7.4) zu erfüllen. Die Gleichung $q(t_1) = 1$ lässt sich dann prinzipiell nach $x(0)$ auflösen und man erhält die Lage der Fixpunkte in Abhängigkeit von α und E . Eine weitere Bedingung ist, dass die Trajektorie nicht schon vor dem Zeitpunkt t_0 reflektiert wurde. Wird die Trajektorie schon zuvor an einer Wand reflektiert, ergibt sich kein Fixpunkt 1. Art. Da diese Bedingung analytisch nur schwer zu überprüfen ist, werden die abgeleiteten Formeln lediglich ein notwendiges, aber kein hinreichendes Kriterium darstellen.

Für die Nullstellen von Gleichung (7.9) erhält man die beiden Lösungen

$$t_1 = \frac{2\pi n}{\omega} \quad t_2 = \frac{2}{\omega} \left(\arctan \frac{A}{B} + n\pi \right), \quad (7.10)$$

wobei n eine ganze Zahl ist. Aus den Gleichungen $q(t_{1,2}) = 1$ wird in den nächsten beiden Abschnitten der Wert für $x(0)$ in Abhängigkeit von α und E bestimmt.

7.2. Nullstelle t_1 von $p_x(t)$

Da die Zeit des Wandkontakts $t_1 > 0$ ist, muss $n > 0$ sein. Setzt man die Nullstelle t_1 in Gleichung (7.5) ein, erhält man

$$\begin{aligned} q\left(t_1 = \frac{2\pi n}{\omega}\right) &= \frac{1}{\omega^2} \left(p_q(0) \frac{2\pi n}{\omega} \right) = \frac{2\pi n p_q(0)}{\omega^3} \stackrel{!}{=} 1 \\ &\Rightarrow p_q(0) = \frac{\omega^3}{2\pi n}. \end{aligned} \quad (7.11)$$

Aus der Hamiltonfunktion (3.6) folgt für die Anfangsbedingungen (7.1), (7.2)

$$p_q(0) = \sqrt{2E - x(0)^2}. \quad (7.12)$$

Durch Einsetzen von (7.12) in (7.11) und anschließendem Auflösen erhält man schließlich

$$x(0) = \pm \sqrt{2E - \frac{\omega^6}{4n^2\pi^2}}. \quad (7.13)$$

Abbildung 7.1 zeigt die Lage der Fixpunkte in Abhängigkeit von α für $E = 1$, und für $\alpha = 1$ in Abhängigkeit von E . Für jeden n -Wert existieren zwei Fixpunkte, die im Poincaré-Schnitt symmetrisch zur x -Achse liegen. Beide Fixpunkte laufen bei steigender Kopplung α vom Rand in die Mitte des

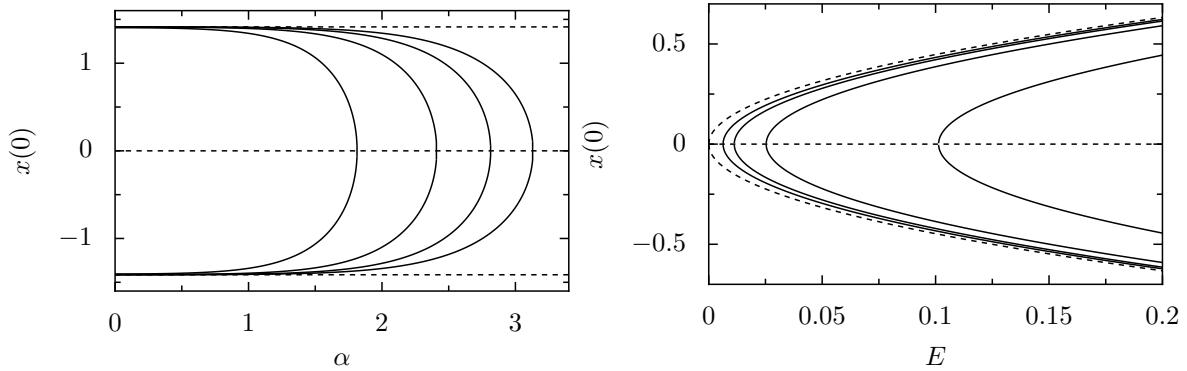


Abbildung 7.1.: Position der Fixpunkte 1. Art in Abhängigkeit von α und E . Im linken Graph ist die Energie $E = 1$ konstant, im rechten Graph die Kopplung $\alpha = 1$ konstant. Die gestrichelten Linien markieren jeweils den Rand des Poincaré-Schnitts.

Poincaré-Schnitts und treffen sich bei $x(0) = 0$. Es sei nochmals darauf hingewiesen, dass die abgeleitete Bedingung nur ein notwendiges Kriterium darstellt. Nicht alle Fixpunkte, die in Abbildung 7.1 zu sehen sind, existieren auch im entsprechenden Poincaré-Schnitt.

Die beiden Fixpunkte, die sich als Lösung aus Gleichung (7.13) für einen bestimmten Wert von n ergeben, existieren nicht für beliebige Werte von α und E . Ist die Kopplung größer als ein kritischer Wert $\alpha > \alpha_c(n)$, bzw. die Energie kleiner als ein kritischer Wert $E < E_c(n)$, existiert kein Fixpunkt mehr. Die kritischen Werte ergeben sich aus (7.13) für $x(0) = 0$ zu

$$E_c(n) = \frac{\omega^6}{8n^2\pi^2} = \frac{(1 + \alpha^2)^3}{8n^2\pi^2} \quad \alpha_c(n) = \sqrt{2\sqrt[3]{En^2\pi^2} - 1}. \quad (7.14)$$

Bei diesen Werten ändert sich die Anzahl der Fixpunkte des Systems, E_c und α_c sind daher Bifurkationspunkte.

7.3. Nullstelle t_2 von $p_x(t)$

Analog zur ersten Nullstelle erhält man durch Einsetzen von t_2 in Gleichung (7.5) die Bedingung

$$q(t_2) = \frac{1}{\omega^2} \left[\frac{\alpha^2 p_q(0)}{\omega} \sin \left(\arctan \frac{2A}{B} + 2n\pi \right) - \alpha x(0) \cos \left(\arctan \frac{2A}{B} + 2n\pi \right) \right. \\ \left. + \frac{2p_q(0)}{\omega} \left(\arctan \frac{A}{B} + n\pi \right) + \alpha x(0) \right] \stackrel{!}{=} 1. \quad (7.15)$$

Die erste Zeile bestehend aus Sinus- und Kosinusterm ergibt nach Vereinfachung der Winkelfunktionen $\alpha x(0)$. Durch Zusammenfassen der Terme und Einsetzen von (7.8) erhält man die Bedingung

$$\alpha \omega x(0) + n\pi p_q(0) + p_q(0) \arctan \left(\frac{\omega x(0)}{\alpha p_q(0)} \right) - \frac{\omega^3}{2} = 0. \quad (7.16)$$

Anders als im vorherigen Abschnitt lässt sich Gleichung (7.16) analytisch nicht nach $x(0)$ auflösen. Die Lösungen $x(0)$ für eine Kombination aus α und E muss numerisch bestimmt werden. Unterhalb von $E = 1/(2\pi^2)$ existieren keine Lösungen für $n = 0$.

Zumindest der Spezialfall, dass der Fixpunkt genau in der Mitte des Poincaré-Schnitt bei $(x(0) = p_x(0) = 0)$ liegt, lässt sich aus Gleichung 7.16 analytisch berechnen:

$$n\pi p_q(0) - \frac{\omega^3}{2} = 0 \Rightarrow \alpha = \sqrt{2\sqrt[3]{En^2\pi^2} - 1} \quad (7.17)$$

Der Wert für α entspricht gerade α_c aus Gleichung (7.14). Das bedeutet, dass die beiden Kurven, die sich aus den beiden unterschiedlichen Nullstellen von $p_x(t)$ ergeben, sich gerade im Punkt $P_c = (\alpha = \alpha_c, x(0) = 0)$ schneiden. Differenziert man Gleichung (7.16) implizit nach α , erhält man als Steigung der Kurve an dieser Stelle für $\alpha \neq 0$

$$\frac{dx(0)}{d\alpha} = \frac{3(\alpha^2 + 1)}{2\alpha} > 0. \quad (7.18)$$

Während die Kurve der ersten Nullstelle im Punkt P_c verschwindet, besitzt die Kurve der zweiten Nullstelle eine positive Ableitung und wechselt das Vorzeichen von Minus nach Plus.

