

Der Casimireffekt im Streuformalismus

Michael Hartmann

Theoretische Physik I

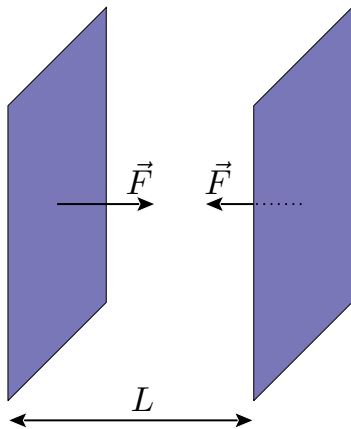
6. Juni 2013

- ① Einleitung und Motivation
 - Casimir-Effekt
 - Geschichte
 - Motivation
- ② Casimir-Effekt in Streutheorie (1D)
- ③ Geometrie Kugel-Platte
 - Geometrie
 - Streutheorie
 - ebene Wellen Basis
 - Fresnel Reflexion
 - Multipol-Basis
 - Mie-Streuung
- ④ Ausblick

Einleitung und Motivation

Casimir-Effekt

Zwei parallele, perfekt leitende Platten im Vakuum üben anziehende Kraft aufeinander aus:

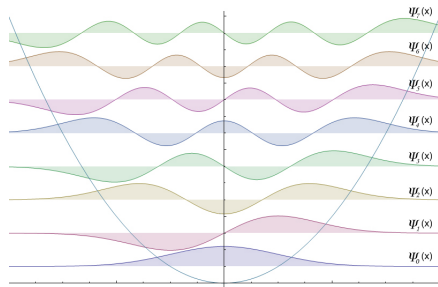


Casimir-Effekt

- Moden des EM-Feldes sind harmonische Oszillatoren:

$$: \hat{H} : = : \sum_{\mathbf{k}, \lambda} \hbar \omega_{\mathbf{k}} \left(a_{\mathbf{k}, \lambda}^{\dagger} a_{\mathbf{k}, \lambda} + \frac{1}{2} \right) : = \sum_{\mathbf{k}, \lambda} \hbar \omega_{\mathbf{k}} \left(a_{\mathbf{k}, \lambda}^{\dagger} a_{\mathbf{k}, \lambda} \right)$$

- „Nullpunktsenergie physikalisch nicht relevant“
- bei Randbedingungen: Änderung der Nullpunktsenergie der Feldoszillatoren



Casimir-Effekt

- Randbedingungen: $\mathbf{E}_{\parallel} = 0$
- Moden zwischen Spiegeln quantisiert, außerhalb kontinuierlich
- Moden bewirken Strahlungsdruck

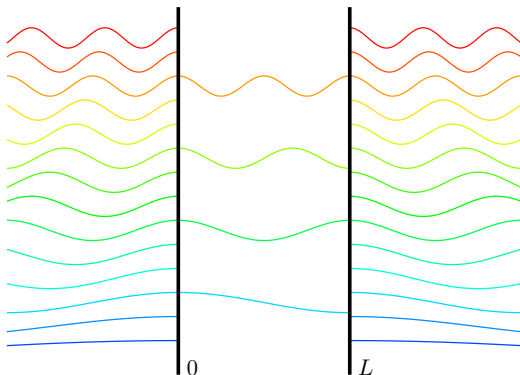
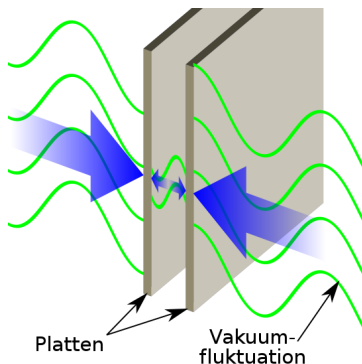


Bild (links): <http://de.wikipedia.org/wiki/Casimir-Effekt>

Geschichte

- 1948 von Hendrik Casimir vorhergesagt¹:

$$F_{\text{Cas}} = -\frac{\pi^2 \hbar c}{240} \frac{A}{L^4}$$

- F_{Cas} hängt nur von Geometrie und Naturkonstanten ab:
 - Platten unendlich groß
 - Platten mit unendlicher Leitfähigkeit
 - $T = 0$
- erste experimentelle Nachweise:
 - Derjaguin, Lifschitz, Abrikosova⁷ (1956)
 - Sparnaay¹⁶ (1958)
- bessere Genauigkeit für Geometrie Platte–Kugel:
 - Lamoreaux^{10,11,17} (1997, 2011)
 - Mohideen et. al.^{12,15,8} (1998–2000)
 - Capasso et. al.² (2001)
 - Decca et. al.^{3,6,9,5,4,13} (2003–2008)

Geschichte

- 1948 von Hendrik Casimir vorhergesagt¹:

$$F_{\text{Cas}} = -\frac{\pi^2 \hbar c}{240} \frac{A}{L^4}$$

- F_{Cas} hängt nur von Geometrie und Naturkonstanten ab:
 - Platten unendlich groß
 - Platten mit unendlicher Leitfähigkeit
 - $T = 0$
- erste experimentelle Nachweise:
 - Derjaguin, Lifschitz, Abrikosova⁷ (1956)
 - Sparnaay¹⁶ (1958)
- bessere Genauigkeit für Geometrie Platte–Kugel:
 - Lamoreaux^{10,11,17} (1997, 2011)
 - Mohideen et. al.^{12,15,8} (1998–2000)
 - Capasso et. al.² (2001)
 - Decca et. al.^{3,6,9,5,4,13} (2003–2008)

