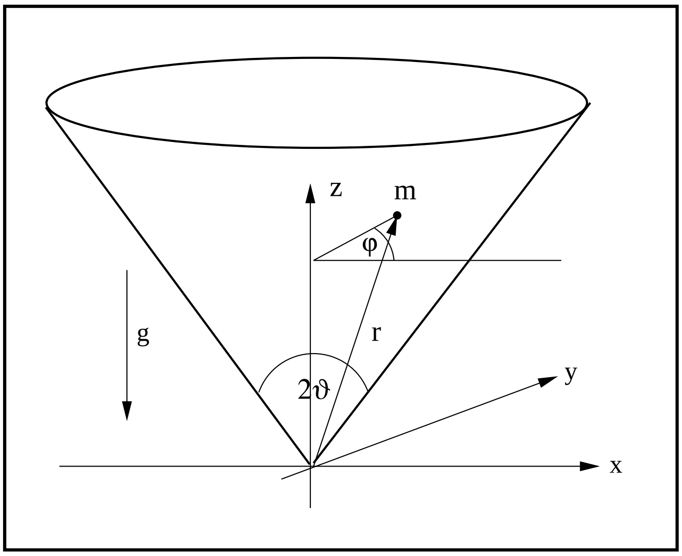
Inhaltsverzeichnis

1 Mechanik: Aufgaben

1.1 Massenpunkt im Trichter (H2003)[1]

Ein Massenpunkt (Masse m) bewege sich im homogenen Schwerefeld der Erde auf der Innenseite eines Hohlkegels (Trichter) mit Öffnungswinkel 2ϑ. Die Achse des Trichters ist parallel zur Schwerkraft ausgerichtet, wobei die Spitze des Trichters nach unten zeigt (siehe Skizze).



Wählen Sie als verallgemeinerte Koordinaten des Massenpunktes den Abstand r zwischen Masse und Kegelspitze und den Azimutalwinkel φ (siehe Skizze).

a) Berechnen Sie die potentielle Energie (V), kinetische Energie (T) und die z-Komponente des Drehimpulses (L_z) als Funktion der verallgemeinerten Koordinaten und entsprechenden Geschwindigkeiten. (10 Punkte)

b) Welche zwei Erhaltungssätze gelten für die Bewegung im Trichter? Begründen Sie die Erhaltungssätze (ohne Rechnung). (5 Punkte)

c) Berechnen Sie ausgehend von den zwei Erhaltungssätzen die verallgemeinerten Geschwindigkeiten $\dot{r}$ und $\dot{\varphi}$ als Funktion der verallgemeinerten Koordinaten, und bestimmen Sie die Bahngleichung $\varphi(r)$.

   Resultat:

$$\varphi(r) = \varphi_0 \pm \frac{L_z}{\sin^2\vartheta} \int_{r_0}^{r} \frac{d\rho}{\rho\sqrt{2m\left[E\rho^2 - L_z^2/(2m\sin^2\vartheta) - mg\rho^3\cos\vartheta\right]}}$$

(10 Punkte)

[1] Siehe auch Aufgabe 1.15

1.2 Luftreibung (H2003)

Ein Teilchen mit der Masse m wird unter der Wirkung der Schwerkraft mit einer Anfangsgeschwindigkeit v_0 senkrecht nach oben geschleudert. Die auf das Teilchen wirkende Reibungskraft habe den Betrag $F = \gamma v^2$, wobei γ eine Konstante ist, und wirke stets der Geschwindigkeit entgegen.

a) Welche Maximalhöhe erreicht das Teilchen?
Hilfe: Leiten Sie aus der Newtonschen Bewegungsgleichung eine Differentialgleichung 1. Ordnung für die Geschwindigkeit $v = \dot{z}$ her, die sich mittels Separation der Variablen integrieren lässt. Zeigen Sie dazu, dass gilt $\ddot{z} = (\mathrm{d}v/\mathrm{d}z)v$. (10 Punkte)

b) Zeigen Sie, dass das Teilchen mit der Geschwindigkeit

$$v_{\text{rück}} = \frac{v_0}{\sqrt{1 + (\gamma v_0^2)/(mg)}}$$

an den Ausgangspunkt zurückkommt.

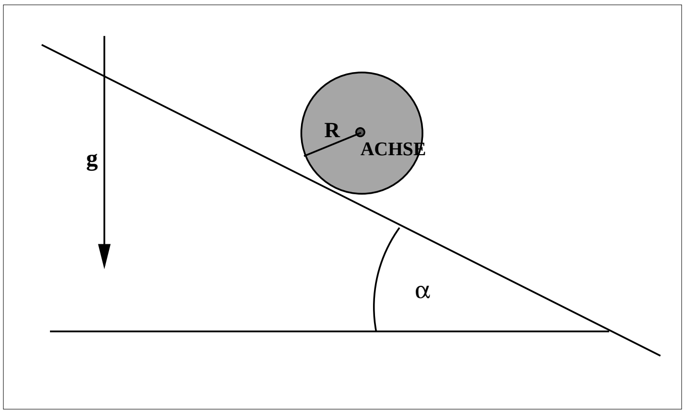
Hilfe: Wählen Sie die erreichte Maximalhöhe als neuen Nullpunkt des Koordinatensystems. (8 Punkte)

c) Berechnen Sie den gesamten Energieverlust des Teilchens vom Anfangspunkt bis zur Rückkehr zu diesem. (7 Punkte)

1.3 Rollender Zylinder auf schiefer Ebene (F2004)

Ein homogener Vollzylinder (Masse M, Radius R) rolle im Schwerefeld ohne Schlupf auf einer schiefen Ebene mit Neigungswinkel α. Die Zylinderachse sei senkrecht zur Schwerkraft ausgerichtet. Als verallgemeinerte Koordinate, die Position und Bewegung des Zylinders beschreibt, nehme man den Drehwinkel $\varphi(t)$ des Zylinders um seine Achse.

Angabe: Bei Drehung um die Zylinderachse hat das Trägheitsmoment eines homogenen Zylinders mit Masse M und Radius R den Wert $\Theta = \frac{1}{2}MR^2$.



a) Zeigen Sie, dass der Schwerpunkt des Zylinders bei Drehung um den Winkel φ die Wegstrecke $R\varphi$ zurücklegt. (5 Punkte)

b) Stellen Sie die Lagrange-Funktion $L(\varphi, \dot{\varphi})$ für die Bewegung des Zylinders auf, und berechnen Sie die Lagrange-Gleichung. (10 Punkte)

c) Lösen Sie die Lagrange-Gleichung mit den Anfangsbedingungen

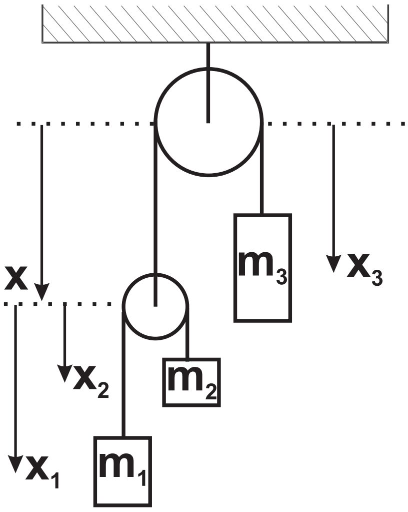
$$\varphi(t = 0) = 0,\ \dot{\varphi}(t = 0) = \Omega_0.$$

Skizzieren Sie den Verlauf von $\varphi(t)$.

(10 Punkte)

1.4 Seilrollen (F2004)[2]

Eine Punktmasse m_3 hängt an einem Ende eines masselosen Seils fester Länge, das über eine fixierte, reibungsfreie Scheibe läuft. Am anderen Ende des Seils ist eine masselose Scheibe befestigt, über die ein zweites masseloses Seil fester Länge reibungsfrei läuft, an dem wieder zwei Punktmassen, nämlich m_1 und m_2 befestigt sind (siehe Figur). Auf alle Massen wirkt die Schwerkraft entlang des Lots (senkrecht nach unten in der Figur).



a) Bestimmen Sie die Lagrange-Funktion $L(x_1, x_3, \dot{x}_1, \dot{x}_3)$ dieses Systems. Beachten Sie die Zwangsbedingungen $x + x_3 = \text{const.}$, $x_1 + x_2 = \text{const.}$ (10 Punkte)

b) Bestimmen Sie die Beschleunigung der Masse m_3. (10 Punkte)

c) Diskutieren Sie das Ergebnis: Zeigen Sie, dass die Beschleunigung von m_3 verschwindet, wenn folgende Bedingung erfüllt ist:

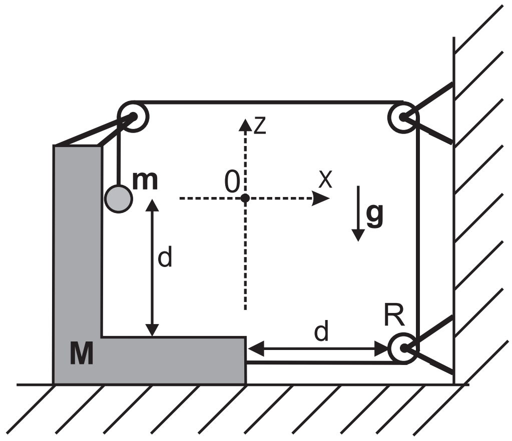
$$m_3 = \frac{4m_1 m_2}{m_1 + m_2}.$$

Betrachten Sie dabei speziell den Grenzfall $m_1 = m_2$. Begründen Sie qualitativ, warum die Beschleunigung von m_3 in diesem Grenzfall verschwindet. (5 Punkte)

[2]Siehe auch Aufgabe 1.18 für eine Atwood-artige Aufgabe

1.5 Fallmaschine (H2004)

Betrachten Sie die Bewegung eines mechanischen Systems, das aus zwei Massen m bzw. M besteht (s. Figur). Die Massen m und M sind wie abgebildet durch ein Seil verbunden. Die Rollen sind masselos, das Seil ist masselos und nicht dehnbar, und beide Massen bewegen sich reibungsfrei. Die linke Rolle ist am großen Block M befestigt und bewegt sich mit der Masse M mit, während die rechten beiden Rollen an der Wand befestigt sind (Figur).



Zur Zeit $t = 0$ hängt die Punktmasse m bei $z = 0$ (der Punkt 0 markiert den Koordinatenursprung), wird dann losgelassen und erreicht unter der Wirkung der Schwerkraft nach der Zeit τ den Punkt $z = -d$. Ab diesem Zeitpunkt bewegt sie sich zusammen (d. h. durch den vollkommen unelastischen Stoß fest verbunden) mit der Masse M horizontal; weder das Seil noch die Schwerkraft haben dann noch einen Einfluss auf die Bewegung. Die Distanz zwischen der Masse M und der unteren, an der festen Wand befestigten Rolle R beträgt anfänglich ebenfalls d.

a) Bestimmen Sie die Lagrange-Funktion des Systems für die Fälle vor und nach dem Auftreffen der Masse m auf M, d. h. vor und nach der Zeit τ.
Hinweis: Überlegen Sie durch Betrachten einer kleinen Verschiebung, dass vor dem Zusammenstoß die Zwangsbedingung
$$z = -2x$$
gilt. Die Bewegung des Systems kann daher vor der Zeit τ vorteilhafterweise durch die einzige generalisierte Koordinate z und nachher allein durch x beschrieben werden.
Zur Kontrolle: Für $m = M$ und $t < \tau$ lautet die Lagrange-Funktion $L = \frac{3}{4}m\dot{z}^2 - mgz$.
(14 Punkte)

b) Leiten Sie für die beiden Fälle $t < \tau$ und $t > \tau$ die Bewegungsgleichungen her.
(3 Punkte)

c) Berechnen Sie die Zeit τ, nach der die Masse m die Masse M erreicht.
Zur Kontrolle: Für $m = M$ ist $\tau = (3d/g)^{1/2}$. (2 Punkte)

d) Finden Sie die Zeit T, nach der beide Massen zusammen die Rolle R erreichen.
Zur Kontrolle: Für $m = M$ beträgt $T = [27d/(4g)]^{1/2}$. (6 Punkte)

1.6 Bewegung in der Ebene (H2004)[3]

Es soll die Bewegung eines (punktförmigen) Teilchens mit der Masse m in einer horizontalen Ebene untersucht werden, sodass der Einfluss der Schwerkraft vernachlässigt werden kann. Das Teilchen kann reibungsfrei auf einer masselosen Stange gleiten, welche um eine vertikale Achse durch den Ursprung des Koordinatensystems rotieren kann. Es sollen ebene Polarkoordinaten r, φ verwendet werden.