In Kapitel 4 wurde gezeigt, dass der Poincaré-Schnitt für $\alpha = 0$ einen Fixpunkt bei $x(0) = p_x(0) = 0$ besitzt. Wird die Kopplung eingeschaltet, liegt der Fixpunkt nicht mehr im Mittelpunkt des Poincaré-Schnitts. Für kleine Werte von α bestimmt im Wesentlichen die Steigung der Kurve bei $\alpha = 0$ den Ort des Fixpunkts. Für $\alpha \rightarrow 0$ vereinfacht sich Gleichung (7.16) zu

$$n\pi p_q(0) + p_q(0) \arctan\left(\frac{x(0)\omega}{\alpha p_q(0)}\right) = \frac{\omega^3}{2}. \quad (7.19)$$

Um Gleichung (7.19) zu erhalten, wurde verwendet, dass der Fixpunkt für $\alpha = 0$ bei $x(0) = 0$ liegt. Löst man (7.19) nach $x(0)$ auf und differenziert anschließend nach α , erhält man

$$\frac{dx(0)}{d\alpha}(\alpha = 0) = \sqrt{2E} \tan\left(\frac{1}{\sqrt{8E}} - \sqrt{2E}\pi n\right) \quad (7.20)$$

für die Steigung an der Stelle $\alpha = 0$. Für große Energien und $n = 0$ wird das Argument des Tangens in (7.20) klein und der Tangens lässt sich durch $\tan(x) \approx x$ nähern. Damit vereinfacht sich (7.20) zu

$$\frac{dx}{d\alpha}(\alpha = 0) = \frac{1}{2}. \quad (7.21)$$

Ist die Energie groß, wandert der Fixpunkt vom Mittelpunkt des Poincaré-Schnitts bei $\alpha = 0$ auf der x -Achse in Richtung des rechten Rands des Poincaré-Schnitts. Für kleine α liegt der Fixpunkt dann bei $x(0) \approx \alpha/2$. Abbildung 6.1 (links) zeigt ein Beispiel für einen Fixpunkt 1. Art hoher Energie. Der Fixpunkt liegt bei $x = 1.0611 \approx \alpha/2 = 1$ und stimmt damit gut mit der Näherung (7.21) überein. Abbildung 7.2 zeigt die Steigung bei $\alpha = 0$ in Abhängigkeit von der Energie E . Aus der Abbildung lässt sich erkennen, dass diese Näherungen für Energien ab $E \approx 0.5$ gilt.

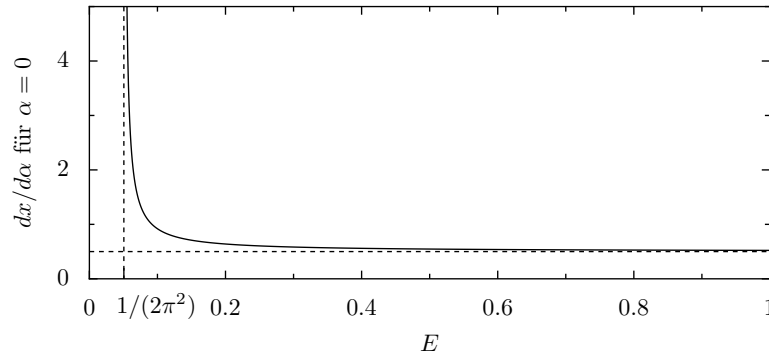


Abbildung 7.2.: Steigung $dx(0)/d\alpha$ bei $\alpha = 0$ in Abhängigkeit von E . Für große Werte von E konvergiert die Steigung gegen $1/2$, bei $E = 1/(2\pi^2)$ divergiert die Steigung.

Physikalisch besitzt die Trajektorie bei hohen Energien im Mittel eine deutlich größere kinetische als potentielle Energie (vgl. Kapitel 3.4). Wie im nächsten Abschnitt gezeigt wird, läuft die Trajektorie durch das Potentialminimum im Punkt $q = 0.5$, $x = \alpha/2$, zu dem die Trajektorie punktsymmetrisch ist. Bei hohen Energien wird die Trajektorie durch das Potential kaum abgelenkt, so dass die Trajektorie die Wände bei $x(q = 0) \approx x(q = 1) \approx \alpha/2$ berührt. Diese Näherung ist umso besser, je kleiner die Kopplung und je größer die Energie ist.

Im nächsten Kapitel werden die Ergebnisse dieses Abschnitts wieder aufgegriffen und an Hand von Bifurkationsdiagrammen veranschaulicht.

7.4. Symmetrien

In Kapitel 6.1 wurde erwähnt, dass einige Trajektorien von Fixpunkten 1. Art punktsymmetrisch im Ortsraum sind. Diese Punktsymmetrie wird in diesem Abschnitt genauer untersucht.

Zuerst soll gezeigt werden, dass alle Trajektorien, die sich durch die Nullstelle t_2 in (7.10) ergeben, durch den Punkt $(q = 0.5, x = \alpha/2)$ laufen. Dazu berechnet man zunächst

$$q\left(\frac{t_2}{2}\right) = \frac{1}{\omega^2} \left[\frac{\alpha^2}{\omega} p_q(0) \sin\left(\arctan \frac{A}{B} + n\pi\right) - \alpha x(0) \cos\left(\arctan \frac{A}{B} + n\pi\right) + \frac{p_q(0)}{\omega} \arctan \frac{A}{B} + \frac{p_q(0)}{\omega} n\pi + \alpha x(0) \right] = \frac{1}{2}. \quad (7.22)$$

Die erste Zeile bestehend aus Sinus- und Kosinus-Termen ergibt Null, die Terme in der zweiten Zeile ergeben unter Ausnutzung von Gleichung (7.16) gerade $1/2$. Eine ähnliche Rechnung liefert für die Position x zur gleichen Zeit

$$x\left(\frac{t_2}{2}\right) = \frac{\alpha}{2}. \quad (7.23)$$

Somit laufen tatsächlich alle Trajektorien, die sich durch die Nullstelle t_2 ergeben, zum Zeitpunkt $t = t_2/2$ durch den Punkt $P = (q = 0.5, x = \alpha/2)$. Der Punkt P entspricht gerade dem Potentialmi-

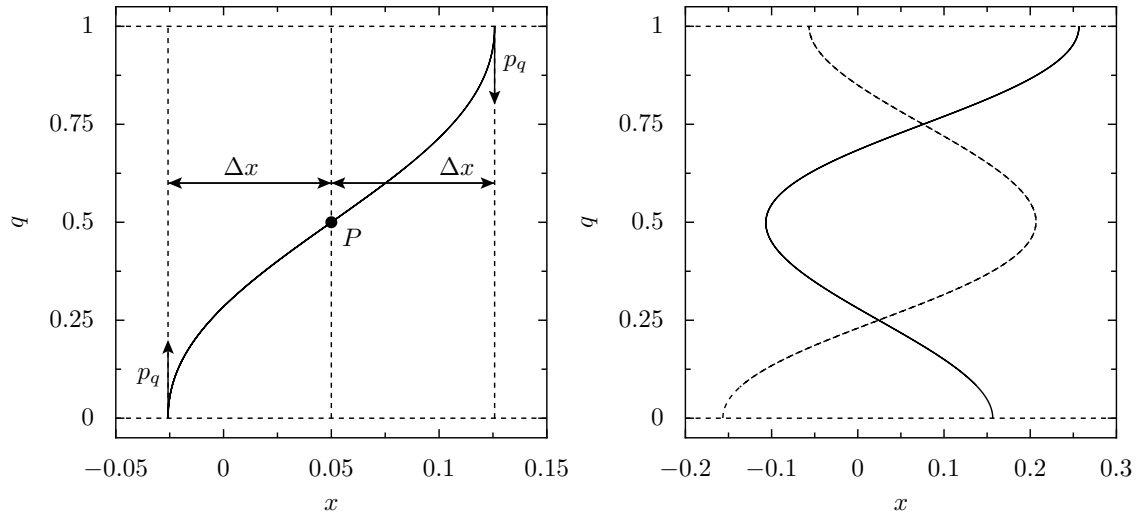


Abbildung 7.3.: Trajektorien von Fixpunkten 1. Art für $E = 0.0253$ und $\alpha = 0.1$:
 links: Der Fixpunkt ergibt sich durch die Nullstelle t_2 ; die Trajektorie ist punktsymmetrisch zu $P = (q = 0.5, x = 0.05)$, der Impuls p_q nach der Reflexion an einer Wand ist betragsmäßig konstant und der Abstand Δx von $x(q = 0)$ und $q(q = 1)$ zu $x = 0.05$ ist gleich.
 rechts: Der Fixpunkt ergibt sich durch Nullstelle t_1 ; Die beiden Linien entsprechen den beiden Lösungen von (7.11) für die Nullstelle t_1 von $p_x(t)$.

nimum, in diesem Punkt ist damit die kinetische Energie der Trajektorie maximal. Da zum Zeitpunkt der Wandkontakte $p_x = 0$ und nach Gleichung (6.1) für den Systemimpuls $p_q^2 = p_q(0)^2$ gilt, sind potentielle und kinetische Energie in diesen Punkten gleich. Außerdem liegt $x = \alpha/2$ genau zwischen den Punkten $x(0)$ und $x(1)$:

$$x(t_1) = x(q = 1) = \alpha - x(0) \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{2} (x(0) + x(1)) = \frac{\alpha}{2} \quad (7.24)$$

Daher ist die Trajektorie punktsymmetrisch zu P . (Die aufwendige Rechnung für $x(t_1)$ in (7.24) verläuft analog zu den beiden vorhergehenden Rechnungen.) Abbildung 7.3 (links) zeigt schematisch die Punktsymmetrie an einem Beispiel.