Motivation

- Casimir-Kraft dominierend im Sub-Millimeterbereich
- Test der Newton-Gravitation im Millimeterbereich:

$$V = -G \frac{M}{r} \left(1 + \alpha e^{-r/\lambda} \right)$$

- Suche nach weiteren (schwachen) Grundkräften
- Vakuumfluktuationen, Gravitation
- Van-der-Waals-Kräfte

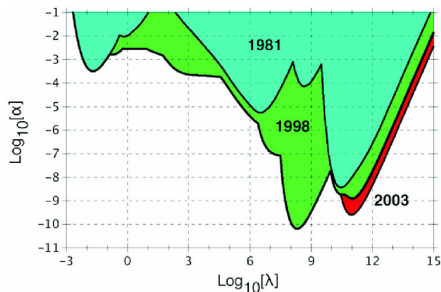


Bild: Casimir forces and non-Newtonian gravitation, Roberto Onofrio, 2006¹⁴

Casimir-Effekt in Streutheorie (1D)

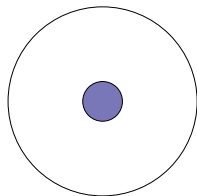
Warum Streutheorie?

Probleme:

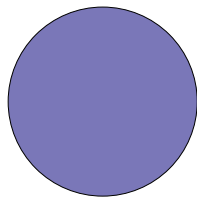
- Endliche Temperatur?
- Unterschiedliche Geometrie?
- Mehrere Objekte?
- endliche Leitfähigkeit?
- Renormierung?
- Oberflächeneffekte?

Lösung:

- Beschreibung durch Streuformalismus



Kugel in Kugel



Kugel-Platte

Grundlagen der Streutheorie

- endliche Streuregion
- Wellenfunktionen:

$$\psi_l = a_1 e^{ikx} + b_1 e^{-ikx}$$

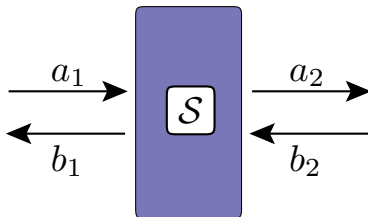
$$\psi_r = a_2 e^{ikx} + b_2 e^{-ikx}$$

- Streumatrix $\mathcal{S}$:

$$\begin{pmatrix} a_2 \\ b_1 \end{pmatrix} = \mathcal{S} \begin{pmatrix} a_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$$

- Transfermatrix $\mathcal{M}$:

$$\begin{pmatrix} a_2 \\ b_2 \end{pmatrix} = \mathcal{M} \begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \end{pmatrix}$$



Grundlagen der Streutheorie

- Streumatrix für Spiegel:

$$\mathcal{S} = \begin{pmatrix} t_2 & r_2 \\ r_1 & t_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t & r \\ r & t \end{pmatrix}$$

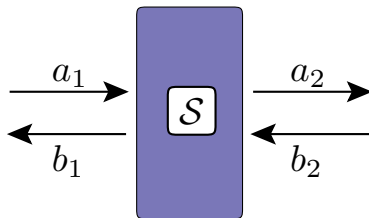
- Wahrscheinlichkeitserhaltung:

$$\mathcal{S}^\dagger \mathcal{S} = 1$$

- Daraus folgt:

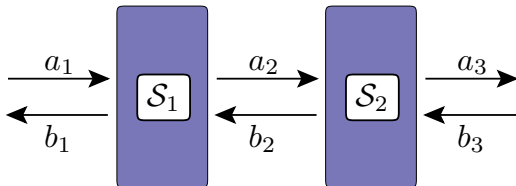
$$|t|^2 + |r|^2 = 1$$

$$rt^* + tr^* = 0$$



Zwei Streuer

- zwei Streuobjekte:



- Transfermatrix:

$$\mathcal{M} = \mathcal{M}_2 \mathcal{M}_1$$

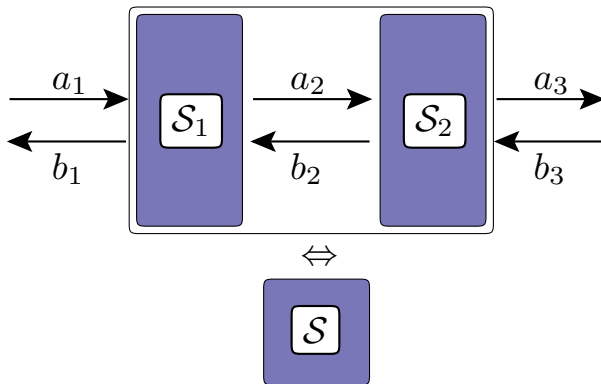
- Zusammenhang zwischen Streu- und Transfermatrix:

$$\mathcal{M} = \frac{1}{S_{22}} \begin{pmatrix} \det \mathcal{S} & S_{12} \\ -S_{21} & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathcal{S} = \frac{1}{\mathcal{M}_{22}} \begin{pmatrix} \det \mathcal{M} & \mathcal{M}_{12} \\ -\mathcal{M}_{21} & 1 \end{pmatrix}$$

kurze Zusammenfassung

Bis jetzt:

- Streuer lassen sich durch eine Streumatrix darstellen
- Umrechnen: Streumatrix $\mathcal{S} \Leftrightarrow$ Transfermatrix $\mathcal{M}$



kurze Zusammenfassung

Bis jetzt:

- Streuer lassen sich durch eine Streumatrix darstellen
- Umrechnen: Streumatrix $\mathcal{S} \Leftrightarrow$ Transfermatrix $\mathcal{M}$



Streumatrix zweier Streuer

- Einsetzen:

$$\mathcal{S} = \begin{pmatrix} \frac{t_1 t_2}{1 - r_1 r_2} & r_2 + \frac{r_1 t_2^2}{1 - r_1 r_2} \\ r_1 + \frac{r_2 t_1^2}{1 - r_1 r_2} & \frac{t_1 t_2}{1 - r_1 r_2} \end{pmatrix}$$

- Nenner sind Geometrische Reihen:

$$\sum_{k=0}^{\infty} (r_1 r_2)^k = \frac{1}{1 - r_1 r_2}$$

Streumatrix zweier Streuer

- Einsetzen:

$$\mathcal{S} = \begin{pmatrix} t_1 t_2 \sum_{k=0}^{\infty} (r_1 r_2)^k & r_2 + r_1 t_2^2 \sum_{k=0}^{\infty} (r_1 r_2)^k \\ r_1 + r_2 t_1^2 \sum_{k=0}^{\infty} (r_1 r_2)^k & t_1 t_2 \sum_{k=0}^{\infty} (r_1 r_2)^k \end{pmatrix}$$

- Nenner sind Geometrische Reihen:

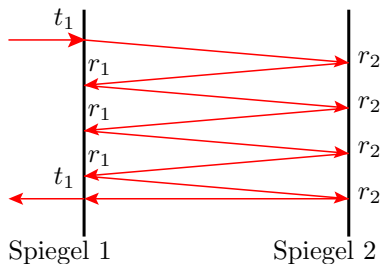
$$\sum_{k=0}^{\infty} (r_1 r_2)^k = \frac{1}{1 - r_1 r_2}$$

Streumatrix zweier Streuer

- Einsetzen:

$$S = \begin{pmatrix} t_1 t_2 \sum_{k=0}^{\infty} (r_1 r_2)^k & r_2 + r_1 t_2^2 \sum_{k=0}^{\infty} (r_1 r_2)^k \\ r_1 + \textcolor{red}{r_2 t_1^2} \sum_{k=0}^{\infty} \textcolor{red}{(r_1 r_2)^k} & t_1 t_2 \sum_{k=0}^{\infty} (r_1 r_2)^k \end{pmatrix}$$

- Beispiel S_{12} , $k = 3$:



Änderung der Vakuumenergie

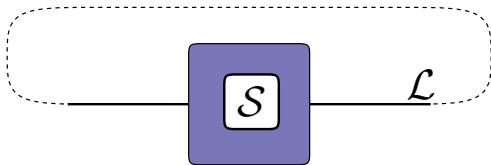
- Streuvorgang mit periodischen Randbedingungen:

$$\mathcal{M}_{\mathcal{L}} \mathcal{M} \begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \end{pmatrix} \stackrel{!}{=} \begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \end{pmatrix}$$

- Transfermatrix der Propagation:

$$\mathcal{M}_{\mathcal{L}} = \begin{pmatrix} e^{ik\mathcal{L}} & 0 \\ 0 & e^{-ik\mathcal{L}} \end{pmatrix}$$

- am Ende: $\mathcal{L} \rightarrow \infty$



Änderung der Vakuumenergie

- Eigenwertbedingung:

$$\begin{aligned}\det(1 - \mathcal{M}_{\mathcal{L}}\mathcal{M}) &\stackrel{!}{=} 0 \\ \Leftrightarrow e^{-ik_{\pm}\mathcal{L}} &= t \pm \sqrt{t^2 - \det S} \\ \Leftrightarrow k_{\pm} &= \frac{i}{\mathcal{L}} \ln \left(t \pm \sqrt{t^2 - \det S} \right) + \frac{2\pi n}{\mathcal{L}}, \quad n \in \mathbb{N}\end{aligned}$$

- Summe

$$k_+ + k_- = 2\frac{2\pi n}{\mathcal{L}} + \underbrace{\frac{i}{\mathcal{L}} \ln \det S}_{=\Delta k_+ + \Delta k_-}, \quad n \in \mathbb{N}$$

- Änderung der Vakuumenergie:

$$\Delta E_{\text{vac}} = \sum_{\omega} \frac{\hbar\omega}{2} = \frac{\hbar c}{2} \sum_n (\Delta k_+ + \Delta k_-)$$

Änderung der Vakuumenergie

- Summe

$$k_+ + k_- = 2 \frac{2\pi n}{\mathcal{L}} + \underbrace{\frac{i}{\mathcal{L}} \ln \det S}_{=\Delta k_+ + \Delta k_-}, \quad n \in \mathbb{N}$$