Die Stange habe zunächst keinen Antrieb.

a) Stellen Sie die Lagrange-Funktion $L(r, \dot{r}, \varphi, \dot{\varphi})$ für den Massenpunkt auf. (3 Punkte)

b) Bestimmen Sie die kanonischen Impulse, und stellen Sie die Hamilton-Funktion H auf. Zeigen Sie, dass die Hamilton-Funktion H gleich der Energie E ist. (4 Punkte)

c) Bestimmen Sie (mindestens) zwei Erhaltungsgrößen. (4 Punkte)

Die Stange werde nunmehr mit der konstanten Winkelgeschwindigkeit ω angetrieben.

d) Geben Sie die Lagrange-Funktion an, und stellen Sie die Bewegungsgleichung auf. (4 Punkte)

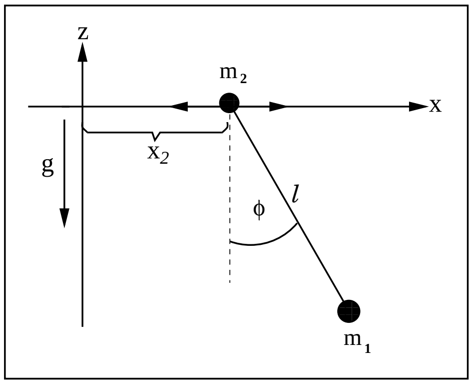
e) Zeigen Sie, dass die Kraft, welche auf den Massenpunkt wirkt, durch $\vec{K} = 2m\dot{r}\omega\vec{e}_\varphi$ gegeben ist mit dem Eigenvektor $\vec{e}_\varphi$ in Azimut-Richtung. (5 Punkte)

f) Berechnen Sie die Leistung des Antriebs, und zeigen Sie, dass sie gleich der zeitlichen Änderung der Energie des Massenpunkts ist. (5 Punkte)

[3] Siehe auch Aufgabe 1.13 für die Perle auf der Stange

1.7 Pendelbewegung (F2005)[4]

Im homogenen Schwerefeld der Erde möge sich der Aufhängepunkt eines ebenen Pendels (Länge l, Pendelmasse m_1) in horizontaler Richtung (x-Richtung) bewegen können. Die Masse des Aufhängepunktes sei m_2, und die Erdbeschleunigung wirke in negativer z-Richtung (siehe Skizze). Die die Massen m_1 und m_2 verbindende starre Stange sei massenlos.



a) Bestimmen Sie die Lagrange-Funktion dieses Systems. Wählen Sie dazu x_2 und den Winkel ϕ als verallgemeinerte Koordinaten. (9 Punkte)

b) Stellen Sie die Lagrange-Gleichungen zweiter Art auf. (7 Punkte)

c) Berechnen Sie die allgemeine Lösung dieser Gleichungen im Grenzfall kleiner Pendelauslenkungen (lineare Näherung!).
Bestimmen Sie die entsprechende spezielle Lösung, die die Anfangsbedingungen

$$x_2(t=0)=0,\ \dot{x}_2(t=0)=v_0,\ \phi(t=0)=0,\ \dot{\phi}(t=0)=0$$

erfüllt. (9 Punkte)

[4] Siehe auch Aufgabe 1.11 für ein Pendel mit beweglichem Aufhängepunkt

1.8 Kleine Schwingungen (F2005)

Eine Masse m wird im Schwerefeld der Erde an einer anharmonischen Feder aufgehängt. In der Ruhelage der Masse wird die Feder durch die Masse um die Länge z_0 gedehnt. Die masselose Feder soll die potentielle Auslenkungsenergie

$$V(z) = \frac{C}{4}\, z^4$$

haben, wobei z die Längenänderung der Feder bezeichnet und C eine dimensionsbehaftete Konstante ist.

a) Berechnen Sie die Auslenkung z_0 der Feder in Richtung der Schwerkraft, wenn die Masse ruht. (2 Punkte)

Betrachten Sie nun *kleine* Schwingungen $z(t)$ um die Ruhelage z_0. Dabei soll die positive z-Achse in Richtung der Schwerkraft zeigen. Anfangs soll sich die Masse in Ruhe am Ort $z(0)$ befinden.

b) Berechnen Sie die Auslenkung $z(t)$ der Schwingung als Funktion der Zeit t. (18 Punkte)

c) Geben Sie die Frequenz f oder die Kreisfrequenz ω der kleinen Schwingungen um die Ruhelage z_0 an. (5 Punkte)

1.9 Relativistisches Punktteilchen (H2005)

Die Lagrange-Funktion L eines freien, relativistischen Punktteilchens in einer Raumdimension (Koordinate x, Geschwindigkeit $v = \dot{x}$) wird angesetzt als

$$L = \lambda\sqrt{1 - v^2/c^2}\ .$$

Dabei ist c die Lichtgeschwindigkeit und λ eine Konstante.

a) Wie muss man λ wählen, damit man den korrekten nicht-relativistischen Grenzfall für ein Teilchen der Masse m erhält? Verwenden Sie diesen Wert von λ in den folgenden Aufgaben. (6 Punkte)

b) Der Impuls p kann definiert werden als diejenige Erhaltungsgröße, die aus der Translationsinvarianz von L (d.h. $\partial L/\partial x = 0$) folgt.
Bestimmen Sie den Zusammenhang zwischen p und v. (6 Punkte)

c) Entsprechend kann man die Energie E definieren als diejenige Erhaltungsgröße, die aus der Zeittranslationsinvarianz von L (d.h. $\partial L/\partial t = 0$) folgt.
Bestimmen Sie E sowohl als Funktion von v wie als Funktion von p.
Hinweis: Hamilton-Funktion $H = E$. (13 Punkte)

1.10 Schwingungsdauer (H2005)

Eine Punktmasse m soll eindimensional in x-Richtung im Potential

$$U(x) = \frac{D}{2}x^n, \quad n \in \{2, 4, 6, 8...\}$$

schwingen.

a) Geben Sie die Erhaltungsgröße der Bewegung an. (3 Punkte)

b) Leiten Sie eine Differentialgleichung für die Zeit $t(x)$ als Funktion des Ortes x her. (8 Punkte)

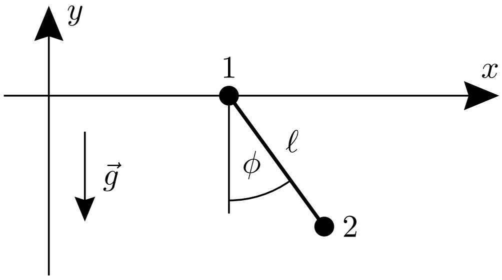
c) Berechnen Sie damit die Schwingungsdauer T als Funktion der maximalen Auslenkung A. *Zur Kontrolle*:

$$T = 4\sqrt{\frac{m}{D}}\,\frac{C_n}{A^\gamma}$$

Berechnen Sie den Exponenten γ, und schreiben Sie die dimensionslose Konstante C_n als ein Integral. (14 Punkte)

1.11 Pendel mit beweglichem Aufhängepunkt (F2006)[5]

Eine Punktmasse m_2 sei wie in der Abbildung dargestellt mit Hilfe einer masselosen Stange der Länge ℓ an einer Punktmasse m_1 so aufgehängt, dass die Anordnung in der (x, y)-Ebene schwingen kann. Die Masse m_1 ist entlang der x-Achse reibungsfrei verschiebbar. Die gesamte Anordnung befinde sich in einem homogenen Schwerefeld in Richtung der negativen y-Achse.



a) Welche Zwangsbedingungen liegen vor? Drücken Sie die Koordinaten (x_2, y_2) der Masse m_2 durch die Position x_1 der Masse m_1 und den Winkel ϕ aus. (6 Punkte)

b) Zeigen Sie, dass hier neben dem Energieerhaltungssatz ein zweiter Erhaltungssatz gilt. Wie lautet die zugehörige Erhaltungsgröße? (6 Punkte)

c) Zeigen Sie mit Hilfe dieses zweiten Erhaltungssatzes, dass die Bahnkurve der zweiten Masse durch

$$\left(\frac{x_2(t) - A(t)}{a_x}\right)^2 + \left(\frac{y_2(t)}{a_y}\right)^2 = 1$$

beschrieben werden kann. Was ergibt sich für a_x, a_y und $A(t)$? Wie müssen die Anfangsbedingungen gewählt werden, damit die Bewegung auf einer Ellipse erfolgt? (13 Punkte)

[5] Siehe auch Aufgabe 1.7 für ein Pendel mit beweglichem Aufhängepunkt

1.12 Teilchen im konstanten Zentralkraftfeld (F2006)

Ein Teilchen der Masse m mit Ortsvektor $\vec{r}$ bewege sich in einem dreidimensionalen Kraftfeld, wobei die Kraft in Richtung auf den Ursprung zeigt und ihr Betrag K unabhängig vom Ort ist.

a) Wie lautet die Newton'sche Bewegungsgleichung für dieses Problem? Bestimmen Sie die zugehörige potentielle Energie, und geben Sie den Energieerhaltungssatz an. (5 Punkte)

b) Zeigen Sie, ausgehend von der Newton'schen Bewegungsgleichung, dass auch der Drehimpuls erhalten ist. Wie kann man daraus schließen, dass die Bewegung in einer Ebene erfolgt? (5 Punkte)

c) Beweisen Sie den Zusammenhang

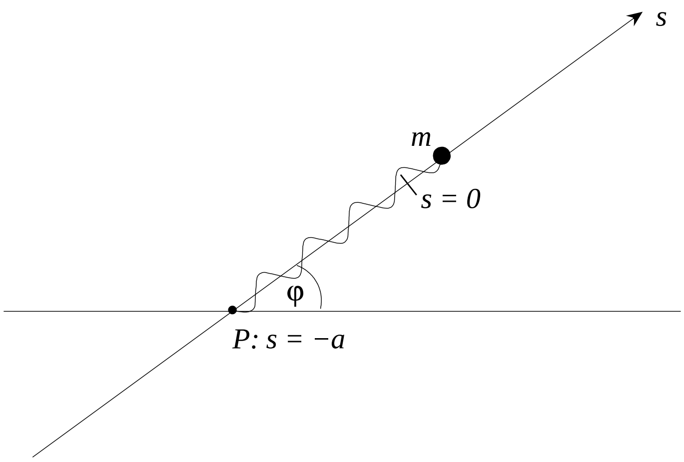
$$\dot{\vec{r}}^2 = \frac{\vec{L}^2}{m^2 r^2} + \dot{r}^2 \, .$$

Hier ist r der Abstand vom Ursprung, und $\vec{L}$ ist der Drehimpuls. (7 Punkte)

Hinweis: $(\vec{a} \times \vec{b})^2 = |\vec{a}|^2 |\vec{b}|^2 - (\vec{a} \cdot \vec{b})^2$

d) Bestimmen Sie mit Hilfe der Resultate aus den Teilaufgaben a und c ein effektives Potential für die Radialbewegung, und skizzieren Sie dieses effektive Potential. Für $\vec{L} \neq 0$ ist die Kreisbahn eine mögliche Bahnform für das vorliegende Problem. Bestimmen Sie den Bahnradius und die Winkelgeschwindigkeit als Funktion des Drehimpulses. (8 Punkte)