Analog lässt sich leicht nachrechnen, dass die Trajektorien, die sich durch die Nullstellen t_1 von $p_x(t)$ ergeben, keine Punktsymmetrie aufweisen. Scheinbar gehen die Trajektorien der beiden Lösungen $\pm x(0)$ in Gleichung (7.11) durch Punktspiegelung an $P = (q = 0.5, x = \alpha/2)$ ineinander über (siehe Abbildung 7.3, rechts).

Kapitel 8.

Bifurkationen und Bifurkationsdiagramme

Im letzten Kapitel wurde die Lage von Fixpunkten 1. Art in Abhängigkeit von α und E berechnet. Mit diesen Ergebnissen lassen sich Bifurkationsdiagramme erstellen, die in diesem Kapitel diskutiert werden. Die Bifurkationsdiagramme geben einen guten Einblick in die Entwicklung des Systems in Abhängigkeit des Bifurkationsparameters.

Mit den Ergebnissen aus Kapitel 7 lassen sich zwei unterschiedliche Arten von Bifurkationsdiagrammen erstellen: Diagramme in Abhängigkeit von E bei konstanter Kopplung α , und Bifurkationsdiagramme in Abhängigkeit von α bei konstanter Energie E . Da in diesem Kapitel nur Zustände auf dem Poincaré-Schnitt betrachtet werden, wird im Folgenden die verkürzte Notation x , p_x anstelle von $x(0)$, $p_x(0)$ verwendet. Um ein Bifurkationsdiagramm zu erstellen, wird einer der beiden Systemparameter α , E als Bifurkationsparameter gewählt, für den anderen wird ein konstanter Wert gewählt. Für verschiedene Werte des Bifurkationsparameters werden alle Fixpunkte 1. Art berechnet und in das Bifurkationsdiagramm eingetragen. Der Bifurkationsparameter wird auf der horizontalen Achse aufgetragen, die Orte x der Fixpunkte auf der vertikalen Achse. Fixpunkte, die sich durch die erste Nullstelle t_1 ergeben, können analytisch über Gleichung (7.11) berechnet werden. Für Fixpunkte, die durch die Nullstelle t_2 entstehen, muss Gleichung (7.16) numerisch gelöst werden. Zusätzlich kann numerisch die Existenz der Fixpunkte überprüft werden, da (7.11) und (7.16) lediglich notwendige Kriterien darstellen. Somit existieren alle Punkte im Bifurkationsdiagramm auch tatsächlich in den entsprechenden Poincaré-Schnitte. Außerdem kann numerisch die Art der Fixpunkte bestimmt werden. Aus dem so erstellten Bifurkationsdiagramm lassen sich dann Ort und Form von Fixpunkten 1. Art ablesen.

Die Abbildungen 8.1, 8.2 und 8.3 zeigen drei Bifurkationsdiagramme. Die Ränder der jeweiligen Poincaré-Schnitte sind als gestrichelte Linien in die Diagramme eingezeichnet. Grüne Punkte entsprechen elliptischen Fixpunkten, die durch die Nullstelle t_1 von $p_x(t)$ entstanden sind, blaue Punkte entsprechen elliptischen Fixpunkten, die durch die Nullstelle t_2 entstanden sind, rote Punkte entsprechen hyperbolischen Fixpunkten. Wird die Steigung für eine Kurve im Bifurkationsdiagramm sehr groß, erscheint die entsprechende Kurve nicht mehr geschlossen. Dies lässt sich an den grünen Kurven um den Schnittpunkt mit der x - bzw. E -Achse oder an den Punkten erkennen, an denen blaue und rote Kurven zusammenlaufen. Ursache sind numerische Effekte: Wird das Bifurkationsdiagramm mit mehr Punkten berechnet, schließen sich die Kurven mehr und mehr. Endet die Kurve für endliche Steigungen, also typischerweise am Rand des Poincaré-Schnitts, ist das kein numerischer Effekt, der Orbit