- Änderung der Vakuumenergie:

$$\begin{aligned} \Delta E_{\text{vac}} &= \sum_{\omega} \frac{\hbar \omega}{2} = \frac{\hbar c}{2} \sum_n (\Delta k_+ + \Delta k_-) \\ &= \frac{\hbar c}{2} \sum_n \frac{2\pi}{\mathcal{L}} \frac{i}{2\pi} \ln \det S \\ &\stackrel{\mathcal{L} \rightarrow \infty}{=} \frac{i\hbar c}{4\pi} \int_0^\infty dk \ln \det S \end{aligned}$$

Transfermatrix für zwei Streuer

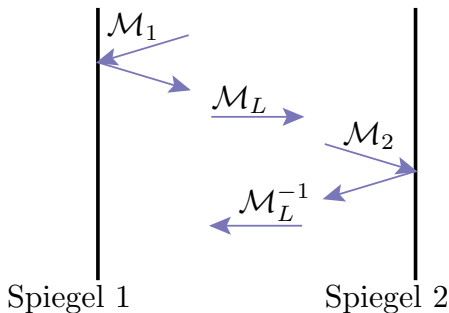
$$\mathcal{M} = \mathcal{M}_L^{-1} \mathcal{M}_2 \mathcal{M}_L \mathcal{M}_1$$

$\mathcal{M}_1$: Streuung an Spiegel 1

$\mathcal{M}_L$: Propagation Spiegel 1 $\rightarrow$ Spiegel 2

$\mathcal{M}_2$: Streuung an Spiegel 2

$\mathcal{M}_L^{-1}$: Propagation Spiegel 2 $\rightarrow$ Spiegel 1



Casimir-Kraft

- gleiche Spiegel:

$$r_1 = r_2 = r$$

- Auswerten der Matrixmultiplikationen:

$$\begin{aligned}\det \mathcal{S} &= \frac{\det(\mathcal{S}_1) \det(\mathcal{S}_2) - r^2 \exp(-2ikL)}{1 - r^2 \exp(2ikL)} \\ &= \det(\mathcal{S}_1) \det(\mathcal{S}_2) \frac{1 - [r^2 \exp(-2ikL)]^*}{1 - r^2 \exp(2ikL)}\end{aligned}$$

- Änderung der Vakuumenergie:

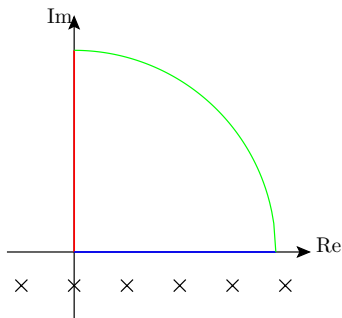
$$\Delta E_{\text{vac}}(L) = \frac{i\hbar c}{4\pi} \int_0^\infty dk \ln \left(\frac{1 - [r^2 \exp(2ikL)]^*}{1 - r^2 \exp(2ikL)} \right)$$

Casimir-Kraft (2)

- Änderung der Vakuumenergie:

$$\Delta E_{\text{vac}} = \frac{i\hbar c}{4\pi} \int_0^\infty dk \ln \left(\frac{1 - [r^2 \exp(2ikL)]^*}{1 - r^2 \exp(2ikL)} \right)$$

- Pole in der unteren komplexen Halbebene:



- Integration entlang der Im-Achse

Casimir-Kraft (3)

- Substitution:

$$k = \frac{ix}{2L}$$

- Casimir-Kraft:

$$F = -\frac{\hbar c}{4\pi L^2} \int_0^\infty dx x \frac{r^2 \exp(-x)}{1 - r^2 \exp(-x)}$$

- Reflexionskoeffizient:

$$r = -1$$

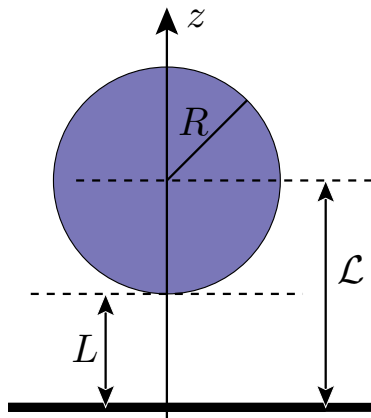
- Casimir-Kraft für perfekte Spiegel (1D):

$$F = -\frac{\hbar c \pi}{24L^2}$$

Geometrie Kugel–Platte

Geometrie Kugel-Platte

- R : Radius der Kugel
- L : Abstand Kugel-Platte
- $\mathcal{L}$: Abstand Kugelmitte-Platte
- $\mathcal{L} = L + R$



Längenskalen

Geometrie:

- Abstand Kugel–Platte L
- Radius der Kugel R

Temperatur:

- thermische Wellenlänge $\lambda_T = \frac{\hbar c}{k_B T}$

Spiegel:

- Plasmawellenlänge $\lambda_P = \frac{2\pi c}{\omega_p}$
- Relaxationswellenlänge $\lambda_\gamma = \frac{2\pi c}{\gamma}$

- Freie Energie:

$$\mathcal{F} = k_{\text{B}} T \sum_{n=0}^{\infty} \ln \det (1 - \mathcal{M}(\xi_n))$$

- Roundtrip-Operator:

$$\mathcal{M}(\xi) = \mathcal{R}_{\text{S}}(\xi) e^{-\mathcal{K}(\xi)\mathcal{L}} \mathcal{R}_{\text{P}}(\xi) e^{-\mathcal{K}(\xi)\mathcal{L}}$$