1.13 Rotierende Stange (H2006)[6]



Ein Massenpunkt der Masse m gleite reibungsfrei auf einer masselosen, unendlich langen Stange und sei mit einer harmonischen Kraft $F = -ks$, $k > 0$ an einen Punkt $s = 0$ auf der Stange gebunden. Die harmonische Kraft werde durch eine Feder mit Ruhelänge a ausgeübt, die an einem festen Punkt P (bei $s = -a$) auf der Stange verankert ist. Die Stange kann ferner in einer Ebene um den festen Punkt P rotieren; der Winkel gegen eine feste Gerade in dieser Ebene sei φ. Die Schwerkraft spiele keine Rolle.

a) Stellen Sie die Lagrange-Funktion des Massenpunktes in den Koordinaten $s(t)$ und $\varphi(t)$ auf. *Hinweis*: Sie dürfen davon ausgehen, dass für die Position des Massenpunktes immer $s(t) > -a$ gilt.) (4 Punkte)

b) Wie lauten die Euler-Lagrange-Gleichungen? Interpretieren Sie die Terme proportional zu $\dot{\varphi}$ aus der Sicht eines mitrotierenden Beobachters. (8 Punkte)

c) Eine der Koordinaten ist ist zyklisch. Wie lautet der entsprechende Erhaltungssatz? Was ist die Bedeutung der entsprechenden erhaltenen Größe? Gibt es eine weitere Erhaltungsgröße, und wie lautet diese? (4 Punkte)

d) Eliminieren Sie (durch Ausnutzung des entsprechenden Erhaltungssatzes) die zyklische Koordinate, und bringen Sie die so erhaltene Gleichung für $s(t)$ in die Form $m\ddot{s} = -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}V_{\text{eff}}(s)$. Wie lautet das effektive Potential $V_{\text{eff}}(s)$? (6 Punkte)

e) Skizzieren Sie das effektive Potential, finden Sie den Punkt s_0 (unter der Annahme $|s_0| \ll a$) an dem es mimimal wird, und diskutieren Sie qualitativ die mögliche Bewegung. (3 Punkte)

[6] Siehe auch Aufgabe 1.6 für die Perle auf der Stange

1.14 Fallender Stein auf rotierender Erde (H2006)

Wir lassen einen Stein der Masse m in einen Brunnen fallen, der am Äquator steht. Wegen der Erdrotation folgt die Trajektorie des Steins nicht dem senkrechten Lot in Richtung Erdmittelpunkt. Diese Bewegung wird im rotierenden Bezugssystem der Erde durch

$$m\frac{\mathrm{d}^2\vec{X}}{\mathrm{d}t^2} = \vec{F}_g - 2m\vec{\omega} \times \frac{\mathrm{d}\vec{X}}{\mathrm{d}t} - m\vec{\omega} \times \left(\vec{\omega} \times \vec{X}\right)$$

beschrieben, wobei der Koordinatenursprung im Erdmittelpunkt liegt und die z-Achse durch die Brunnenöffnung verläuft (siehe Abbildung). Wir nehmen an, dass die Winkelgeschwindigkeit $\vec{\omega}$ konstant und die Erde eine Kugel mit Radius R ist.

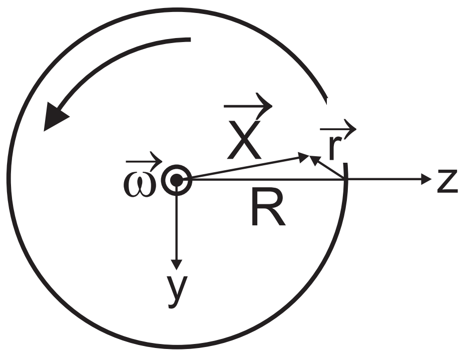


Abbildung: Die Erde in Aufsicht. Die Drehachse $\vec{\omega}$ zeigt zum Nordpol, der über der Papierebene auf der x-Achse liegt. Die Koordinatenachsen y und z liegen in der Äquatorialebene, was für die Vektoren $\vec{X}$ und $\vec{r}$ nicht zutreffen muss.

a) Führen Sie die Relativkoordinate

$$\vec{r} = \vec{X} - R\,\vec{e}_z$$

ein, wobei R die Distanz vom Erdmittelpunkt zur Brunnenöffnung ist. Bestimmen Sie die Bewegungsgleichung für $\vec{r}(t)$ im erdfesten Koordinatensystem. Nehmen Sie hierbei vereinfachend an, dass die Erdanziehungskraft $\vec{F}_g = -mg_0\vec{e}_z$ die der ruhenden Erde und unabhängig von $\vec{r}$ ist. Nehmen Sie ferner an, dass die Zentrifugalkraft ebenfalls unabhängig von $\vec{r}$ ist, was für nicht zu tiefe Brunnen näherungsweise zutrifft. (5 Punkte)

b) Lösen Sie diese Bewegungsgleichung zunächst unter Vernachlässigung der Coriolis-Kraft, und berechnen Sie die Trajektorie $\vec{r}_0(t)$ des Steins. Zeigen Sie, dass er einer effektiven Erdbeschleunigung $g_{\text{eff}} = g_0 - \omega^2 R$ unterliegt. (6 Punkte)

c) Ausgehend von dieser Trajektorie $\vec{r}_0(t)$ addieren wir nun die Coriolis-Kraft. Setzen Sie dazu $\vec{r} = \vec{r}_0 + \vec{u}$, und zeigen Sie, dass für geeignete Anfangsbedingungen die Differentialgleichung

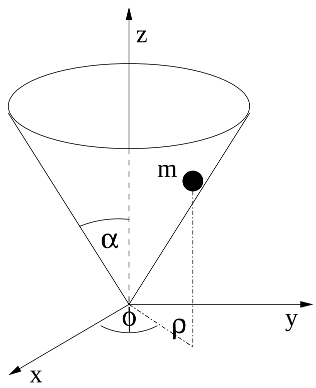
$$\frac{\mathrm{d}\vec{u}}{\mathrm{d}t} = -2\vec{\omega} \times (\vec{r}_0 + \vec{u}) \tag{1}$$

gilt. (8 Punkte)

d) Nehmen Sie schließlich an, dass die Abweichung $\vec{u}$ vom Lot so klein ist, dass sie auf der rechten Seite von Gleichung (1) vernachlässigt werden kann, und berechnen Sie für diesen Fall explizit $\vec{u}\,(t)$. Zeigen Sie, dass die Trajektorie $\vec{r}(t)$ gegenüber $\vec{r}_0(t)$ nach Osten abgelenkt wird. (6 Punkte)

1.15 Dynamik einer Punktmasse auf einem Kegelmantel (F2007)[7]

Ein Punktmasse m bewege sich auf der Innenseite eines Kreiskegels mit seiner Achse parallel zur z-Achse (siehe Zeichnung). Die Gravitationskraft zeige in die negative z-Richtung.



a) Bestimmen Sie unter Verwendung von Zylinderkoordinaten die zugehörige Lagrange-Funktion in Abhängigkeit von ρ (Radius) und ϕ (Polarwinkel). (7 Punkte)

b) Leiten Sie daraus die Bewegungsgleichungen ab. (4 Punkte)

c) Welche Variable ist zyklisch?
Zeigen Sie, dass der Drehimpuls L_z erhalten ist. (4 Punkte)

d) Bestimmen Sie mit Hilfe der Teilaufgaben b) und c) den Radius ρ_0 einer Kreisbahn auf dem Kegelmantel mit fester Höhe z_0 und als Funktion von L_z. (4 Punkte)

Zwischenergebnis: $m\left(1+\cot^2\alpha\right)\ddot{\rho}-\dfrac{L_z^2}{m\rho^3}+mg\cot\alpha=0$

e) Zeigen Sie, dass man sich mit dem Ansatz $\rho=\rho_0+\rho_1$ und $\rho_1 \ll \rho_0$ aus den Bewegungsgleichungen (siehe Teilaufgabe b) die Gleichung eines harmonischen Oszillators für ρ_1 ergibt. Geben Sie die zugehörige Schwingungsfrequenz ω_0 an. (6 Punkte)

[7] Siehe auch Aufgabe 1.1

1.16 Rakete (F2007)

Eine Raketenstufe der Masse M_0 bewege sich zunächst kräftefrei und habe die Geschwindigkeit V_0. Zum Zeitpunkt $t = 0$ werde der Antrieb gezündet: Zu einem Zeitpunkt $t > 0$ werde im Zeitintervall $\mathrm{d}t$ die Masse $\mathrm{d}M$ mit der Geschwindigkeit v relativ zur Rakete und antiparallel zu ihrer Geschwindigkeit ausgestoßen und die Geschwindigkeit V der Rakete um $\mathrm{d}V$ vergrößert. Es handelt sich also um ein eindimensionales Problem.

a) Betrachten Sie den (momentanen) Impuls der Rakete zu einem Zeitpunkt $t > 0$. Die momentane Masse der Rakete sei M, und ihre momentane Geschwindigkeit sei V. Wie verteilen sich die Impulse der Rakete und der ausgestoßenen Masse zu einem infinitesimal späteren Zeitpunkt $t + \mathrm{d}t$ auf den Gesamtimpuls? (6 Punkte)

b) Vernachlässigen Sie infinitesimal kleine Terme von höherer als erster Ordnung, und geben Sie die Differentialgleichung für die Abhängigkeit der Variablen M und V voneinander an. *Zur Kontrolle ein Zwischenergebnis:* $M\,\mathrm{d}V = -v\,\mathrm{d}M$. (5 Punkte)

c) Integrieren Sie diese Differentialgleichung mit den angegebenen Anfangsbedingungen. Skizzieren Sie die Geschwindigkeit als Funktion der Masse. (6 Punkte)

d) Die Rate $\mu = -\dot{M}$ des Massenausstoßes sei zeitlich konstant.
Bestimmen Sie die Geschwindigkeit V als Funktion der Zeit t.
Wie wird die Kurve von Teilaufgabe c zeitlich durchlaufen? (4 Punkte)

e) Der Treibstoff mache gerade die Hälfte der anfänglichen Masse der Rakete aus.
Welche Endgeschwindigkeit erreicht die Rakete, und wie kann man sie optimieren?
(4 Punkte)

1.17 Freies Teilchen in Polarkoordinaten (H2007)

Ein Teilchen der Masse m bewege sich kräftefrei in der (x, y)-Ebene. Es soll die Bewegung unter Verwendung von Polarkoordinaten r und φ untersucht werden.

a) Bestimmen Sie, ausgehend von der Darstellung in kartesischen Koordinaten, die kinetische Energie in Polarkoordinaten. (6 Punkte)

b) Zeigen Sie mit Hilfe des Lagrange-Formalismus, dass der Drehimpuls hier eine Erhaltungsgröße darstellt, und leiten Sie in diesem Rahmen einen Ausdruck für den Drehimpuls in Polarkoordinaten her. Mit Hilfe der Drehimpulserhaltung lässt sich der Energieerhaltungssatz allein durch die radiale Koordinate r wie folgt ausdrücken:

$$E = \frac{m}{2}\dot{r}^2 + \frac{A}{r^2}\,. \tag{1}$$

Wodurch ist A gegeben, und welches Vorzeichen hat es? (7 Punkte)

c) Bestimmen Sie mit Hilfe von (1) die Zeitabhängigkeit $r(t)$ des Abstands des Teilchens vom Koordinatenursprung. Dabei sei der minimale Abstand $r(0) = r_{\text{min}}$ zur Zeit $t = 0$ erreicht. (6 Punkte)

d) Entwickeln Sie das Ergebnis für $r(t)$ aus der vorigen Teilaufgabe bis zur zweiten Ordnung in der Zeit t, und bestimmen Sie daraus $r(0)$ und $\ddot{r}(0)$. Zeigen Sie ferner den Zusammenhang

$$\ddot{r}(0) = \dot{\phi}(0)^2 r(0)\,,$$

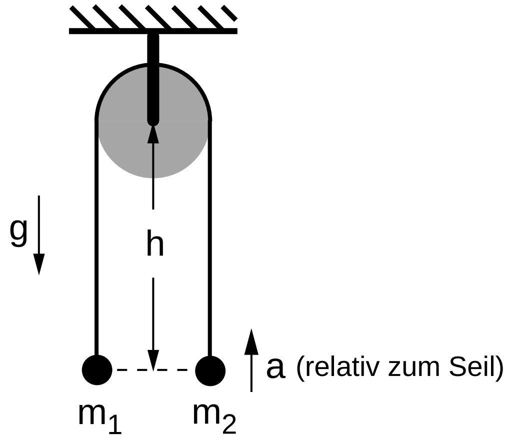
und interpretieren Sie diesen physikalisch. (6 Punkte)