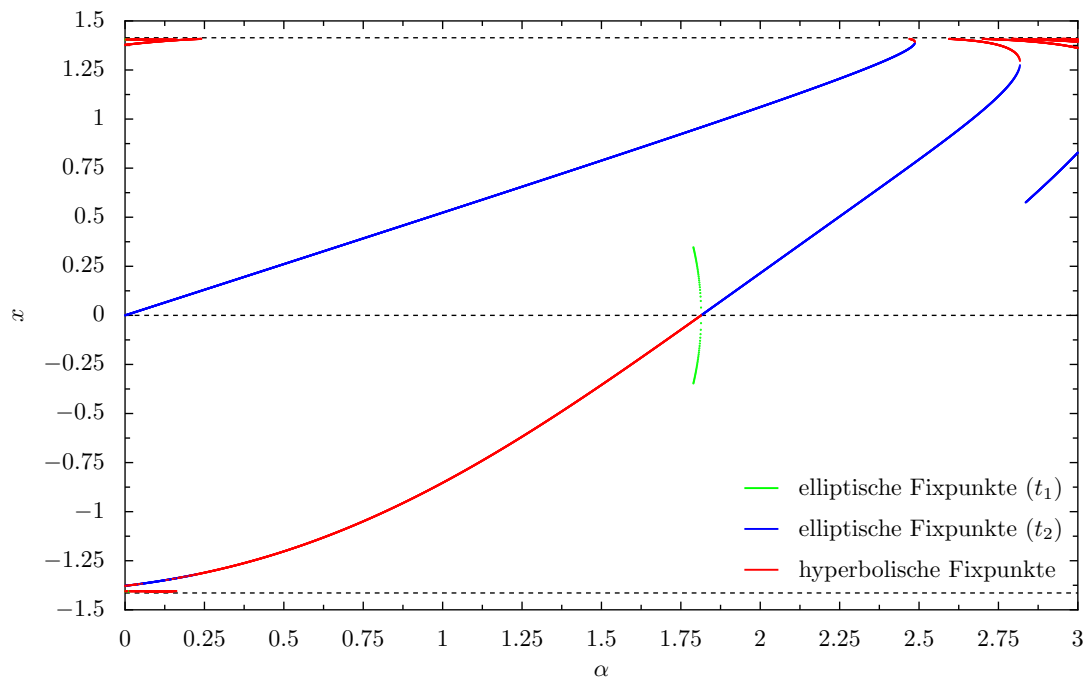


Abbildung 8.1.: Bifurkationsdiagramm für $E = 1$

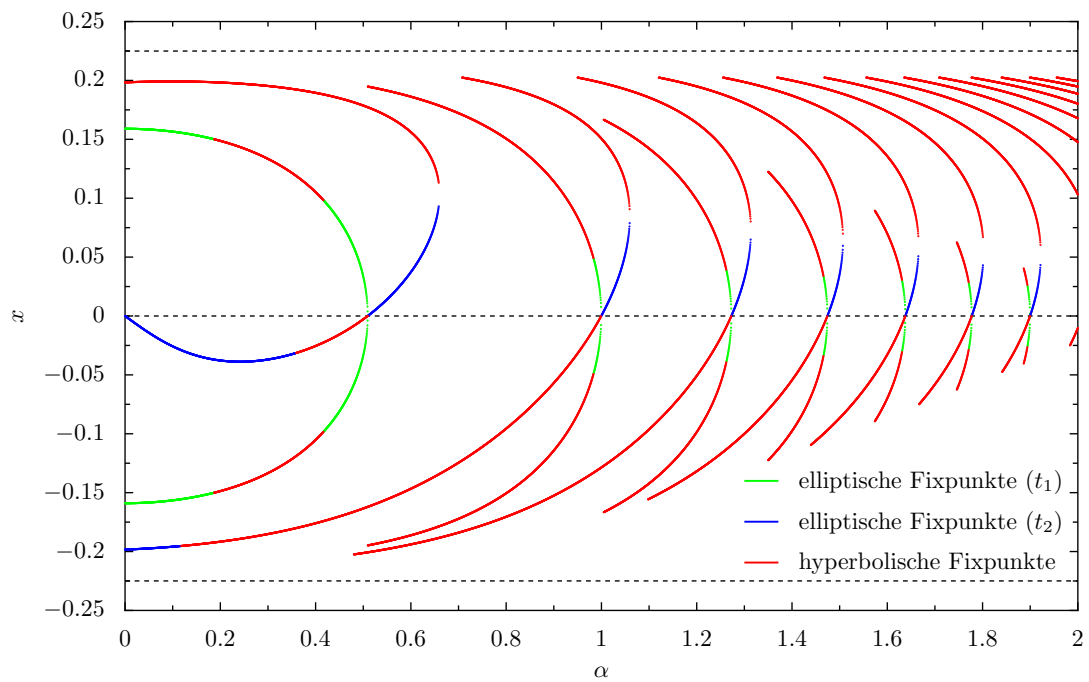


Abbildung 8.2.: Bifurkationsdiagramm für $E = 0.0253$

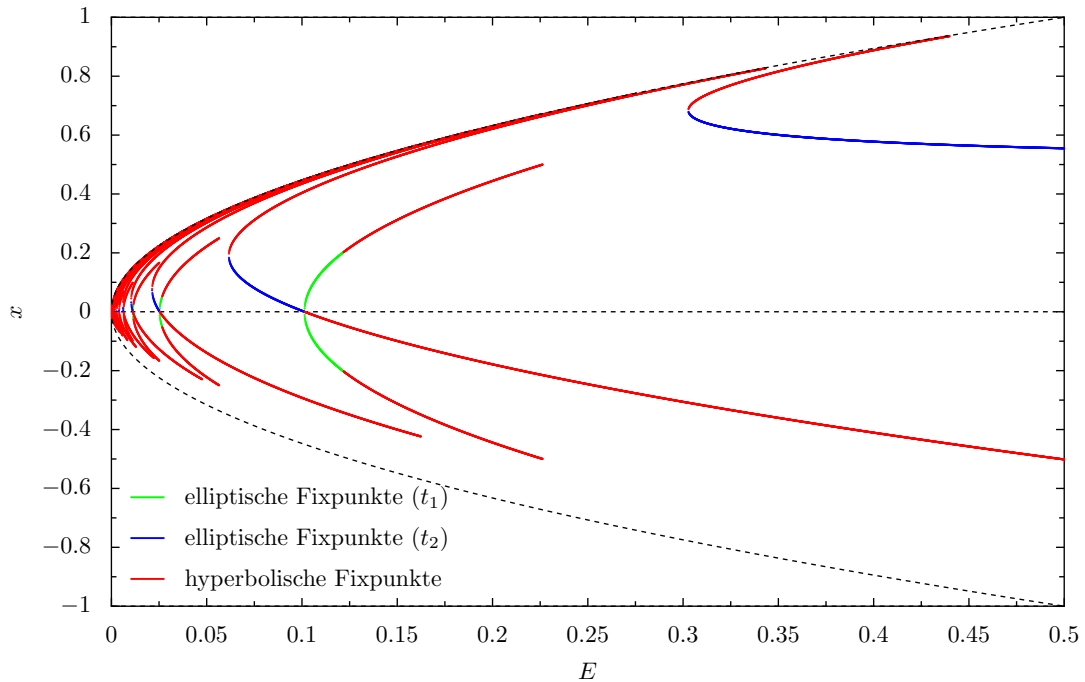


Abbildung 8.3.: Bifurkationsdiagramm für $\alpha = 1$

hört auf zu existieren. Ein Grund kann – wie in Kapitel 6.4 diskutiert – sein, dass die entsprechende Trajektorie plötzlich eine Wand früher berührt oder an einer Wand nicht mehr reflektiert wird.

Die Bifurkationsdiagramme in den Abbildungen 8.1, 8.2 und 8.3 bestätigen einige Überlegungen des letzten Kapitels: Zum einen kann man aus den Diagrammen erkennen, dass die beiden Kurven, die sich aus den beiden Nullstelle von $p_x(t)$ ergeben, sich bei $x = 0$ schneiden. Die Werte der Bifurkationsparameter entsprechen den in Kapitel 7.2 bestimmten Werten α_c und E_c aus (7.14). Weiter zeigen die Bifurkationsdiagramme bei konstanter Energie, dass die Kurve, die durch die Nullstelle t_2 entsteht, am Bifurkationspunkt das Vorzeichen von Minus nach Plus ändert. An dieser Stelle ändert sich der Fixpunkt von hyperbolisch zu elliptisch, was auch andere Bifurkationsdiagramme bestätigen. Möglicherweise handelt es sich um eine superkritische Pitchfork-Bifurkation. Das Bifurkationsdiagramm in Abbildung 8.1 für den Wert $E = 1$ zeigt außerdem, dass der stabile Fixpunkt vom Mittelpunkt des Poincaré-Schnitts bei $\alpha = 0$ (vgl. Kapitel 4) auf der x -Achse an den rechten Rand wandert. Die Steigung der entsprechenden Kurve beträgt für nicht zu große Werte von α den Wert $1/2$. Diese Beobachtungen stimmen mit dem Ergebnis für hohe Energien aus dem Kapitel 7.3 überein.

Abbildung 8.4 zeigt zwei vergrößerte Poincaré-Schnitte bei konstanter Energie $E = 1$ kurz vor und kurz nach der Bifurkation bei $\alpha_c \approx 1.814$, die im Bifurkationsdiagramm in Abbildung 8.1 zu sehen ist. Vor der Bifurkation ist der mittlere Fixpunkt hyperbolisch. Für größere Werte von α wandern die beiden elliptischen Fixpunkte in Richtung des Mittelpunkts, für α_c treffen sich die drei Fixpunkte genau im Mittelpunkt des Poincaré-Schnitts. Nach der Bifurkation, also für $\alpha > \alpha_c$, existiert nur noch ein elliptischer Fixpunkt. Der nun stabile Fixpunkt wird umgeben von sehr langgezogenen Ellipsen. Abbildung 8.5 zeigt, wie sich durch die Bifurkation die Trajektorien der Fixpunkte ändern. Vor der

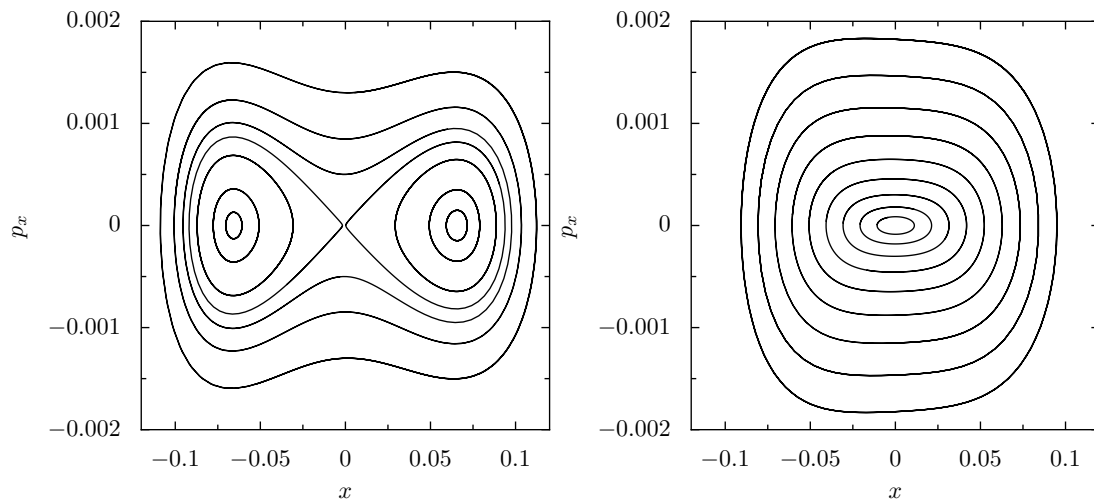


Abbildung 8.4.: Vergrößerte Poincaré-Schnitte für $E = 1$: links für $\alpha = 1.813$ kurz vor, rechts für $\alpha = 1.814$ kurz nach der Bifurkation; in beiden Fällen sind die umgebenen Ellipsen sehr lang gestreckt. Im linken Bild liegen die elliptischen Fixpunkte bei $x \approx \pm 0.066$, der hyperbolische Fixpunkt liegt bei $x \approx -0.001$.

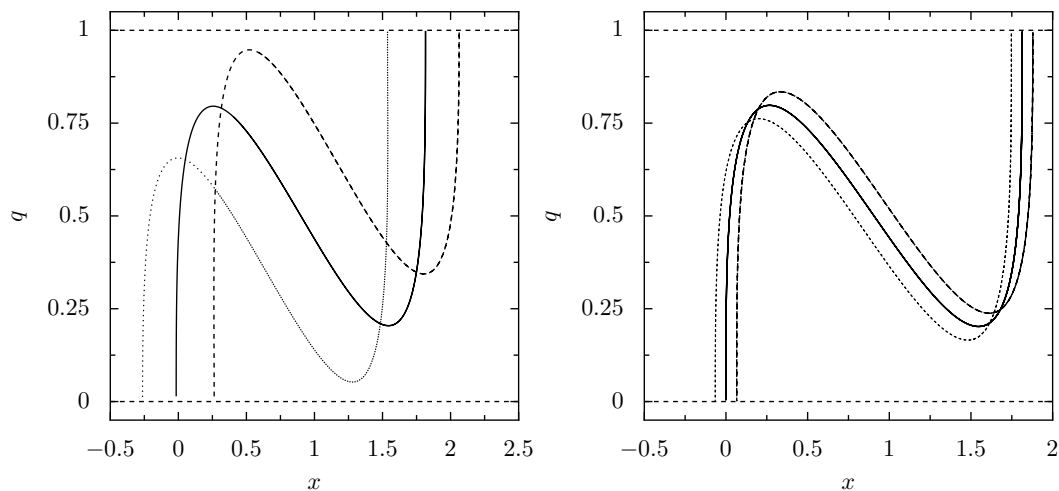


Abbildung 8.5.: Trajektorien der Fixpunkte vor der Bifurkation für $E = 1$ und $\alpha = 1.8$ (links) bzw. $\alpha = 1.813$ (rechts); die drei Trajektorien verschmelzen beim Bifurkationspunkt zu einem periodischen Orbit.