- Matsubara-Frequenzen:

$$\xi_n = \frac{2\pi n k_{\text{B}} T}{\hbar}, \quad n \geq 0$$

Streutheorie: Kugel-Platte

- Rotationssymmetrie um z-Achse:

$$\mathcal{M}^{(m)} = \begin{pmatrix} \mathcal{M}^{(m)}(E, E) & \mathcal{M}^{(m)}(E, M) \\ \mathcal{M}^{(m)}(M, E) & \mathcal{M}^{(m)}(M, M) \end{pmatrix}$$

- Roundtrip-Operator:

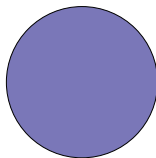
$$\begin{aligned} \mathcal{M}^{(m)}(\xi) = & \int d^2\mathbf{k} \sum_{p=\text{TE, TM}} \langle l_1, m, P_1 | \mathcal{R}_S(\xi) | \mathbf{k}, +, p \rangle \\ & \times r_p(\mathbf{k}, \xi) e^{-2k_{\parallel} \mathcal{L}} \langle \mathbf{k}, -, p | l_2, m, P_2 \rangle \end{aligned}$$

- Freie Energie:

$$\mathcal{F} = 2k_{\text{B}}T \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \ln \det \left(1 - \mathcal{M}^{(m)}(\xi_n) \right)$$

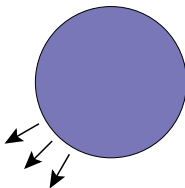
Roundtrip-Operator

$$\begin{aligned}\mathcal{M}^{(m)}(\xi) = & \int d^2\mathbf{k} \sum_{p=\text{TE, TM}} \langle l_1, m, P_1 | \mathcal{R}_S(\xi) | \mathbf{k}, +, p \rangle e^{-k_{\parallel} \mathcal{L}} \\ & \times r_p(\mathbf{k}, \xi) e^{-k_{\parallel} \mathcal{L}} \langle \mathbf{k}, -, p | l_2, m, P_2 \rangle\end{aligned}$$



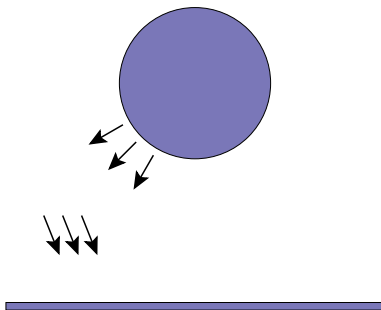
Roundtrip-Operator

$$\begin{aligned}\mathcal{M}^{(m)}(\xi) = & \int d^2\mathbf{k} \sum_{p=\text{TE},\text{TM}} \langle l_1, m, P_1 | \mathcal{R}_S(\xi) | \mathbf{k}, +, p \rangle e^{-k_{\parallel} \mathcal{L}} \\ & \times r_p(\mathbf{k}, \xi) e^{-k_{\parallel} \mathcal{L}} \langle \mathbf{k}, -, p | l_2, m, P_2 \rangle\end{aligned}$$



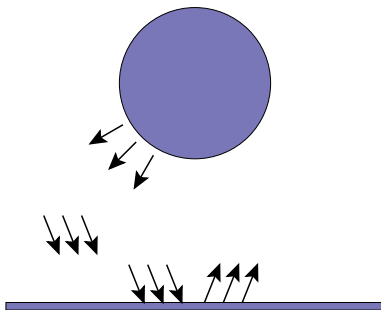
Roundtrip-Operator

$$\begin{aligned}\mathcal{M}^{(m)}(\xi) = & \int d^2\mathbf{k} \sum_{p=\text{TE, TM}} \langle l_1, m, P_1 | \mathcal{R}_S(\xi) | \mathbf{k}, +, p \rangle e^{-k_{\parallel} \mathcal{L}} \\ & \times r_p(\mathbf{k}, \xi) e^{-k_{\parallel} \mathcal{L}} \langle \mathbf{k}, -, p | l_2, m, P_2 \rangle\end{aligned}$$



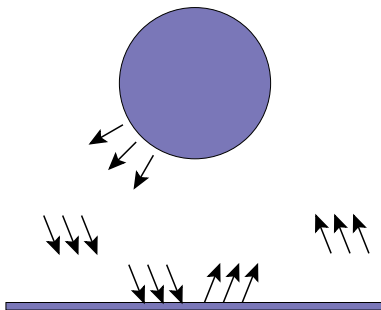
Roundtrip-Operator

$$\begin{aligned}\mathcal{M}^{(m)}(\xi) = & \int d^2\mathbf{k} \sum_{p=\text{TE, TM}} \langle l_1, m, P_1 | \mathcal{R}_S(\xi) | \mathbf{k}, +, p \rangle e^{-k_{\parallel} \mathcal{L}} \\ & \times r_p(\mathbf{k}, \xi) e^{-k_{\parallel} \mathcal{L}} \langle \mathbf{k}, -, p | l_2, m, P_2 \rangle\end{aligned}$$