Nützliche Formel:

$$\int \mathrm{d}x\,\frac{x}{\sqrt{x^2 - a^2}} = \sqrt{x^2 - a^2}$$

1.18 Klettern am Seil (H2007)[8]

An einer Decke ist eine feststehende Rolle angebracht, deren Mittelpunkt bei $z = 0$ sei. Über diese Rolle kann reibungsfrei ein masseloses, undehnbares Seil gleiten. An den beiden Enden des Seils hängt je ein Affe mit der Masse m_1 bzw. m_2 im Schwerefeld (Erdbeschleunigung g). Beide Affen befinden sich zur Zeit $t = 0$ in gleicher Höhe $z = -h$ in Ruhe. Der Affe 2 (m_2) klettert nun mit konstanter Beschleunigung $a > 0$ relativ zum Seil an seinem Seilstück empor. Der Affe 1 (m_1) bleibt ruhig hängen.



a) Formulieren Sie die zeitabhängige Zwangsbedingung, die bei $t > 0$ die Koordinaten $z_1 < 0$ und $z_2 < 0$ der beiden Affen verknüpft. (4 Punkte)

b) Bestimmen Sie die Lagrange-Funktion des Systems, ausgedrückt durch die Koordinate z_2 und ihre Ableitung $\dot{z}_2$. (8 Punkte)

c) Bestimmen Sie aus der Lagrange-Gleichung die Beschleunigung $\ddot{z}_2$, und zeigen Sie, dass $\ddot{z}_2$ zeitlich konstant ist. Bestimmen Sie unter Verwendung der Zwangsbedingung die Differenz $\ddot{z}_1 - \ddot{z}_2$. (8 Punkte)

d) Welcher der beiden Affen kommt zuerst auf der Höhe des Rollenmittelpunktes an? Unterscheiden Sie dabei die Fälle $m_1 < m_2$, $m_1 = m_2$ und $m_1 > m_2$. (5 Punkte)

[8]Siehe auch Aufgabe 1.4 für eine Atwood-artige Aufgabe

1.19 Reflexion an weicher Wand (F2008)

Ein Teilchen der Masse m komme aus dem positiv Unendlichen, wobei der Betrag der Geschwindigkeit v_∞ sei. Es werde elastisch an einer weichen Wand senkrecht reflektiert, d. h. es kann ein eindimensionales Problem betrachtet werden. Die Wand wird beschrieben durch das Potential

$$V(x) = \frac{1}{2} V_0 \text{ exp } (-\alpha x), \ \alpha > 0, V_0 > 0.$$

a) Berechnen Sie die Energie des Teilchens und den Umkehrpunkt x_0 . (8 Punkte)

b) Berechnen Sie $x(t)$, und wählen Sie dabei $x(0) = x_0$. (10 Punkte)

c) Berechnen Sie $\dot{x}(t)$, und betrachten Sie die Grenzfälle $t \to \pm\infty$ für $x(t)$ und $\dot{x}(t)$. Skizzieren Sie $x(t)$ und $\dot{x}(t)$ für alle t. (4 Punkte)

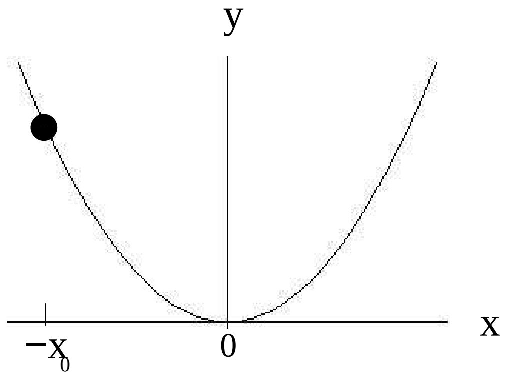
d) Betrachten Sie den Grenzfall $\alpha \to \infty$. Welche anschauliche Bedeutung hat er? (3 Punkte)

Hinweis:

$$\int_0^x \mathrm{d}x' \ \frac{1}{\sqrt{1 - \exp(-\alpha x')}} = \frac{2}{\alpha} \text{ arcosh}\big(\exp \frac{\alpha x}{2} \big)$$

1.20 Masse auf der Achterbahn (F2008)

Auf einer Achterbahn rollt ein Wagen auf einer parabelförmigen Bahn in die Tiefe. Wir wollen ihn durch ein punktförmiges Teilchen der Masse m beschreiben, das sich reibungsfrei auf der Kurve $y = ax^2$ im Potential mgy der Schwerkraft bewegt (siehe Skizze). Es soll bei $-x_0 < 0$ aus der Ruhelage heraus starten und nach der Zeit T das Minimum $x = 0$ der Bahn erreicht haben. Um die Rechnung zu vereinfachen, untersuchen wir nur den Fall $x_0 = 1/(2a)$.



a) Welche Erhaltungsgröße gibt es bei diesem Problem? Geben Sie diese an. (3 Punkte)

b) Berechnen Sie die Geschwindigkeit am Minimum $x = 0$ der Bahn. (3 Punkte)

c) Welche Wegstrecke hat das Teilchen zurückgelegt, wenn es nach der Zeit T das Minimum erreicht hat? (9 Punkte)

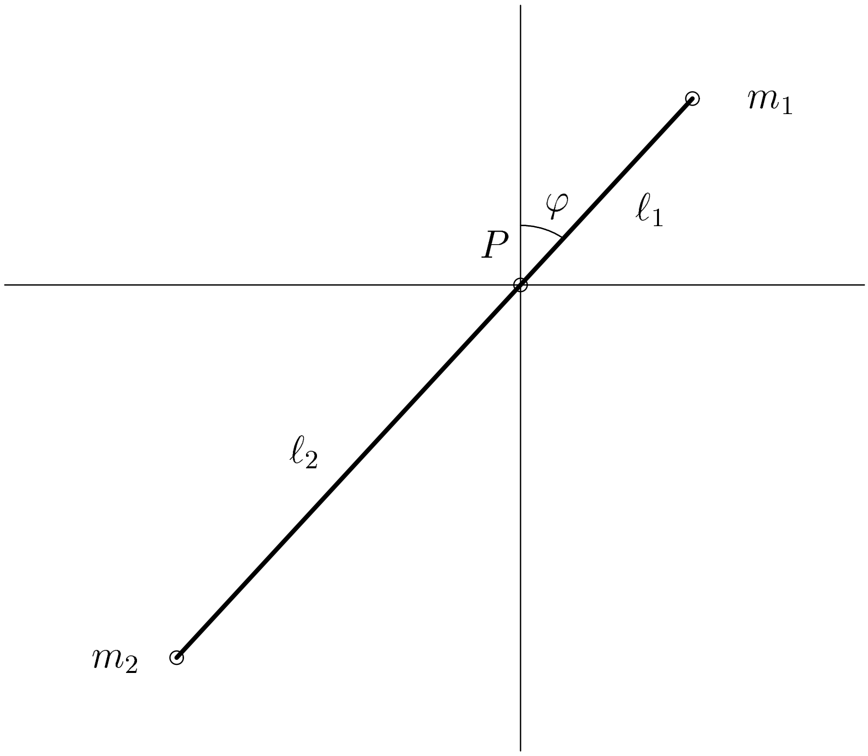
d) Berechnen Sie diese Zeit T. (10 Punkte)

Hinweis: Sie dürfen folgende Integrale verwenden:

$$\int_0^1 \sqrt{\frac{1+z^2}{1-z^2}}\,\mathrm{d}z \simeq 1.91, \qquad \int_0^1 \sqrt{1+z^2}\,\mathrm{d}z \simeq 1.15$$

1.21 Pendel (H2008)

Zwei Punktmassen m_1 und m_2 befinden sich an den Enden eines starren, masselosen Stabes. Der Stab ist in einem Punkt P so gelagert, dass er sich in einer vertikalen Ebene um den Punkt P drehen kann. Die Abstände der beiden Punktmassen vom Punkt P seien ℓ_1 bzw. ℓ_2. Es wirke die Schwerkraft.



a) Stellen Sie die Lagrange-Funktion $L(\varphi, \dot{\varphi})$ auf. (9 Punkte)

b) Bestimmen Sie die Gleichgewichtslagen, und diskutieren Sie deren Stabilität. (8 Punkte)

c) Wie groß ist die Frequenz kleiner Schwingungen um die stabile Gleichgewichtslage? Für welche Parameter des Pendels verschwindet die Frequenz? B eschreiben Sie die Form der Bewegung für diesen Spezialfall. (8 Punkte)

1.22 Elliptische Bahn (H2008)

Ein Teilchen der Masse m bewege sich im Raum je nach Anfangsbedingungen auf den Bahnen

$$\vec{r}(t) = r_0 \cos(\omega t)\vec{e}_x + \frac{v_0}{\omega} \sin(\omega t)\vec{e}_y,$$

wobei $\vec{e}_x$ und $\vec{e}_y$ orthonormale Einheitsvektoren und r_0, v_0 die Beträge der Orts- und Geschwindigkeitsvektoren zur Zeit $t = 0$ sind.

a) Berechnen Sie die Kraft $\vec{F}(\vec{r})$, die auf das Teilchen wirkt. (5 Punkte)

b) Zeigen Sie, dass diese Kraft konservativ ist. (5 Punkte)

c) Berechnen Sie ein Potential $U(\vec{r})$ zu dieser Kraft. (5 Punkte)

d) Berechnen Sie das auf das Teilchen wirkende Drehmoment sowie seinen Drehimpuls. (5 Punkte)

e) Berechnen Sie die gesamte Energie des Teilchens.
Mit welcher Periode ändert sich seine kinetische Energie? (5 Punkte)

2 Elektrodynamik

2.1 Magnetischer Dipol (H2003)

a) Das Vektorpotential $\vec{A}$ eines statischen magnetischen Punktdipols mit dem Moment $\vec{m}$, der sich bei $\vec{r} = (x, y, z) = 0$ befindet, ist gegeben durch

$$\vec{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\vec{m} \times \vec{r}}{r^3} .$$

α) Berechnen Sie daraus das $\vec{B}$-Feld des Dipols für $\vec{r} \neq 0$.

(*Hilfsformel:* $\nabla \times (\vec{a} \times \vec{b}) = (\vec{b} \cdot \nabla)\vec{a} - (\vec{a} \cdot \nabla)\vec{b} + \vec{a}(\nabla \cdot \vec{b}) - \vec{b}(\nabla \cdot \vec{a})$;

Ergebnis: $\vec{B} = \dfrac{\mu_0}{4\pi} \dfrac{3(\vec{m} \cdot \vec{r})\vec{r} - r^2\vec{m}}{r^5}$.)

(10 Punkte)

β) Skizzieren Sie das $\vec{B}$-Feld graphisch für $\vec{m} = m_0\vec{e}_z$, wobei $\vec{e}_z$ der Einheitsvektor in z-Richtung ist. (5 Punkte)

b) Eine kreisförmige Leiterschleife mit Radius a sei fest so angebracht, dass ihr Mittelpunkt bei $x = y = 0$, $z = z_0 > 0$ liegt und ihre Normale in Richtung von $\vec{e}_z$ zeigt.