Bifurkation nähern sich die drei Trajektorien mehr und mehr an und verschmelzen bei der Bifurkation.

Kapitel 9.

Numerische Beispiele

In den vorhergehenden Kapiteln wurden allgemeine Eigenschaften chaotischer Hamiltonsysteme vorgestellt, die Gestalt von Fixpunkten der Poincaré-Schnitte qualitativ diskutiert, die Lage von Fixpunkten 1. Art berechnet und daraus Bifurkationsdiagramme erstellt. In diesem Kapitel sollen diese Ergebnisse an zwei numerischen Beispielen veranschaulicht werden. Die beiden Beispiele zeigen die Entwicklung der Poincaré-Schnitte bei konstanter Energie in Abhängigkeit der Kopplung.

9.1. $E = 1$

Der Wert $E = 1$ entspricht einer hohen Energie und der Fixpunkt bewegt sich bei steigender Kopplung vom Mittelpunkt des Poincaré-Schnitts bei $x = p_x = 0$ auf der x -Achse in Richtung des rechten Rands. Für kleine Kopplungen liegt dieser Fixpunkt bei $x \approx \alpha/2$ und dominiert die Gestalt der entsprechenden Poincaré-Schnitte (vgl. Kapitel 7.3 und Abbildung 7.2). Für hohe Kopplungswerte nimmt der chaotische Bereich mehr und mehr zu, in dem viele vereinzelte Inseln liegen, die durch Orbits höherer Periode entstehen.

Die Abbildungen 9.1 und 9.2 zeigen die entsprechenden Poincaré-Schnitte bei ansteigenden Kopplungswerten α , das dazugehörige Bifurkationsdiagramm findet sich in Abbildung 8.1. Ausgehend von der Kopplung $\alpha = 0$ (Abbildung 4.1, links) wandert der elliptische Fixpunkt in der Mitte des Poincaré-Schnitt bei steigender Kopplung langsam auf der x -Achse nach rechts. Dieser Fixpunkt ist umgeben von einem großen regulären Bereich periodischer und quasiperiodischer Orbits. Um den regulären Bereich liegt ein chaotischer Bereich, in dem sich eingebettet ein weiterer elliptischer Fixpunkt in der Nähe des linken Rands befindet. Beide Fixpunkte sind im Bifurkationsdiagramm zu erkennen, es handelt sich daher um Fixpunkte 1. Art. Bei dem Wert $\alpha = 0.1425$ sind beide elliptische Fixpunkte zu erkennen: Der rechte elliptische Fixpunkt liegt bei $x \approx 0.074$, was etwa $\alpha/2 \approx 0.071$ entspricht, am linken Rand liegt kaum mehr zu erkennen der zweite elliptische Fixpunkt bei $x \approx -1.34$, etwas rechts davon ein stabiler Orbit der Periode 3. Für größere Kopplungswerte wechselt der linke Fixpunkt seine Form von elliptisch zu hyperbolisch und ist daher in den Poincaré-Schnitten nicht mehr zu erkennen; der Fixpunkt wird bei $\alpha \approx 1.8$ wieder elliptisch. Ab Kopplungswerten von $\alpha \approx 0.15$ erkennt man eingebettet im regulären Bereich einen elliptischen Orbit der Periode 3, der wohl durch das Poincaré-Birkhoff-Theorem erklärt werden kann. Zwischen den elliptischen Fixpunkten der Periode 3 liegen auch drei dazugehörige hyperbolische Fixpunkte, die sich in den Poincaré-Schnitten

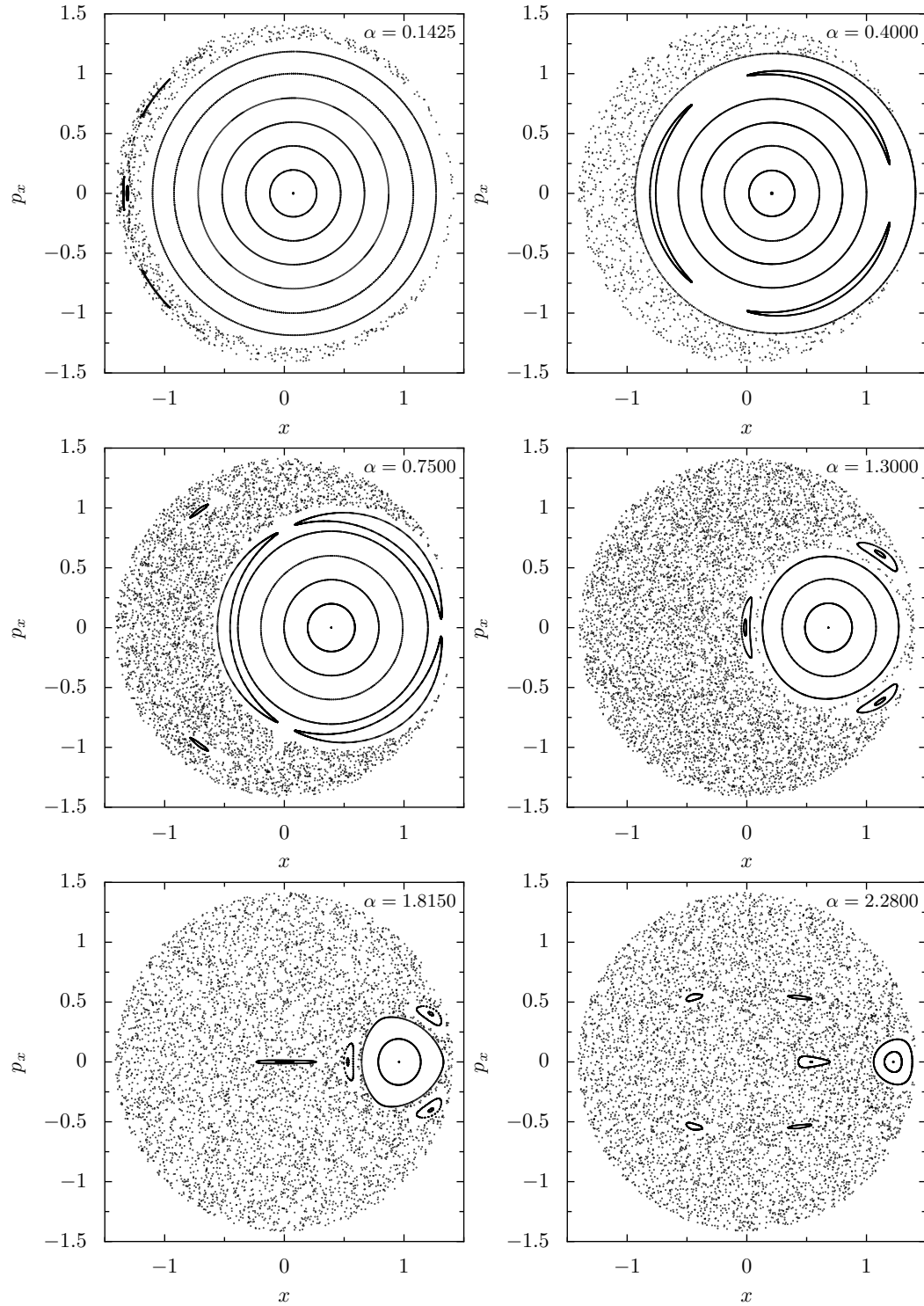


Abbildung 9.1.: Poincaré-Schnitte für $E = 1$ bei verschiedenen Kopplungswerten.