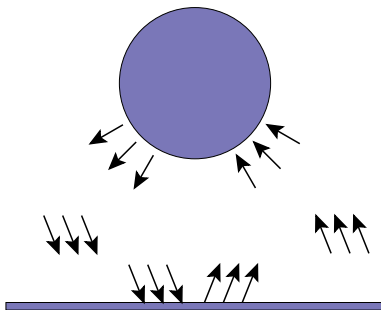
Roundtrip-Operator

$$\begin{aligned}\mathcal{M}^{(m)}(\xi) = & \int d^2\mathbf{k} \sum_{p=\text{TE, TM}} \langle l_1, m, P_1 | \mathcal{R}_S(\xi) | \mathbf{k}, +, p \rangle e^{-k_{\parallel} \mathcal{L}} \\ & \times r_p(\mathbf{k}, \xi) e^{-k_{\parallel} \mathcal{L}} \langle \mathbf{k}, -, p | l_2, m, P_2 \rangle\end{aligned}$$



Roundtrip-Operator

$$\begin{aligned}\mathcal{M}^{(m)}(\xi) = & \int d^2\mathbf{k} \sum_{p=\text{TE, TM}} \langle l_1, m, P_1 | \mathcal{R}_S(\xi) | \mathbf{k}, +, p \rangle e^{-k_{\parallel} \mathcal{L}} \\ & \times r_p(\mathbf{k}, \xi) e^{-k_{\parallel} \mathcal{L}} \langle \mathbf{k}, -, p | l_2, m, P_2 \rangle\end{aligned}$$



EM-Wellen im Vakuum

- Wellengleichung im Vakuum:

$$\Delta \mathbf{E} - \frac{1}{c^2} \partial_t^2 \mathbf{E} = 0$$

- ebene Wellen als Lösungen:

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t)}$$

- Divergenzfreiheit:

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = 0$$

- Dispersion:

$$\omega = |\mathbf{k}|c$$

Ebene Wellen Basis

- Idee: Zerlegung in Felder mit $E_z = 0$ und $H_z = 0$
- Transversal Elektrisch (TE): $E_z = 0$

$$\begin{aligned}\nabla \cdot \mathbf{E} &= E_x k_x + E_y k_y \\ \Rightarrow E_y &= -\frac{E_x k_x}{k_y}\end{aligned}$$

- Basisvektor:

$$\mathbf{E}_{\text{TE}}(\mathbf{r}) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2} k_{\parallel}} \sqrt{\frac{\omega}{k_z}} \begin{pmatrix} k_y \\ -k_x \\ 0 \end{pmatrix} e^{i(\mathbf{k}_{\parallel} \cdot \mathbf{r} \pm k_z z - \omega t)}$$

Ebene Wellen Basis

- Idee: Zerlegung in Felder mit $E_z = 0$ und $H_z = 0$
- Transversal Elektrisch (TE): $E_z = 0$

$$\begin{aligned}\nabla \cdot \mathbf{E} &= E_x k_x + E_y k_y \\ \Rightarrow E_y &= -\frac{E_x k_x}{k_y}\end{aligned}$$

- Basisvektor:

$$\mathbf{E}_{\text{TE}}(\mathbf{r}) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \sqrt{\frac{\omega}{k_z}} \mathbf{e}_\phi e^{i(\mathbf{k}_\parallel \cdot \mathbf{r} \pm k_z z - \omega t)}$$

Ebene Wellen Basis

- Idee: Zerlegung in Felder mit $E_z = 0$ und $H_z = 0$
- Transversal Elektrisch (TE): $E_z = 0$

$$\begin{aligned}\nabla \cdot \mathbf{E} &= E_x k_x + E_y k_y \\ \Rightarrow E_y &= -\frac{E_x k_x}{k_y}\end{aligned}$$

- Basisvektor:

$$|\mathbf{k}_{\parallel}, \pm, \omega, \text{TE}\rangle := \mathbf{E}_{\text{TE}}(\mathbf{r}) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \sqrt{\frac{\omega}{k_z}} \mathbf{e}_{\phi} e^{i(\mathbf{k}_{\parallel} \cdot \mathbf{r} \pm k_z z - \omega t)}$$

Ebene Wellen Basis

- Idee: Zerlegung in Felder mit $E_z = 0$ und $H_z = 0$
- Transversal Elektrisch (TE): $E_z = 0$

$$\begin{aligned}\nabla \cdot \mathbf{E} &= E_x k_x + E_y k_y \\ \Rightarrow E_y &= -\frac{E_x k_x}{k_y}\end{aligned}$$

- Basisvektor:

$$|\mathbf{k}_{\parallel}, \pm, \omega, \text{TE}\rangle := \mathbf{E}_{\text{TE}}(\mathbf{r}) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \sqrt{\frac{\omega}{k_z}} \mathbf{e}_{\phi} e^{i(\mathbf{k}_{\parallel} \cdot \mathbf{r} \pm k_z z - \omega t)}$$

- analog für TM:

$$|\mathbf{k}_{\parallel}, \pm, \omega, \text{TM}\rangle := \mathbf{E}_{\text{TM}}(\mathbf{r}) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \sqrt{\frac{\omega}{k_z}} \mathbf{e}_{\theta} e^{i(\mathbf{k}_{\parallel} \cdot \mathbf{r} \pm k_z z - \omega t)}$$

Normierung, Entwicklung

- Basisvektoren:

$$\mathbf{E}_P(r) = |\mathbf{k}_{\parallel}, \pm, \omega, P\rangle, \quad P = \{\text{TE}, \text{TM}\}$$