Berechnen Sie den Fluss Φ des Dipolfeldes von Teilaufgabe β) durch die Leiterschleife aus dem Flächenintegral $\Phi = \iint \vec{B} \cdot \mathrm{d}\vec{f}$ über die Schleifenfläche. (10 Punkte)

2.2 Ebene elektromagnetische Wellen (H2003)

a) Wie lauten die Maxwell'schen Gleichungen für das elektrische Feld $\vec{E}(\vec{r},t)$ und das magnetische Feld $\vec{B}(\vec{r},t)$ im Vakuum bei Abwesenheit von Ladungs- und Stromdichten?
(4 Punkte)

b) Startpunkt für die Berechnung von $\vec{E}(\vec{r},t)$ und $\vec{B}(\vec{r},t)$ einer ebenen Welle mit der Kreisfrequenz ω und dem Wellenzahlvektor $\vec{k}$ ist der Ansatz

$$\vec{E}(\vec{r},t) = \vec{E}_0\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\vec{k}\cdot\vec{r}-\omega t)}, \quad \vec{B}(\vec{r},t) = \vec{B}_0\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\vec{k}\cdot\vec{r}-\omega t)}.$$

Bestimmen Sie durch Einsetzen in die Maxwell'schen Gleichungen die Beziehungen zwischen $\vec{k},\ \omega,\ \vec{E}_0,\ \vec{B}_0$, und deuten Sie diese. Was ist $\varepsilon_0\mu_0$? In welche Richtung und mit welcher Geschwindigkeit bewegt sich die Welle? Wie ist sie polarisiert? (8 Punkte)

c) Berechnen Sie die zeitgemittelte Energiedichte $\langle w\rangle$ und die zeitgemittelte Energieflussdichte $\langle\vec{S}\rangle$ der Welle aus den Gleichungen

$$\langle w\rangle = \frac{1}{2}\left(\varepsilon_0\frac{\vec{E}\cdot\vec{E}^*}{2} + \frac{1}{\mu_0}\frac{\vec{B}\cdot\vec{B}^*}{2}\right), \qquad \langle\vec{S}\rangle = \frac{1}{\mu_0}\frac{\vec{E}\times\vec{B}^*}{2}.$$

Wie hängen $\langle\vec{S}\rangle$ und $\langle w\rangle$ zusammen? Diskutieren Sie das Ergebnis. (13 Punkte)

2.3 Wo fließt die elektromagnetische Energie? (F2004)[9]

Gegeben sei ein unendlich langer, gerader zylindrischer Draht mit Radius R, Leitfähigkeit σ, relativer Dielektrizitätskonstante $\varepsilon = 1$ und relativer Permeabilität $\mu = 1$. Zur mathematischen Behandlung führen wir Zylinderkoordinaten $x = \rho\cos\phi,\ y = \rho\sin\phi,\ z = z$ (z-Achse ist Drahtachse) mit den Einheitsvektoren $\vec{e}_\rho,\ \vec{e}_\phi,\ \vec{e}_z$ ein. Der Draht befindet sich in einem homogenen elektrischen Feld $\vec{E}(\vec{r}) = E\,\vec{e}_z$. Wir betrachten ein Stück der Länge $L \gg R$ dieses Drahts.

a) Im Draht fließt nach dem Ohm'schen Gesetz ein konstanter Strom der Dichte $\vec{j} = \sigma\vec{E} = \sigma E\,\vec{e}_z = j\,\vec{e}_z$. Wie groß ist der Gesamtstrom I im Draht?
Wegen der endlichen Leitfähigkeit σ wird im Draht Joule'sche Wärme mit der Dichte w_J erzeugt. Berechnen Sie diese und die gesamte im betrachteten Volumen der Länge L erzeugte Wärmeleistung $W_J = \sigma E^2\pi R^2 L = \sigma E^2 AL = \sigma E^2 V$. (6 Punkte)

b) Der Strom I im Draht erzeugt im Außenraum das Magnetfeld

$$\vec{B}_a = \frac{\mu_0 I}{2\pi\rho}\vec{e}_\phi.$$

Drücken Sie in $\vec{B}_a$ den Strom I durch E aus. (3 Punkte)

c) Berechnen Sie den Poynting-Vektor $\vec{S}_a = \vec{E}\times\vec{H}_a$ als Funktion von E.
Was ist die physikalische Bedeutung des Poynting-Vektors?
Skizzieren Sie $\vec{E},\ \vec{B}_a,\ \vec{S}_a$. (9 Punkte)

d) Berechnen Sie den Energiefluss durch die Oberfläche ins Innere des Drahts für das Volumen der Länge L. Vergleichen Sie mit der im Inneren erzeugten Wärmeleistung W_J. Was fließt wirklich im Draht? (7 Punkte)

[9] Siehe auch Aufgabe 2.19

2.4 Elektrisches Feld und Potential im H-Atom (F2004)

a) Wie lauten die Grundgleichungen der Elektrostatik in differentieller und Integralform? Wie hängt das Potential $\phi(\vec{r})$ mit der Feldstärke $\vec{E}(\vec{r})$ zusammen? (6 Punkte)

b) Die Kernladung e des H-Atoms sei punktförmig im Koordinatenursprung konzentriert. Geben Sie die Formel für das entsprechende elektrische Kernpotential $\phi_{\mathrm{K}}(\vec{r})$ und die Feldstärke $\vec{E}_{\mathrm{K}}(\vec{r})$ an. (4 Punkte)

c) Auch die Elektronenladungsdichte

$$\rho_{\mathrm{e}}(r) = -e\,\frac{\mathrm{e}^{-2r/a}}{\pi a^3} \qquad (a\text{: Bohrscher Radius})$$

ist drehinvariant. Nutzen Sie die Drehsymmetrie und den Gauß'schen Satz, um die elektronische Feldstärke $\vec{E}_{\mathrm{e}}(\vec{r})$ zu berechnen.

Verwenden Sie hierzu $$\int x^2 \mathrm{e}^{-\beta x}\mathrm{d}x = -(2 + 2\beta x + \beta^2 x^2)\frac{\mathrm{e}^{-\beta x}}{\beta^3}.$$

Bestimmen Sie das Gesamtergebnis $\vec{E}_{\mathrm{H}} = \vec{E}_{\mathrm{K}} + \vec{E}_{\mathrm{e}}$. (9 Punkte)

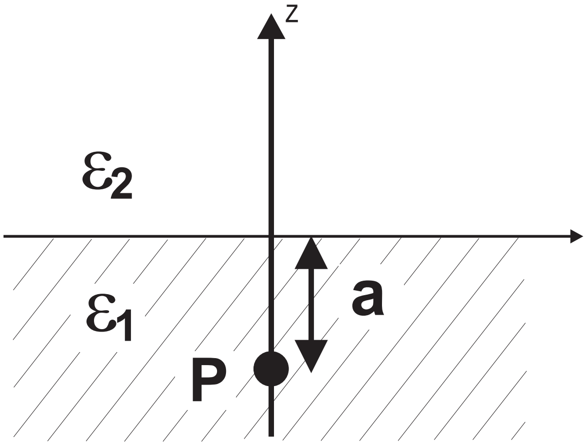
d) Das zugehörige Potential $\phi_{\mathrm{H}}(r)$ mit $\phi_{\mathrm{H}}(\infty) = 0$ lautet

$$\phi_{\mathrm{H}}(r) = \frac{e}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{r} + \frac{1}{a}\right)\mathrm{e}^{-2r/a}.$$

Diskutieren Sie das Gesamtergebnis $\vec{E}_{\mathrm{H}}(\vec{r})$ und $\phi_{\mathrm{H}}(r)$ für kleine $(r \ll a)$ und große $(r \gg a)$ Abstände. (6 Punkte)

2.5 Ladung vor Dielektrikum (H2004)

Eine Ladung e befinde sich im Punkt $P = (0, 0, -a)$ in einer Entfernung a von der Grenzfläche zweier verschiedener (dreidimensionaler) dielektrischer homogener Medien mit relativen dielektrischen Permeabilitäten ε_1 bzw. ε_2 (s. Figur). Die Grenzfläche ist durch die Gleichung $z = 0$ beschrieben. Die elektrischen Potentiale in beiden Medien, ϕ_1 bzw. ϕ_2, erfüllen wegen der Stetigkeit der Tangentialkomponenten des elektrischen Feldes die Bedingung $\phi_1(x, y, 0) = \phi_2(x, y, 0)$ für alle Punkte $(x, y, 0)$ an der Grenzfläche.



a) Geben Sie die aus der Stetigkeit der Normalkomponente der dielektrischen Verschiebung folgende Grenzbedingung für die elektrischen Potentiale ϕ_1 und ϕ_2 an. (3 Punkte)

b) Benutzen Sie die Methode der Spiegelladung und die zwei Grenzbedingungen für die Potentiale, um die elektrischen Potentiale $\phi_1$und ϕ_2 zu bestimmen.
Hinweis: Suchen Sie das Potential im Medium 1 als eines, das von zwei Punktladungen e und e', die an den Punkten $P = (0, 0, -a)$ bzw. $P' = (0, 0, a)$ lokalisiert sind, erzeugt wird. Suchen Sie dagegen das Potential im Medium 2 als eines, das von einer einzigen Punktladung e'' im Punkt P erzeugt wird. Bestimmen Sie e, e', e''.

Zur Kontrolle: Für $\varepsilon_2 = 1$ ist $e' = e(\varepsilon_1 - 1)/(\varepsilon_1 + 1)$, $e'' = 2e/(\varepsilon_1 + 1)$. (12 Punkte)

c) Berechnen Sie die Kraft, die auf die Ladung e im Punkt P wirkt, und diskutieren Sie, welchen physikalischen Effekt sie hervorruft, wenn das Medium 1 Luft ist ($\varepsilon_1 = 1$) und $\varepsilon_2 > 1$ gilt. (6 Punkte)

d) Diskutieren Sie den Fall $\varepsilon_2 \to \infty$. Welcher physikalischen Situation entspricht dies? (4 Punkte)

2.6 Mittleres Potential (H2004)

Eine lokalisierte, statische Ladungsverteilung $\rho(\vec{r})$ erzeuge das Potential $\phi(\vec{r})$.

a) Wie lässt sich das Potential $\phi(\vec{r})$ in Integralform durch die Ladungsdichte $\rho(\vec{r})$ darstellen? (5 Punkte)

b) Wir beschränken uns nun auf ein Teilgebiet des Raumes, das ladungsfrei ist. Zeigen Sie, dass dann gilt: Der Mittelwert von $\phi(\vec{r})$ über eine Kugeloberfläche ist gleich dem Wert von $\phi(\vec{r})$ im Kugelmittelpunkt.

   Hinweis: Die Winkelintegration kann mit Hilfe des Integrals

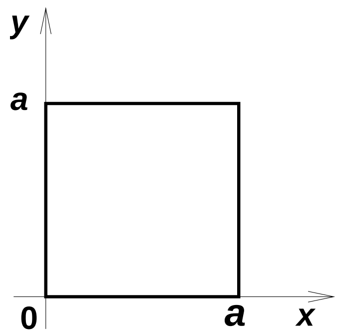
$$\int \mathrm{d}x \frac{1}{\sqrt{a+bx}} = \frac{2}{b}\sqrt{a+bx} + \mathrm{const.}$$

   ausgeführt werden. (15 Punkte)

c) Ist es möglich, ein geladenes Teilchen in elektrostatischen Feldern im Vakuum in eine stabile Gleichgewichtslage zu bringen? Begründen Sie Ihre Antwort mit Hilfe von Teilaufgabe b. (5 Punkte)

2.7 Hohlleiter (F2005)

Gegeben sei ein von ideal leitenden ($\sigma \to \infty$), metallischen Wänden begrenzter, unendlich langer Hohlleiter quadratischen Querschnitts (innere Querschnittsfläche a^2). Im Inneren des Hohlleiters herrsche Vakuum. Die Achse des Hohlleiters zeige in z-Richtung.
Nebenstehende Skizze zeigt einen Querschnitt durch den Hohlleiter und definiert das Koordinatensystem. Im Folgenden soll die Ausbreitung elektromagnetischer Wellen im Inneren des Hohlleiters untersucht werden.



a) Wie lauten die Maxwell-Gleichungen im ladungs- und stromfreien Vakuum?
(4 Punkte)

b) An ideal leitenden, metallischen Oberflächen gilt die Randbedingung verschwindender Parallelkomponente des elektrischen Feldes. Begründen Sie diese Randbedingung.
(6 Punkte)

c) Das elektrische Feld, $\vec{E} = (E_x, E_y, E_z)$, habe im Inneren des Hohlleiters die Form

$$E_x(x, y, z, t) = E_0 \sin \frac{\pi y}{a} \cos(kz - \omega t) , \quad E_y = E_z = 0 .$$