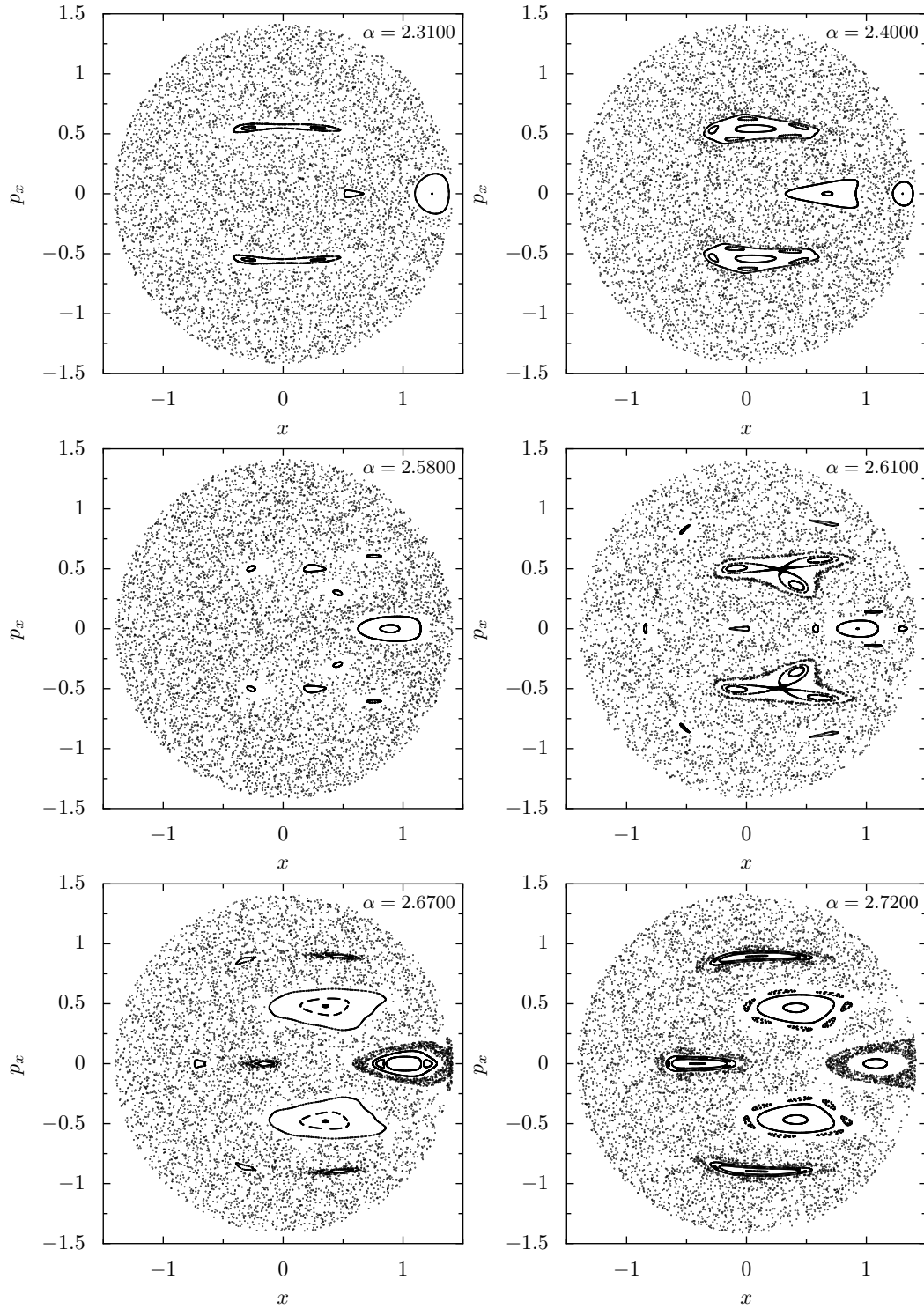


Abbildung 9.2.: Poincaré-Schnitte für $E = 1$ bei verschiedenen Kopplungswerten (Fortsetzung).

erkennen lassen. Es ist anzunehmen, dass diese insgesamt sechs Fixpunkte der Periode 3 schon bei geringeren Werten von α entstehen, im Poincaré-Schnitt aber nicht zu erkennen sind, weil sie die Form einer sehr engen Sichel haben. Bei steigender Kopplung wandert die Fixpunktgruppe weg vom Zentrum und in Richtung Rand des regulären Bereichs und liegt für Werte ab $\alpha \approx 1.3$ im chaotischen Bereich. Fixpunktgruppen, die in einem regulären Bereich entstehen, in einen chaotischen Bereich wandern und sich dort auflösen sind eine typische Erscheinung – gerade bei höheren Kopplungswerten. Umgekehrt entstehen auch Fixpunktgruppen im chaotischen Bereich, wandern in einen regulären Bereich des Poincaré-Schnitts und verschmelzen mit einem elliptischen Fixpunkt. Für $\alpha = 0.75$ ist außerdem ein Periode-2-Orbit zu erkennen, der für $0.73 \lesssim \alpha \lesssim 0.8$ im Poincaré-Schnitt sichtbar ist. Für $\alpha \approx 1.8139$ bifurkieren die drei Fixpunkte 1. Art zu einem elliptischen Fixpunkt. Der Poincaré-Schnitt für $\alpha = 1.815$ kurz nach der Bifurkation zeigt einen langgezogenen regulären Bereich; vergrößerte Poincaré-Schnitte kurz vor und nach der Bifurkation finden sich in Abbildung 8.4.

Nach der Bifurkation werden die Poincaré-Schnitte durch die hohen Kopplungswerte bestimmt. Der elliptische Fixpunkt ist vom Mittelpunkt weit an den rechten Wand gewandert und liegt für $\alpha = 2.28$ bei $x \approx 1.22$, die Näherung für hohe Energien wird in diesem Bereich immer schlechter und liefert für den Ort des Fixpunkts $\alpha/2 = 1.14$. Der durch die Bifurkation entstandene Fixpunkt ist zwar elliptisch, der dazugehörige reguläre Bereich ist aber klein. Die Poincaré-Schnitte sind zum größten Teil chaotisch und weisen erst bei höheren Kopplungswerten wieder größere reguläre Bereiche auf. Durch die hohen Kopplungswerte entstehen Inseln im chaotischen Bereich höherer Perioden, die oft nur für kleine Intervalle von α existieren bzw. elliptisch sind. Für $\alpha = 2.28$ kann man zwei Orbits der Periode 2 erkennen, deren reguläre Bereiche sich bei $\alpha = 2.31$ verbunden haben. Die beiden Fixpunkte der Periode 2 sind bei $\alpha = 2.4$ zu einem Fixpunkt der Periode 2 verschmolzen. Im Poincaré-Schnitt für $\alpha = 2.4$ erkennt man außerdem bereits ohne Vergrößerung selbstähnliche Strukturen. Bei $\alpha = 2.58$ ist der Periode-2-Fixpunkt noch immer erkennbar, aber die beiden regulären Breiche sind umgeben von jeweils drei Inseln eines Periode-6-Orbits. Die beiden Orbits sind bei $\alpha = 2.61$ zu zwei regulären Bereichen, und bei $\alpha = 2.67$ zu einem Fixpunkt der Periode 2 verschmolzen. Das chaotische Gebiet um den regulären Bereich des rechten elliptischen Fixpunkts weist bei den letzten beiden Poincaré-Schnitten ($\alpha = 2.67$ und $\alpha = 2.72$) eine dunklere Farbe auf als der übrige chaotische Bereich. Dies liegt daran, dass Trajektorien in diesem dunklen chaotischen Bereich lange verweilen. Grund dafür kann sein, dass die beiden chaotischen Bereiche getrennt sind und nur numerische Fehler dazu führen, dass Trajektorien vom einen zum anderen Bereich gelangen können.

9.2. $E = 0.0253$

Im Gegensatz zum letzten Beispiel weisen die Poincaré-Schnitte für $E = 0.0253$ ein deutlich anderes Verhalten bei niedrigen Kopplungen auf. Abbildungen 9.3 und 9.4 zeigen die Poincaré-Schnitte in Abhängigkeit der Kopplung, das dazugehörige Bifurkationsdiagramm findet sich in der Abbildung 8.2. Insbesondere ist $E < 1/\pi^2$, so dass der elliptische Fixpunkt vom Mittelpunkt bei $\alpha = 0$ nicht nach rechts, sondern zunächst nach links wandert. Die Steigung der Kurve im Bifurkationsdiagramm berechnet sich aus Gleichung (7.20) bei $\alpha = 0$ für $n = 1$ zu $d/d\alpha = -0.29$. In diesem Bereich ist die Näherung für hohe Energien also absolut unbrauchbar. Für $\alpha = 0.02$ lassen sich der elliptische