- Normierung:

$$\langle \mathbf{k}'_{\parallel}, \pm, P_1 | \mathbf{k}_{\parallel}, \pm, P_2 \rangle = \delta_{P_1, P_2} \delta(\mathbf{k}'_{\parallel} - \mathbf{k}_{\parallel}) \delta(\omega' - \omega)$$

- Entwicklung:

$$\mathbf{E} = \int_0^{\infty} d^2k \left(c_{\text{TE}}(\mathbf{k}_{\parallel}) |\mathbf{k}_{\parallel}, \pm, \text{TE}\rangle + c_{\text{TM}}(\mathbf{k}_{\parallel}) |\mathbf{k}_{\parallel}, \pm, \text{TM}\rangle \right)$$

Fresnel Reflexion

- für nichtmagnetische Materialien:

$$\mu_r = 1$$

- Reflexion TE-Anteil:

$$r_{\text{TE}} = \frac{1 - \sqrt{1 + \frac{\epsilon(\omega) - 1}{\cos^2 \theta_K}}}{1 + \sqrt{1 + \frac{\epsilon(\omega) - 1}{\cos^2 \theta_K}}}$$

- Reflexion TM-Anteil:

$$r_{\text{TM}} = \frac{\epsilon(\omega) - \sqrt{1 + \frac{\epsilon(\omega) - 1}{\cos^2 \theta_K}}}{\epsilon(\omega) + \sqrt{1 + \frac{\epsilon(\omega) - 1}{\cos^2 \theta_K}}}$$

- mit

$$\cos \theta_K = \frac{k_z}{\omega/c}$$

Fresnel Reflexion

- für nichtmagnetische Materialien:

$$\mu_r = 1$$

- Reflexion TE-Anteil:

$$r_{\text{TE}} = \frac{1 - \sqrt{1 + \frac{\epsilon(\omega) - 1}{\cos^2 \theta_K}}}{1 + \sqrt{1 + \frac{\epsilon(\omega) - 1}{\cos^2 \theta_K}}} \stackrel{\epsilon \rightarrow \infty}{=} -1$$

- Reflexion TM-Anteil:

$$r_{\text{TM}} = \frac{\epsilon(\omega) - \sqrt{1 + \frac{\epsilon(\omega) - 1}{\cos^2 \theta_K}}}{\epsilon(\omega) + \sqrt{1 + \frac{\epsilon(\omega) - 1}{\cos^2 \theta_K}}} \stackrel{\epsilon \rightarrow \infty}{=} +1$$

- mit

$$\cos \theta_K = \frac{k_z}{\omega/c}$$

Multipol Basis

- Maxwellgleichungen im Vakuum äquivalent zu:

$$(\Delta + k^2) \mathbf{E} = 0, \quad \nabla \cdot \mathbf{E} = 0$$

- Lösung des Radialanteils:

$$R_l = C_1 j_l(kr) + C_2 y_l(kr)$$

- Lösung des Winkelanteils:

$$\mathbf{Z}_{lm}(\theta, \phi) = \left(\mathbf{e}_\theta \partial_\theta + \frac{\mathbf{e}_\phi}{\sin \theta} \partial_\phi \right) \frac{Y_{lm}(\hat{\mathbf{k}})}{\sqrt{l(l+1)}}$$

$$\mathbf{X}_{lm}(\theta, \phi) = \left(\mathbf{e}_\phi \partial_\theta - \frac{\mathbf{e}_\theta}{\sin \theta} \partial_\phi \right) \frac{Y_{lm}(\hat{\mathbf{k}})}{\sqrt{l(l+1)}}$$

Multipol Basis

- Maxwellgleichungen im Vakuum äquivalent zu:

$$(\Delta + k^2) \mathbf{E} = 0, \quad \nabla \cdot \mathbf{E} = 0$$

- Lösung des Radialanteils:

$$R_l = C_1 j_l(kr) + C_2 y_l(kr)$$

- Lösung des Winkelanteils:

$$|l, m, \omega, E\rangle := \mathbf{Z}_{lm}(\theta, \phi) = \left(\mathbf{e}_\theta \partial_\theta + \frac{\mathbf{e}_\phi}{\sin \theta} \partial_\phi \right) \frac{Y_{lm}(\hat{\mathbf{k}})}{\sqrt{l(l+1)}}$$

$$|l, m, \omega, E\rangle := \mathbf{X}_{lm}(\theta, \phi) = \left(\mathbf{e}_\phi \partial_\theta - \frac{\mathbf{e}_\theta}{\sin \theta} \partial_\phi \right) \frac{Y_{lm}(\hat{\mathbf{k}})}{\sqrt{l(l+1)}}$$

Multipol Basis

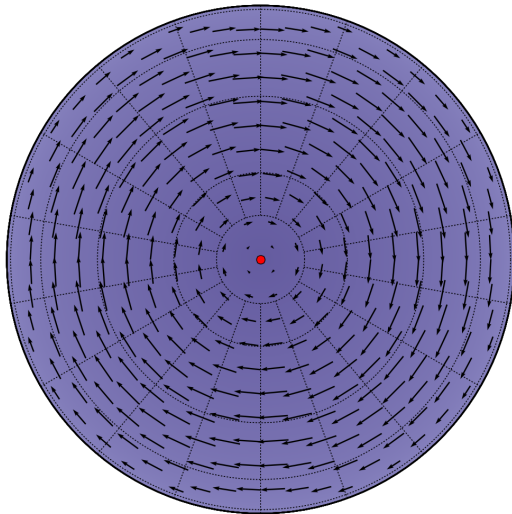
- Y_{lm} bilden VONS für skalare Funktionen:

$$f(\theta, \phi) = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l c_{lm} Y_{lm}(\theta, \phi)$$