Wie groß ist die Ladungsdichte im Inneren des Hohlleiters? (6 Punkte)

d) Berechnen Sie unter Benutzung der Maxwell-Gleichungen die Zeitableitung

$$\frac{\partial}{\partial t} \vec{B}(x, y, z, t)$$

der orts- und zeitabhängigen magnetischen Induktion im Inneren des Hohlleiters.
(9 Punkte)

2.8 Elektrisches Feld und Potential geladener Kugeln (F2005)

Betrachtet werde eine homogen geladene Kugel mit dem Radius R, der Ladungsdichte ρ und der Gesamtladung q.

a) Wie hängen Ladungsdichte und Gesamtladung zusammen? (4 Punkte)

b) Geben Sie den Zusammenhang des elektrostatischen Feldes $\vec{E}(\vec{r})$ mit dem Skalarpotential $\phi(\vec{r})$ an. Was kann man allein auf Grund der Symmetrie über Form und Abhängigkeiten von $\phi(\vec{r})$ und $\vec{E}(\vec{r})$ sagen? (6 Punkte)

c) Berechnen Sie das elektrische Feld $\vec{E}(\vec{r})$ im Innen- und Außenraum der Kugel mit Hilfe des Gesetzes von Gauß (in der integralen Form). (8 Punkte)

d) Berechnen Sie das zugehörige Potential $\phi(\vec{r})$ durch Wegintegration über das elektrische Feld. *Ergebnis zur Kontrolle*:

$$\phi(\vec{r}) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0} \times \begin{cases} \dfrac{3}{2R} - \dfrac{r^2}{2R^3} & \text{für } r \leq R \\ \dfrac{1}{r} & \text{für } r \geq R \end{cases}$$

(7 Punkte)

2.9 Metallkugel in externem Feld (H2005)

Eine Metallkugel mit Radius R wird in ein konstantes externes elektrisches Feld $\vec{E}^{\text{ext}} = E_0\,\vec{e}_z$ gesetzt, das zu einem externen Potential ϕ^{ext} führt. Auf der Kugel seien Oberflächenladungen mit der Flächenladungsdichte $\sigma(\vartheta, \varphi)$ vorhanden, die einen zusätzlichen Beitrag zum Gesamtpotential induziert. Das Gesamtpotential ϕ der Kugel soll als null angenommen werden, d. h. $\phi(\vec{r}\,) = 0$ für $|\vec{r}| < R$.

a) Verifizieren Sie, dass das Potential des externen Feldes als $\phi^{\text{ext}}(\vec{r}\,) = -\vec{E}^{\text{ext}} \cdot \vec{r}$ geschrieben werden kann. (3 Punkte)

b) Welches sind die Randbedingungen an das gesamte Potential (externes Feld plus Kugel) bei $|\vec{r}\,| = R$ und $|\vec{r}\,| \to \infty$? Wie lautet die Differentialgleichung, der das Potential genügt? (6 Punkte)

c) Der allgemeine Ansatz für Lösungen der Laplace-Gleichung für axialsymmetrische Probleme lautet

$$\phi(\vec{r}\,) = \phi(r, \vartheta, \varphi) = \sum_{\ell=0}^{\infty} \left(a_\ell r^\ell + \frac{b_\ell}{r^{\ell+1}} \right) P_\ell\,(\cos\vartheta) \ ,$$

wobei P_ℓ Legendre-Polynome sind (d. h. $P_0(x) = 1$, $P_1(x) = x$, etc.). Verwenden Sie diesen Ansatz und die in Teilaufgabe b) aufgestellten Randbedingungen, um das Gesamtpotential $\phi(\vec{r}\,)$ im Bereich $r \geq R$ zu bestimmen. (6 Punkte)

d) Zeigen Sie, dass die influenzierte Oberflächenladungsdichte auf der Kugel, $\sigma = \varepsilon_0 E_n$, folgende Form hat ($E_n$ ist die Feldkomponente senkrecht zur Kugeloberfläche):

$$\sigma(\vartheta, \varphi) \ = \ 3\varepsilon_0 E_0 \cos\vartheta \ .$$

(6 Punkte)

e) Berechnen Sie die gesamte influenzierte Ladung. (4 Punkte)

2.10 Linienförmige Ladungsverteilung und Metalloberfläche (H2005)

Es soll das elektrische Potential untersucht werden, das von einer in z-Richtung linearen Ladungsverteilung $\rho(x, y, z) = \rho_1 \delta(x - a)\delta(y)$ erzeugt wird. Hierbei ist ρ_1 eine konstante Ladung pro Länge. Es soll ferner die Möglichkeit vorgesehen sein, eine ideal leitende, geerdete Metallplatte in der (y, z)-Ebene anzubringen.

a) Zeigen Sie mit Hilfe des Satzes von Gauß, dass sich das Potential in Abwesenheit der Metallplatte in der Form

$$\Phi(R) = -\frac{\rho_1}{2\pi\epsilon_0} \ln(R) + \Phi_0$$

schreiben lässt, wobei R der senkrechte Abstand von der linearen Ladungsverteilung ist.

(10 Punkte)

Hinweis: In Zylinderkoordinaten (r, φ, z) gilt

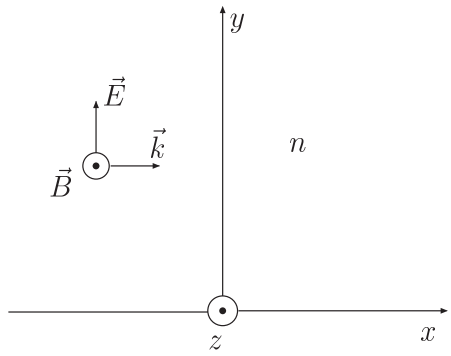
$$\vec{\nabla}\Phi = \frac{\partial \Phi}{\partial r}\vec{e}_r + \frac{1}{r}\frac{\partial \Phi}{\partial \varphi}\vec{e}_\varphi + \frac{\partial \Phi}{\partial z}\vec{e}_z \,.$$

b) Es werde nun eine unendlich ausgedehnte, geerdete Metallplatte in der (y, z)-Ebene angebracht. Welche Randbedingung muss das Potential bei $x = 0$ erfüllen? Bestimmen Sie nun mit Hilfe der Bildladungsmethode das elektrische Potential im Halbraum $x > 0$.

(8 Punkte)

c) Skizzieren Sie qualitiv die elektrischen Feldlinien in der (x, y)-Ebene für $x > 0$. In welche Richtung zeigt das elektrische Feld an der Metallplatte? (7 Punkte)

2.11 Reflexion (F2006)



Die Ebene $x = 0$ sei die Grenzfläche zwischen dem Vakuum (Halbraum $x < 0$) und einem Dielektrikum (Halbraum $x > 0$) mit konstantem Brechungsindex $n = \sqrt{\varepsilon} > 1$ und Permeabilität $\mu = \mu_0$. Ein in x-Richtung einfallender Lichtstrahl (monochromatische ebene Welle) mit Frequenz ω, Wellenzahl $\vec{k} = \vec{e}_x\, k$ und elektrischem Feld $\vec{E} = \vec{e}_y\, E$ treffe aus dem Vakuum senkrecht auf die Grenzfläche.

Die elektrischen und magnetischen Felder der einfallenden Welle $(\vec{E}, \vec{B})$, der transmittierten Welle $(\vec{E}', \vec{B}')$ und der reflektierten Welle $(\vec{E}'', \vec{B}'')$ können geschrieben werden als

$$\vec{E}(\vec{r},t) = \vec{e}_y E_0\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}(kx-\omega t)}\,, \quad \vec{E}'(\vec{r},t) = \vec{e}_y E_0'\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}(nkx-\omega t)}\,, \quad \vec{E}''(\vec{r},t) = \vec{e}_y E_0''\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}(-kx-\omega t)}\,; \tag{1a}$$

$$\vec{B}(\vec{r},t) = \vec{e}_z B_0\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}(kx-\omega t)}\,, \quad \vec{B}'(\vec{r},t) = \vec{e}_z B_0'\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}(nkx-\omega t)}\,, \quad \vec{B}''(\vec{r},t) = \vec{e}_z B_0''\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}(-kx-\omega t)}\,. \tag{1b}$$

a) Benutzen Sie das Induktionsgesetz $\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial}{\partial t}\vec{B}$, um den Zusammenhang zwischen E_0 und B_0 (E_0' und B_0', E_0'' und B_0'') herzuleiten. (6 Punkte)

b) Berechnen Sie die Amplituden der transmittierten Welle E_0' und der reflektierten Welle E_0'' als Funktionen von n und E_0.
Hinweis: Für die vorgegebene Geometrie sind die elektrischen und magnetischen Felder beide *stetig* an der Grenzfläche. (8 Punkte)

c) Sind die elektrischen Felder der einfallenden und reflektierten Wellen parallel oder antiparallel zueinander? (2 Punkte)

d) Die Intensitäten der einfallenden, transmittierten und reflektierten Wellen können wie folgt durch die entsprechenden Energiestromdichten ausgedrückt werden:

$$I = \frac{1}{2\mu_0}|\vec{E} \times \vec{B}^*|\,, \quad I' = \frac{1}{2\mu_0}|\vec{E}' \times \vec{B}'^*|\,, \quad I'' = \frac{1}{2\mu_0}|\vec{E}'' \times \vec{B}''^*|\,. \tag{2}$$

Berechnen Sie $T = I'/I$ und $R = I''/I$, d.h. die transmittierte bzw. reflektierte Intensität bezogen auf die einfallende Intensität. (6 Punkte)

e) Was muss für $R + T$ gelten und warum? Überprüfen Sie diese Beziehung mit dem Ergebnis von Teilaufgabe d). (3 Punkte)

2.12 Elektromagnetische Wellen (F2006)

Es sollen elektromagnetischen Wellen in einem isotropen, homogenen Material mit den Maxwell-Gleichungen

$$\begin{aligned}
\varepsilon\varepsilon_0 \vec{\nabla} \cdot \vec{E} &= 0 \\
\vec{\nabla} \cdot \vec{B} &= 0 \\
\vec{\nabla} \times \vec{E} &= -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \\
\vec{\nabla} \times \frac{1}{\mu\mu_0}\vec{B} &= \frac{\partial \varepsilon\varepsilon_0 \vec{E}}{\partial t} + \vec{j}
\end{aligned}$$

betrachtet werden. Hierbei ist $\vec{j}$ die Stromdichte, die dem Ohm'schen Gesetz $\vec{j} = \sigma\vec{E}$ mit der elektrischen Leitfähigkeit σ genüge, welche im Allgemeinen komplex und frequenzabhängig sei. Ferner seien keine freien Ladungen vorhanden.

a) Zeigen Sie, dass die zeitabhängigen Maxwell-Gleichungen ebene Wellen der Form

$$\begin{aligned}
\vec{B} &= \vec{B}_0 \exp[\mathrm{i}(\vec{k} \cdot \vec{x} - \omega t)] \\
\vec{E} &= \vec{E}_0 \exp[\mathrm{i}(\vec{k} \cdot \vec{x} - \omega t)]
\end{aligned}$$

als Lösungen besitzen. (5 Punkte)

b) Zeigen Sie, dass es sich um transversale Wellen handelt. Welchen Winkel schließen $\vec{E}_0$ und $\vec{B}_0$ ein? (5 Punkte)

c) Welche Dispersionsrelation $\omega = \omega(\vec{k})$ ergibt sich für Isolatoren ($\sigma \equiv 0$)? Was ergibt sich für Phasen- und Gruppengeschwindigkeit? (6 Punkte)

d) Welche Dispersionsrelation $k^2 = k^2(\omega)$ ergibt sich, wenn $\sigma(\omega)$ die Form

$$\sigma = \sigma_0/(1 - \mathrm{i}\omega\tau) \qquad (1)$$

besitzt? Mit welcher Potenz von ω skaliert der komplexe Brechungsindex im Grenzfall $\omega \to 0$? (9 Punkte)