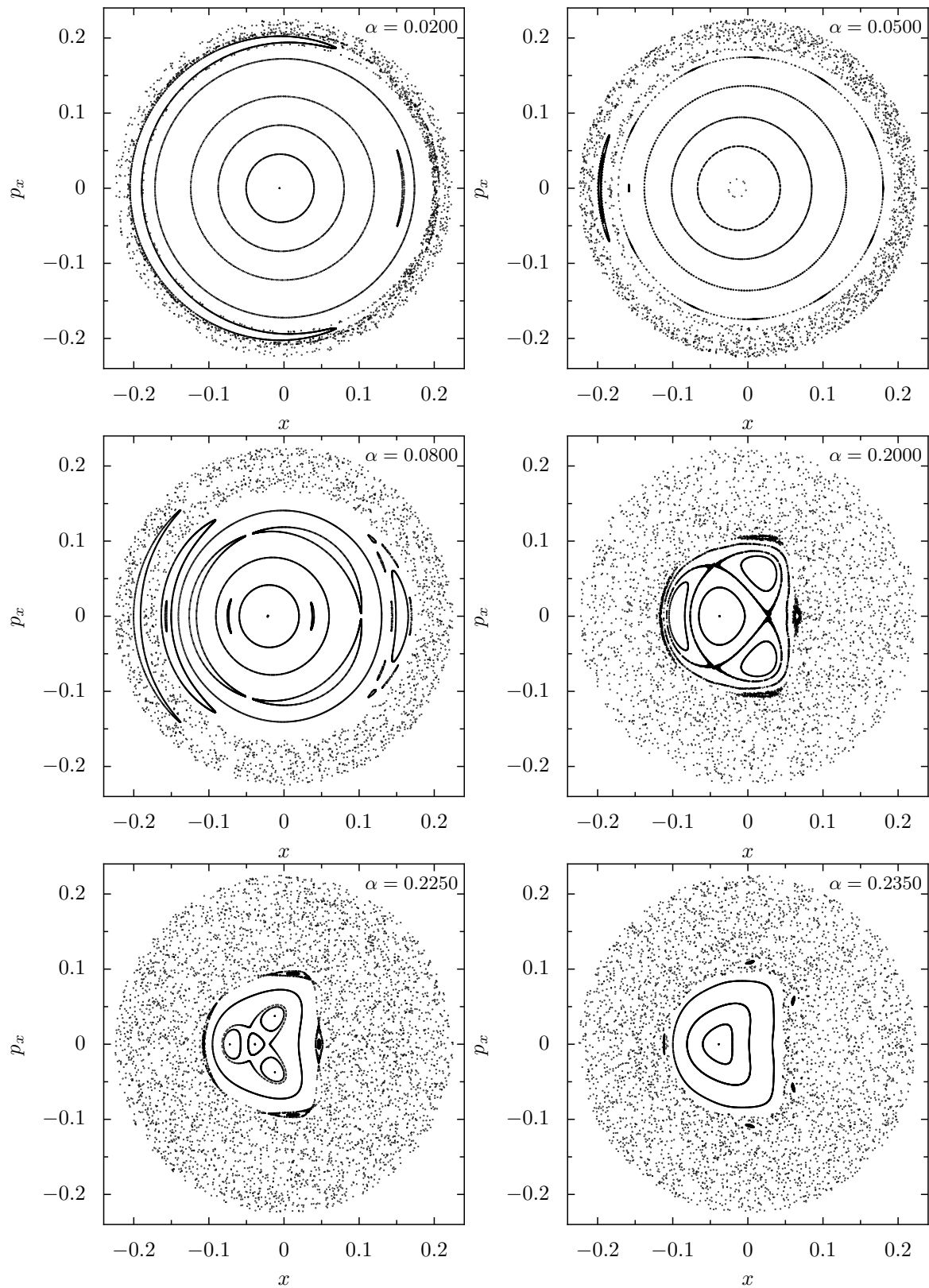


Abbildung 9.3.: Poincaré-Schnitte für $E = 0.0253$ bei verschiedenen Kopplungswerten.

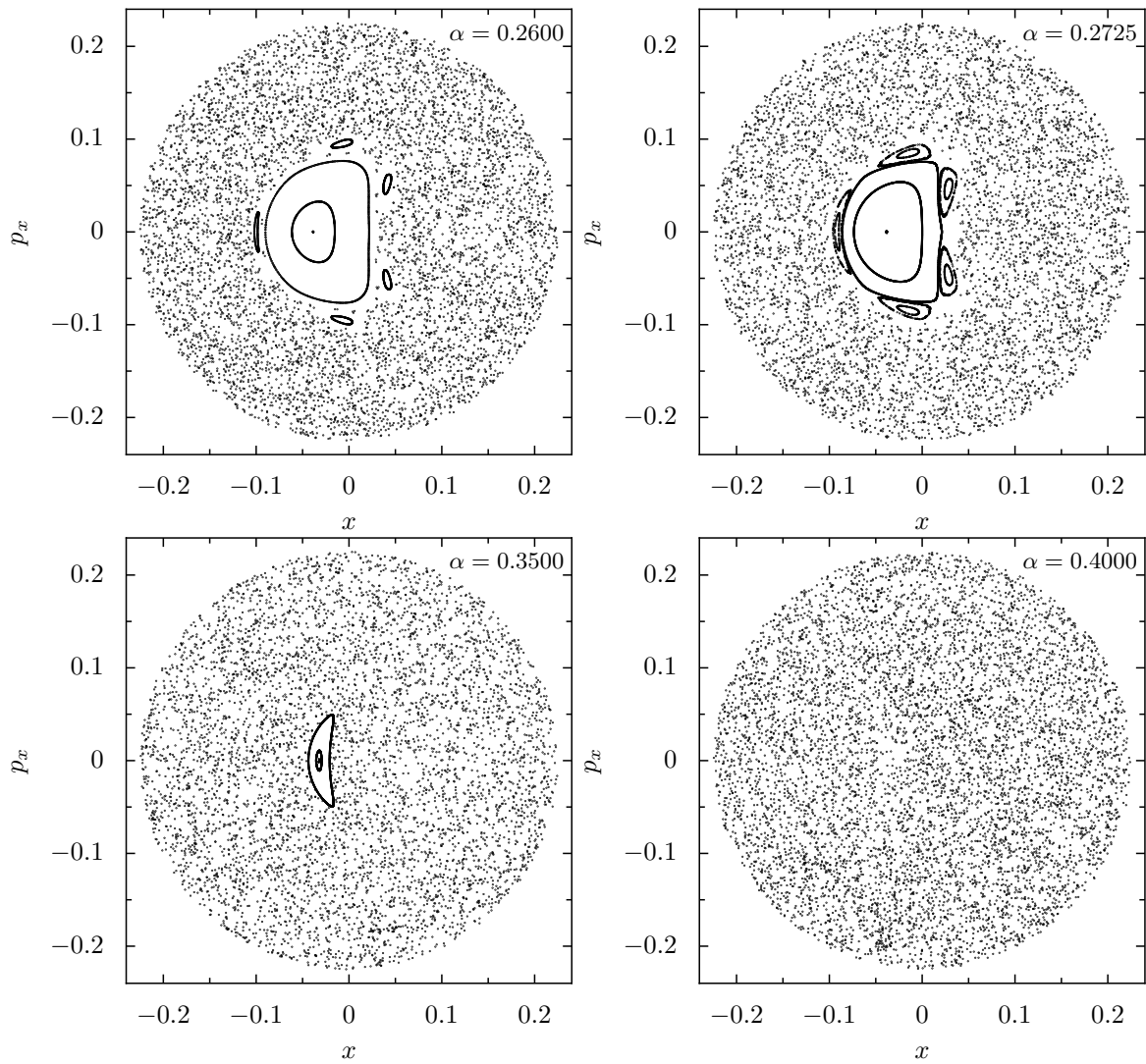


Abbildung 9.4.: Poincaré-Schnitte für $E = 0.0253$ bei verschiedenen Kopplungswerten (Fortsetzung).

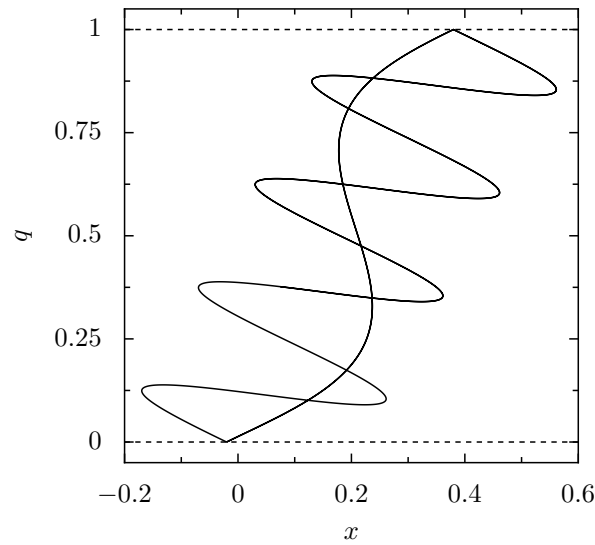


Abbildung 9.5.: Trajektorie für $\alpha = 0.4$ und $E = 0.0253$ mit Anfangsbedingungen $x = -0.02013274$, $p_x = 0.18641394$.

Fixpunkt, der noch ziemlich in der Mitte des Poincaré-Schnitts liegt, sowie zwei weitere Fixpunkte erkennen. Der vierte Fixpunkt, der im Bifurkationsdiagramm zu erkennen ist, liegt bei etwa $x \approx -0.16$ und existiert auch tatsächlich im Poincaré-Schnitt, was man in Vergrößerungen erkennen kann. Ab $\alpha \approx 0.03$ lässt sich im regulären Bereich ein elliptischer Periode-3-Orbit erkennen, der für $\alpha = 0.08$ deutlich sichtbar ist. Wie im vorherigen Beispiel dürfte er durch einen zerfallenen Orbit nach dem Poincaré-Birkhoff-Theorem entstanden sein. Es ist anzunehmen, dass sich im regulären Bereich unendlich vieler solcher periodischer Orbits befinden, aber ohne Vergrößerungen nicht sichtbar sind. Außerdem ist für $\alpha = 0.08$ und $\alpha = 0.2$ gut zu erkennen, dass zwischen den Punkten des elliptischen Orbits hyperbolische Fixpunkte der Periode 3 liegen. Für höhere Werte läuft diese Fixpunktgruppe in Richtung des elliptischen Fixpunkts und ist bei $\alpha = 0.235$ mit ihm verschmolzen. Solche Verschmelzungen wiederholen sich für höhere Kopplungswerte (z.B. $\alpha = 0.26$ und $\alpha = 0.2725$). Für höhere Werte von α nimmt der reguläre Bereich immer weiter ab bis bei $\alpha = 0.4$ der Poincaré-Schnitt fast nur noch aus einem einzigen chaotischen Bereich besteht. Allerdings liegen im Bild nicht sichtbar zwei elliptische Fixpunkte 3. Art bei $x \approx -0.02013274$, $p_x \approx \pm 0.18641394$ mit Eigenwerten $\lambda_{1,2} \approx 0.150372 \pm 0.988635i$. Die Trajektorie ist in Abbildung 9.5 abgebildet.