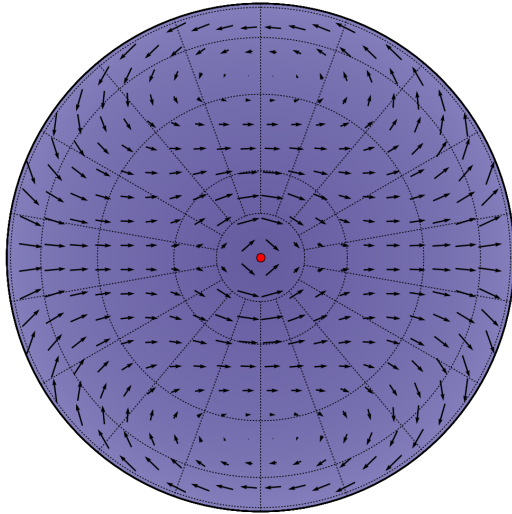
- analog: $\mathbf{X}_{lm}$, $\mathbf{Z}_{lm}$ bilden VONS auf der Sphäre
- Entwicklung nach VSH:

$$\mathbf{E}(\theta, \phi) = \sum_{l=1}^{\infty} \sum_{m=-l}^l (a_{lm} \mathbf{X}_{lm} + b_{lm} \mathbf{Z}_{lm})$$

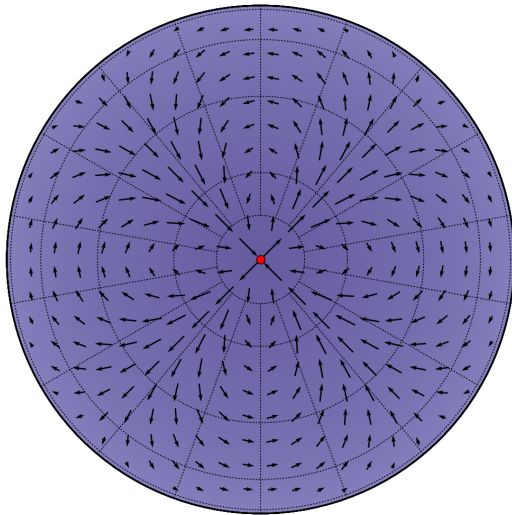
Beispiel $\mathbf{X}_{20}(\theta, \phi)$



Beispiel $\mathbf{X}_{21}(\theta, \phi)$



Beispiel $\mathbf{X}_{22}(\theta, \phi)$



Beispiel $\mathbf{X}_{11}(\theta, \phi)$

Mie-Streuung

- Streuung von EM-Wellen an Kugel
- Einfall in z-Richtung
- Mie-Koeffizienten diagonal in $\langle l', m', P' | l, m, P \rangle$:

$$\langle lmE | lmE \rangle = -\frac{\pi}{2} \frac{I_{l+1/2}(kR)}{K_{l+1/2}(kR)}$$

$$\langle lmM | lmM \rangle = -\frac{\pi}{2} \frac{l I_{l+1/2}(kR) - kR I_{l-1/2}(kR)}{l K_{l+1/2}(kR) + kR K_{l-1/2}(kR)}$$

- R : Kugelradius
- $I_{l+1/2}$, $K_{l+1/2}$: Besselfunktionen

Ausblick

- negative Entropie
- Plasma-Modell $\Leftrightarrow$ Drude-Modell
- Dielektrische Eigenschaften der Metalle
- Übergang: Kugel–Patte $\rightarrow$ Platte–Platte
- Zusammenspiel Geometrie, endliche Leitfähigkeit, endliche Temperatur

Fragen?

Vielen Dank für die
Aufmerksamkeit

Referenzen

Casimir, H. B. G. „On the attraction between two perfectly conducting plates“. In: Proc. K. Ned. Akad. Wet. 51 (1948), S. 793–795.

Chan, H. B. u. a. „Nonlinear Micromechanical Casimir Oscillator“. In: Phys. Rev. Lett. 87 (21 2001), S. 211801. DOI: [10.1103/PhysRevLett.87.211801](https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.87.211801). URL: <http://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.87.211801>.

Decca, R. S. u. a. „Measurement of the Casimir Force between Dissimilar Metals“. In: Phys. Rev. Lett. 91 (5 2003), S. 050402. DOI: [10.1103/PhysRevLett.91.050402](https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.91.050402). URL: <http://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.91.050402>.

Decca, R. S. u. a. „Tests of new physics from precise measurements of the Casimir pressure between two gold-coated plates“. In: Phys. Rev. D 75 (7 2007), S. 077101. DOI: [10.1103/PhysRevD.75.077101](https://doi.org/10.1103/PhysRevD.75.077101). URL: <http://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.75.077101>.

Decca, R.S. u. a. „Novel constraints on light elementary