2.13 Elektrostatische Energie (H2006)[10]

Die elektrostatische Energie von N Punktladungen q_i an den Orten $\vec{r}_i$ ist gegeben durch

$$U = \frac{1}{8\pi\epsilon_0} \sum_{i \neq j}^{N} \frac{q_i q_j}{|\vec{r}_i - \vec{r}_j|}. \tag{1}$$

a) Wie hängt dieser Ausdruck mit dem Coulomb-Potential zweier Punktladungen zusammen, und welcher Arbeit entspricht die Energie U physikalisch? (4 Punkte)

b) Betrachten Sie nun eine lokalisierte, kontinuierliche Ladungsverteilung mit Ladungsdichte $\rho(\vec{r})$. Wie lautet der Ausdruck für die elektrostatische Energie in diesem Fall? Leiten Sie das Ergebnis aus Gleichung (1) durch einen Kontinuumsübergang her. (6 Punkte)

c) Warum braucht man sich im Falle der kontinuierlichen, nicht-singulären Ladungsverteilung ($|\rho(\vec{r})| < \infty$) nicht um die Bedingung $i \neq j$ in Gleichung (1) zu kümmern? (6 Punkte)

d) Wie kann man die Energie aus Teilaufgabe c) durch die elektrische Feldstärke, die von der Ladungsverteilung erzeugt wird, darstellen? Verwenden Sie die Laplace-Gleichung

$$\Delta\Phi(\vec{r}) = -\frac{1}{\epsilon_0}\rho(\vec{r}) \tag{2}$$

oder das Gauß'sche Gesetz. (9 Punkte)

[10] Siehe auch Aufgabe 2.16

2.14 Magnetfeld einer Stromverteilung (H2006)

Gegeben sei ein zylinderförmiger Leiter vom Radius R, durch welchen ein homogen verteilter Strom I fließt. Wählen Sie Zylinderkoordinaten r, φ, z mit der z-Achse in Richtung der Zylinderachse.

a) Begründen Sie, dass die magnetische Induktion $\vec{B}$ nur eine φ-Komponente hat. (5 Punkte)

b) Bestimmen und skizzieren Sie die Ortsabhängigkeit der magnetischen Induktion $B_\varphi(r)$ innerhalb und außerhalb des Zylinders. (6 Punkte)

Gegeben sei nun ein Hohlzylinder mit innerem Radius R_1 und äußerem Radius R_2, welcher vom Strom I in z-Richtung durchflossen wird.

c) Bestimmen Sie die Stromdichte j. Bestimmen Sie unter Verwendung des Ergebnisses von Teilaufgabe b die magnetische Induktion $B_\varphi(r)$. Skizzieren Sie die Ortsabhängigkeit von $B_\varphi(r)$. (7 Punkte)

d) Betrachten Sie den Grenzfall $d = R_2 - R_1 \to 0$: Bestimmen Sie die magnetische Induktion für eine sehr dünne Zylinderwand ($d \ll R_1, R_2$). Was folgt daraus für den Sprung der magnetischen Induktion an einer stromdurchflossenen Grenzfläche? (7 Punkte)

2.15 Wellenausbreitung zwischen Leiterplatten (F2007)

Wir betrachten zwei unendlich ausgedehnte und parallel zur (x, y)-Ebene liegende Platten, die aus ideal leitendem Material bestehen. Ideale Leiter sind dadurch charakterisiert, dass elektromagnetische Felder nicht in sie eindringen können. Eine Platte möge bei $z = 0$ und die andere bei $z = L$ liegen. Zwischen den Platten herrsche Vakuum. Die Maxwell-Gleichungen für das Vakuum lauten allgemein

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E}(\vec{x}, t) = 0, \qquad \vec{\nabla} \cdot \vec{B}(\vec{x}, t) = 0,$$
$$\vec{\nabla} \times \vec{E}(\vec{x}, t) = -\frac{\partial \vec{B}(\vec{x}, t)}{\partial t}, \qquad \vec{\nabla} \times \vec{B}(\vec{x}, t) = \frac{1}{c^2} \frac{\partial \vec{E}(\vec{x}, t)}{\partial t}.$$

Wegen des idealen Leiters als Wandmaterial erfüllen die Felder die Randbedingungen

$$E_x = E_y = 0 \tag{1}$$

und

$$B_z = 0 \tag{2}$$

für $z = 0$ und $z = L$.
Hinweis: Für beliebige Vektoren gilt $\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) = \vec{b}\,(\vec{a} \cdot \vec{c}) - \vec{c}\,(\vec{a} \cdot \vec{b})$.

a) Wir betrachten nun elektromagnetische Wellen, die sich zwischen den Platten entlang der x-Richtung ausbreiten,

$$\vec{E}(\vec{x}, t) = \vec{E}(z)\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}(kx - \omega t)},$$
$$\vec{B}(\vec{x}, t) = \vec{B}(z)\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}(kx - \omega t)}.$$

Zeigen Sie, dass diese Felder den Gleichungen

$$\mathrm{i}\omega \vec{\nabla} \times \vec{B}(\vec{x}, t) = \frac{\omega^2}{c^2} \vec{E}(\vec{x}, t),$$
$$-\frac{\mathrm{i}\omega}{c^2} \vec{\nabla} \times \vec{E}(\vec{x}, t) = \frac{\omega^2}{c^2} \vec{B}(\vec{x}, t)$$

genügen. (5 Punkte)

b) Zeigen Sie nun, dass die Felder $\vec{E}(z)$ und $\vec{B}(z)$ Lösungen der eindimensionalen Differentialgleichungen

$$\left(\partial_z^2 + \lambda\right) \vec{E}(z) = 0 \quad \text{bzw.} \quad \left(\partial_z^2 + \lambda\right) \vec{B}(z) = 0$$

mit einer geeigneten Konstanten λ und den Randbedingungen (1) bzw. (2) sind. Verwenden Sie dieses λ, um ω als Funktion von k zu schreiben, und zeigen Sie, dass es für $\lambda > 0$ eine Grenzfrequenz $\omega_{\min}$ gibt, unterhalb derer keine Wellenpropagation parallel zu den Platten möglich ist. (10 Punkte)

c) Lösen Sie nun die Differentialgleichung

$$\left(\partial_z^2 + \lambda\right) B_z(z) = 0\,, \ \lambda > 0$$

für $B_z(z)$ durch einen geeigneten Ansatz, der mit der Randbedingung (2) verträglich ist. Zeigen Sie, dass die Eigenfrequenzen dann durch

$$\omega_n\,(k) = c\sqrt{\frac{\pi^2 n^2}{L^2} + k^2}$$

gegeben sind, und geben Sie die erlaubten Werte von n an. (10 Punkte)

2.16 Elektrostatische Energie (F2007)[11]

a) Das Potential einer homogen geladenen Kugel vom Radius R mit der Gesamtladung Q ist gegeben durch

$$\phi(\vec{r}) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{2R^3}(3R^2 - r^2) \quad \text{für} \quad r \leq R, \tag{1}$$

wobei $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ die Radialkoordinate ist. Berechnen Sie damit die elektrostatische Energie der homogen geladenen Kugel. (5 Punkte)

b) Leiten Sie nun einen Ausdruck für das Potential einer leitenden Kugel von gleicher Gesamtladung und gleichem Radius her, und berechnen Sie die entsprechende Energie. Vergleichen Sie die Ergebnisse der Teilaufgaben a) und b), und begründen Sie kurz (ein bis zwei Sätze genügen), warum es auch ohne Rechnung physikalisch einsichtig ist, dass eine der Kugeln einen größeren Energieinhalt hat. (10 Punkte)

c) Gegeben ist die Ladungsverteilung

$$\rho(\vec{r}) = \begin{cases} \rho_0/r^2 & \text{für} \quad R_1 \leq r \leq R_2 \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Berechnen Sie die Gesamtladung Q, das elektrische Feld $\vec{E}$ und das stetige Potential ϕ in Abhängigkeit von ρ_0, R_1 und R_2. (10 Punkte)

Hinweise:
Das Potential soll im Unendlichen jeweils gegen Null gehen.
Der Gradient einer nur von der Radialkoordinate r abhängenden Funktion $f(r)$ ist gegeben durch

$$\mathrm{grad} f(r) = \frac{\partial f(r)}{\partial r}\,\vec{e}_r\,. \tag{2}$$

[11] Siehe auch Aufgabe 2.13

2.17 Penning-Falle (H2007)

Ein Elektron mit Ladung $q = -e$ bewege sich in einem statischen homogenen Magnetfeld $\vec{B} = B\vec{e_z}$ und einem ebenfalls statischen, aber inhomogenen elektrischen Feld $\vec{E}$, das durch ein Quadrupolpotential

$$\phi(x, y, z) = \frac{U_0}{2r_0^2}(x^2 + y^2 - 2z^2) \quad \text{mit} \quad U_0 > 0$$

gegeben ist.

a) Lösen Sie die nichtrelativistische Bewegungsgleichung für die *Geschwindigkeit* des Elektrons zunächst für $U_0 = 0$ und für eine Bewegung in der (x, y) -Ebene, und bestimmen Sie die dazugehörige Frequenz ω_c. (6 Punkte)

b) Berechnen Sie das elektrische Feld aus dem gegebenen Quadrupolpotential, und verifizieren Sie, dass $\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = 0$ gilt. (4 Punkte)

c) Zeigen Sie, dass bei einer Bewegung entlang der z-Achse das Magnetfeld keinen Einfluss hat, und bestimmen Sie die Frequenz ω_z der harmonischen Schwingungen entlang dieser Achse im elektrischen Quadrupolfeld. (6 Punkte)

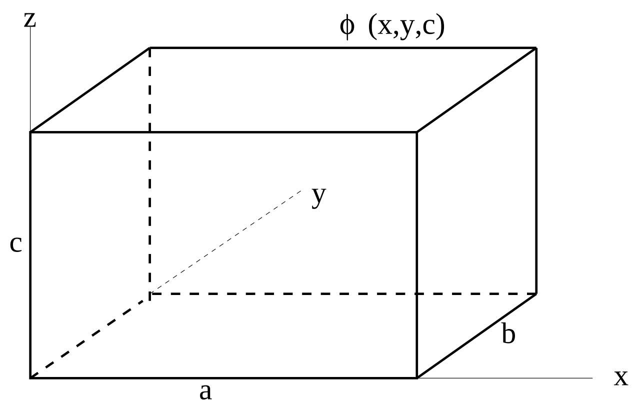
d) Lösen Sie die vollständigen Bewegungsgleichungen in der (x, y)-Ebene durch einen Ansatz $x(t) = A\cos(\omega_M t)$ und $y(t) = A\sin(\omega_M t)$ von Kreisbahnen um den Ursprung. Berechnen Sie die dazugehörige so genannte Magnetron-Frequenz ω_M ausgedrückt durch ω_c und ω_z. Wann ist diese Bewegung stabil? (9 Punkte)

2.18 Elektrisches Potential im Kasten (H2007)

Die Oberfläche eines Quaders mit den Kantenlängen a, b und c in x-, y- bzw. z-Richtung habe ein wohldefiniertes elektrisches Potential. Auf allen Seitenflächen gelte $\Phi = 0$, außer auf der Deckelfläche $z = c$, auf der das Potential die folgende Form annehmen soll,

$$\Phi(x, y, c) = V_0 \sin(\frac{\pi}{a}x) \sin(\frac{\pi}{b}y), \quad (V_0 > 0)\ . \tag{1}$$

Im Inneren des Quaders gebe es keine elektrische Ladung.



a) Welche Differentialgleichung beschreibt das elektrische Potential $\Phi(x, y, z)$ im Inneren des Kastens? (5 Punkte)

b) Berechnen Sie das elektrische Potential $\Phi(x, y, z)$ im Inneren des Quaders durch einen Separationsansatz. (12 Punkte)

c) Berechnen Sie das elektrische Feld auf der Seitenfläche $y = 0$. In welche Richtung zeigt das Feld, und an welcher Stelle auf der Seitenfläche hat es seinen maximalen Betrag? (8 Punkte)