Bei höheren Kopplungswerten entstehen für einige Intervallen von α wieder größere reguläre Bereiche, das Verhalten unterscheidet sich aber qualitativ nicht vom Fall $E = 1$.

Kapitel 10.

Zusammenfassung und Ausblick

Aus dem Caldeira-Leggett-Modell erhält man nach Reduktion auf einen einzigen Badoszillator die Hamiltonfunktion (3.6) des freien gekoppelten Teilchens. Da die erhaltene Hamiltonfunktion integrierbar ist, können die Bewegungsgleichungen nach einer geeigneten Skalierung, die die numerische Auswertung erleichtert, analytisch gelöst werden. Durch Einführen der Wände wird das Teilchen in eine Box eingesperrt und der Phasenraum kann durch Poincaré-Schnitte untersucht werden. Die Poincaré-Schnitte bestehen für Kopplungswerte $\alpha \neq 0$ aus chaotischen und regulären Bereichen und weisen selbstähnliche Strukturen auf. Um elliptische Fixpunkte existieren Familien periodischer Orbits, die durch Drehungen ineinander übergehen. Eine Untersuchung periodischer Orbits zeigt, dass die meisten Fixpunkte in Poincaré-Schnitten durch senkrechte Reflexion an beiden Wänden entstehen. Für diese Fixpunkte kann die Lage der Fixpunkte im Poincaré-Schnitt berechnet werden, um daraus Bifurkationsdiagramme erstellen zu können. Die Bifurkationsdiagramme geben, obwohl sie nur einen Teil der Fixpunkte beinhalten, einen detaillierten Einblick in das Verhalten des Systems in Abhängigkeit des Bifurkationsparameters. An numerischen Beispielen der Entwicklung von Poincaré-Schnitten in Abhängigkeit der Energie oder der Kopplung können die theoretischen Ergebnisse verifiziert werden. Außerdem zeigen die numerischen Beispiele, dass die Poincaré-Schnitte bei kleinen Kopplungswerten einen großen regulären Bereich aufweisen, der bei ansteigender Kopplung abnimmt. Für große Kopplungen bestehen die Poincaré-Schnitte aus einem großen chaotischen Bereich, in dem viele Inseln liegen, die Orbits hoher Periode entsprechen. Wie Fixpunkte können auch Fixpunkte höherer Periode bifurkieren und ihre Form von elliptisch zu hyperbolisch und umgekehrt ändern. Durch die Wände können periodische Orbits schlagartig entstehen oder zerstört werden, wenn die Trajektorie des Orbits durch Änderung eines Systemparameters an einer Wand früher oder gar nicht mehr reflektiert wird. Viele, aber nicht alle Trajektorien periodischer Orbits weisen im Ortsraum Punktsymmetrie auf.

Trotz dieser Resultate sind noch viele Fragen ungeklärt: Warum sind einige, aber nicht alle Trajektorien periodischer Orbits im Ortsraum punktsymmetrisch? Hängt diese Punktsymmetrie mit grundlegenden Eigenschaften des Systems zusammen? Handelt es sich bei den untersuchten Bifurkationen von Fixpunkten 1. Art tatsächlich um Pitchfork-Bifurkationen? Was passiert qualitativ bei Bifurkationen von Fixpunkten höherer Periode? Lassen sich Bifurkationsdiagramme auch für andere Fixpunktarten oder Fixpunkte höherer Ordnung ähnlich wie für Fixpunkte 1. Art berechnen?

Neben diesen ungeklärten Fragen ist das untersuchte System natürlich nur ein erster Ansatz zur Beschreibung eines freien gedämpften Teilchens in einer Box. Ausgehend von diesen Ergebnissen lässt

sich das System in einer semiklassischen Näherung untersuchen. Dazu betrachtet man Erweiterungen der Gutzwillerschen Spurformel, die klassische Größen der periodischen Orbits wie Periodendauer oder Wirkung mit dem quantenmechanischen oszillierenden Anteil der Zustandsdichte verknüpfen. Die Spurformel von Gutzwiller ist nicht anwendbar, da das System Familien periodischer Orbits besitzt [2]. Hat man das einfache System semiklassisch verstanden, kann eine Hamiltonfunktion mit mehreren Badoszillatoren untersucht werden, die ein freies gekoppeltes Teilchen in einer Box deutlich besser beschreibt.

Anhang A.

Quelltexte und verwendete Software

Die notwendigen Routinen, um die Hamiltonfunktion (3.6) mit Wänden simulieren zu können, wurden zum größten Teil in Python¹ geschrieben. Um die Geschwindigkeit zu erhöhen, wurden performance-kritische Teile in C ausgelagert. Der Umfang der Software umfasst u. a. folgende Programme:

- `poincare-gui.py`: Graphisches Programm zum Erstellen von Poincaré-Schnitten.
- `poincare.py`: Programm zum Erstellen von Poincaré-Schnitten mit Ausgabeformaten PNG und PDF. Das Programm unterstützt auch, die Position der Wände beliebig zu verändern und Poincaré-Schnitte stark zu vergrößern.
- `bifurcations.py`: Erzeugen von Bifurkationsdiagrammen als PDF.
- `data.py`: Das Programm erlaubt das Erzeugen vieler Diagramme und Graphen für beliebige Anfangsbedingungen. U. a. wurde der Verlauf von Trajektorien im Ortsraum mit diesem Programm erstellt.
- `find_fixpoints.py`: Suchen von Fixpunkten beliebiger Periode.

Insgesamt beträgt der Umfang der Quelltexte etwa 5 000 Zeilen.

Prinzipiell sollten die Programme portabel sein und auf allen wichtigen Plattformen laufen, sie wurden aber nur unter Linux ausgeführt und getestet. Die Quelltexte sind unter der GPLv2 lizenziert und können unter <http://speicherleck.de/michael/bachelor/> heruntergeladen werden. Auf dieser Seite finden sich zusätzlich einige Videos von animierten Trajektorien, sowie Videos von Poincaré-Schnitten.

Als Bibliotheken wurden GTK² zum Erstellen von graphischen Oberflächen, NumPy³ vereinzelt zum Lösen numerischer Probleme, sowie PIL⁴ und PyX⁵ zum Erstellen von Graphiken verwendet. Mit Ausnahme von Abbildung 3.1, das mit matplotlib⁶ erstellt wurde, wurde für alle Abbildungen PyX verwendet.

¹<http://www.python.org/>

²<http://www.gtk.org/>

³<http://numpy.scipy.org/>

⁴<http://www.pythonware.com/products/pil/>

⁵<http://pyx.sourceforge.net/>

⁶<http://matplotlib.sourceforge.net/>

Literatur

- [1] J. Agryris, G. Faust und M. Haase. *An Exploration of Chaos*. Elsevier Science Ltd, 1994, S. 73–126. ISBN: 978-0444820020.
- [2] M. Brack und R. K. Bhaduri. *Semiclassical Physics*. 1. Aufl. Addison-Wesley, 1997, S. 207–296. ISBN: 978-0201483512.
- [3] A. O. Caldeira und A. J. Leggett. „Path Integral Approach to Quantum Brownian Motion“. In: *Physica* 121A (1983), S. 587–616.
- [4] S. Fiedler. „Semiklassische Beschreibung dissipativer Systeme in beschränkten Geometrien“. Diplomarbeit. Universität Augsburg, 1998.
- [5] R. C. Hilborn. *Chaos and Nonlinear Dynamics*. 2. Aufl. Oxford University Press, 2001, S. 272–316. ISBN: 978-0198507239.
- [6] G.-L. Ingold. „Path Integrals and Their Application to Dissipative Quantum Systems“. In: *Lecture Notes in Physics* 611 (2002), S. 1–53.
- [7] E. Ott. *Chaos in dynamical systems*. 1. Aufl. Cambridge University Press, 1993, S. 208–265. ISBN: 978-0521432153.
- [8] A. Reuseken und W. Dahmen. *Numerik für Ingenieure und Naturwissenschaftler*. 1. Aufl. Springer, 2006, S. 180–186. ISBN: 978-3-540-25544-4.
- [9] F. Scheck. *Theoretische Mechanik 1*. 8. Aufl. Springer, 2007, S. 149–151. ISBN: 978-3-540-71377-7.
- [10] H. G. Schuster und W. Just. *Deterministic Chaos*. 4. Aufl. Wiley-VCH Verlag, 2005, S. 161–182. ISBN: 3527-40415-5.
- [11] U. Weiss. *Quantum Dissipative Systems*. 2. Aufl. World Scientific Pub Co, 1999, S. 7–27. ISBN: 981-02-4091-0.
- [12] J. Wess. *Theoretische Mechanik*. 2. Aufl. Springer, 2008, S. 56–58. ISBN: 978-3540885740.