2.19 Gleichstrom und Poynting-Vektor (F2008)[12]

a) Ein in z-Richtung orientierter zylinderförmiger Draht mit Radius r_1 werde im gesamten Querschnitt homogen von einer Stromdichte $\vec{j} = j\vec{e}_z$ durchflossen. Berechnen Sie das magnetische Feld $\vec{H}$ außerhalb des Leiters. (5 Punkte)

b) Der Leiter genüge dem Ohm'schen Gesetz $\vec{j} = \sigma\vec{E}$, wobei σ die spezifische Leitfähigkeit und $\vec{E}$ die elektrische Feldstärke im Leiter ist. Berechnen Sie die Normalkomponente des Poynting-Vektors $\vec{S} = \vec{E} \times \vec{H}$ auf der Leiteroberfläche. Bestimmen Sie ferner die durch die Oberfläche eines Leiterstücks der Länge L zugeführte Leistung, und drücken Sie das Ergebnis durch den Gesamtstrom I und den Widerstand R des Leiterstücks aus. Was passiert mit der zugeführten Leistung? (7 Punkte)

Es soll nun der Grenzfall eines idealen Leiters $(\sigma \to \infty)$ untersucht werden. Dazu ergänzen wir den bis jetzt betrachteten Draht um einen hohlzylinderförmigen Leiter mit Innenradius $r_2 > r_1$ zu einem Koaxialkabel. Zwischen den beiden Leitern liege eine Potentialdifferenz U an.

c) Bestimmen Sie das elektrische Feld im ladungsfreien Raum zwischen den beiden Leitern. (8 Punkte)

d) Überzeugen Sie sich davon, dass der Poynting-Vektor zwischen den beiden Leitern in z-Richtung zeigt. Berechnen Sie diesen, und integrieren Sie über den Querschnitt senkrecht zum Koaxialkabel. Drücken Sie das Resultat durch den Strom I und die Potentialdifferenz U aus. (5 Punkte)

Hinweis: Die Divergenz eines Vektors $\vec{u}$ lautet in Zylinderkoordinaten (ρ, φ, z):

$$\operatorname{div}\vec{u} = \frac{1}{\rho}\frac{\partial(\rho u_\rho)}{\partial\rho} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial u_\varphi}{\partial\varphi} + \frac{\partial u_z}{\partial z}$$

[12] Siehe auch Aufgabe 2.3

2.20 Dipolmoment des HCl-Moleküls (F2008)

In einem vereinfachten Modell entsteht ein Salzsäure-Molekül (HCl) durch Verbindung eines Wasserstoff-Atoms mit einem Chlor-Atom ($Z = 17$), wobei das H-Atom ein Elektron an das Cl-Atom abgibt. Die 18 Elektronen des Cl-Ions bilden eine näherungsweise sphärische Wolke um den Cl-Kern. Die beiden Kerne sind 1.28 Å voneinander entfernt. Das Dipolmoment des oben beschriebenen Moleküls soll berechnet und mit dem experimentellen Wert von $d = 3.4 \times 10^{-28}$ Coulomb cm verglichen werden.

a) Zeigen Sie, dass das Dipolmoment einer Ladungsverteilung genau dann vom Koordinatenursprung unabhängig ist, wenn die Gesamtladung verschwindet. (7 Punkte)

b) Drücken Sie das Dipolmoment einer Summe von Ladungsverteilungen,

$$\rho(\vec{r}\,) = \rho_1(\vec{r}\,) + \rho_2(\vec{r}\,) \ ,$$

durch die jeweiligen Gesamtladungen $Q_{1,2}(\neq 0)$ und deren Ladungsschwerpunkte aus. (6 Punkte)

c) Berechnen Sie das Dipolmoment des obigen Moleküls (Elementarladung: $e = 1.6 \times 10^{-19}$ Coulomb). Verwenden Sie hierzu die Verallgemeinerung der Aussage aus Teilaufgabe (b) auf drei verschiedene Ladungsverteilungen, nämlich die der beiden Kerne und der Elektronenwolke. (6 Punkte)

d) Wie weit muss der Schwerpunkt negativer Ladung vom Cl-Kern in Richtung zum Proton verschoben werden, damit das Dipolmoment in unserem Modell den gemessenen Wert annimmt? (6 Punkte)

2.21 Felder einer linearen Ladungsverteilung (H2008)

Die gesamte z-Achse sei mit einer konstanten linearen Ladungsdichte ρ_{L} belegt, die sich mit der Geschwindigkeit v in Richtung steigender z-Werte bewegt. Es fließt also ein Strom $I = \rho_{\mathrm{L}} v$ entlang der z-Achse.

a) Berechnen Sie die magnetische Induktion $\vec{B}$, die durch den Strom I erzeugt wird. (6 Punkte)

b) Die Ladungsverteilung ρ_{L} führt auch zu einem elektrischen Feld $\vec{E}$. Zeigen Sie, dass $\vec{E}$ in Zylinderkoordinaten nur eine Radialkomponenten besitzt, und bestimmen Sie das elektrische Feld mit Hilfe des Satzes von Gauß. Es ist hierzu sinnvoll, einen geeignet gewählten Zylinder als Integrationsvolumen heranzuziehen. (8 Punkte)

c) Man kann zeigen, dass $\vec{B}^2 - (1/c^2)\vec{E}^2$ in jedem Inertialsystem den gleichen Wert besitzt. Was folgt daraus für den Betrag des elektrischen Feldes im Ruhesystem der Ladungsverteilung? Welche lineare Ladungsdichte ρ_{L}^0 beobachtet man demnach im mitbewegten Bezugssystem? Erklären Sie den Unterschied zwischen ρ_{L} und ρ_{L}^0. (11 Punkte)

Zur Erinnerung: Die Maxwell-Gleichungen lauten

$$\mathrm{div}\vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \qquad \mathrm{div}\vec{B} = 0$$

$$\mathrm{rot}\vec{B} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = \mu_0 \vec{j} \qquad \mathrm{rot}\vec{E} + \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = 0\,.$$

2.22 Drude-Modell (H2008)

Das Drude-Modell stellt ein einfaches Modell für elektronischen Transport in Metallen dar. Hierbei wird angenommen, dass freie Elektronen mit der Ladung $-e$ und mit der effektiven Masse m^* einem zeitabhängigen externen elektrischen Feld $\vec{E}(t)$ ausgesetzt sind. Zusätzlich wirkt eine phänomenologische Reibungskraft, die proportional zur Geschwindigkeit $\vec{v}(t)$ der Elektronen ist. Für ein einzelnes Elektron gilt also die Bewegungsgleichung

$$m^*\dot{\vec{v}}(t) + \gamma\vec{v}(t) = -e\vec{E}(t)\,. \tag{1}$$

Die Stromdichte ergibt sich als $\vec{j}(t) = -ne\vec{v}(t)$, wobei n die Dichte der freien Elektronen im Metall darstellt.

a) Formulieren Sie aus Gleichung (1) die Bewegungsgleichung

$$\partial_t\vec{j}(t) + \frac{1}{\tau}\vec{j}(t) = \omega_p^2\epsilon_0\vec{E}(t) \tag{2}$$

für die Stromdichte $\vec{j}(t)$, und bestimmen Sie die charakteristische Zeitskala τ sowie die sogenannte Plasmafrequenz ω_p aus den Parametern m^* und n.
Berechnen Sie die Plasmafrequenz für Aluminium; die zugehörige freie Elektronendichte beträgt $n = 1{,}81 \times 10^{29}\ \mathrm{m}^{-3}$, und die effektive Masse m^* der Elektronen stimmt näherungsweise mit der Masse m freier Elektronen überein. (6 Punkte)

b) Führen Sie eine Fourier-Transformation,

$$\vec{j}_\omega = \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}t\ \mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}\,\vec{j}(t)\,, \qquad \vec{j}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathrm{d}\omega}{2\pi}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}\,\vec{j}_\omega$$

durch, und zeigen Sie, dass im Frequenzraum $\vec{j}_\omega = \sigma_\omega\vec{E}_\omega$ gilt. Bestimmen Sie die komplexe frequenzabhängige Leitfähigkeit σ_ω. (8 Punkte)

c) Zerlegen Sie die Leitfähigkeit in Real- und Imaginarteil, $\sigma_\omega = \sigma'_\omega + \mathrm{i}\sigma''_\omega$, und fertigen Sie eine Skizze von σ'_ω und σ''_ω als Funktion von ω an. Diskutieren Sie das Verhalten für kleine und große Frequenzen ω. Welche Terme der Gleichung (2) dominieren jeweils das Nieder- und Hochfrequenzverhalten? (11 Punkte)

Konstanten:

Dielektrizitätskonstante des Vakuums:	$\epsilon_0 = 8{,}854 \times 10^{-12}\,\frac{\mathrm{A\cdot s}}{\mathrm{V\cdot m}}$
Elektronenmasse:	$m = 9{,}109 \times 10^{-31}$ kg
Elementarladung:	$e = 1{,}602 \times 10^{-19}$ C

3 Thermodynamik

3.1 Schallgeschwindigkeit (H2003)

Die Schallgeschwindigkeit in einem Gas mit Molmasse M berechnet sich aus dem Druck p und der Dichte ρ mit Hilfe von $v = \sqrt{\partial p/\partial \rho}$. In dieser Aufgabe soll die Schallgeschwindigkeit in einem idealen Gas unter verschiedenen Bedingungen untersucht werden.

a) Leiten Sie unter der Annahme, dass die Schallausbreitung isotherm erfolgt, einen Ausdruck für die Schallgeschwindigkeit v_T ab, in dem nur die Temperatur als thermodynamische Zustandsgröße vorkommt. (5 Punkte)

b) Zeigen Sie unter Zuhilfenahme des ersten Hauptsatzes, dass für einen adiabatischen Prozess der Druck p proportional zu ρ^γ ist, und bestimmen Sie den Exponenten γ.
Hinweis: Verwenden Sie die Tatsache, dass die innere Energie je Mol eines idealen Gases durch $u = c_V T$ gegeben ist. (12 Punkte)

c) Was ergibt sich somit für die Geschwindigkeit v_{ad} der adiabatischen Schallausbreitung als Funktion der Temperatur? (5 Punkte)

d) Es zeigt sich, dass v_{ad} näher an der Schallgeschwindigkeit in Luft liegt als v_T. Wie lässt sich dies qualitativ verstehen? (3 Punkte)

3.2 Gibbs'sches Paradoxon (H2003)

Gegeben sei ein ideales kompressibles Gas mit der thermischen Zustandsgleichung $pV = Nk_BT$ mit konstanter spezifischer Wärme c_V und mit der Entropie

$$S(T,V,N) = S(T_0,V_0,N) + Nc_V \ln\frac{T}{T_0} + Nk_B \ln\frac{V}{V_0}\ .$$

Dabei sind hier T_0, V_0 und im Folgenden auch s_0 und N_0 Konstanten.

a) Zeigen Sie, dass die innere Energie $U(T,V)$ des idealen Gases unabhängig vom Volumen V ist. (5 Punkte)

Gegeben seien zwei Systeme aus identischen Gasen: Das erste System bestehe aus N Teilchen in einem Volumen V. Das zweite System bestehe aus zwei Teilsystemen mit $\frac{1}{2}N$ Teilchen in jeweils einem Volumen $\frac{1}{2}V$.

b) Berechnen Sie unter der (inkorrekten) Annahme, dass $S(T_0,V_0,N) = Ns_0$ gilt, die Differenz der Entropien der beiden Teilsysteme. (8 Punkte)

c) Welche Form muss die Funktion $S(T_0,V_0,N)$ haben, damit die Entropie $S(T,V,N)$ extensiv ist (eine homogene Funktion von V und N ist), d. h. damit

$$S(T,\lambda V,\lambda N) = \lambda S(T,V,N) \quad \text{insbesondere für } \lambda = \frac{N_0}{N}$$

gilt? Zeigen Sie, dass die Differenz der Entropien der beiden Systeme mit der korrekten Form von $S(T_0,V_0,N)$ verschwindet. (12 Punkte)

3.3 Temperaturabhängigkeit des Dampfdrucks (F2004)

Wir betrachten ein aus einer flüssigen Phase (1) und einer gasförmigen Phase (2) bestehendes System entlang der Koexistenzkurve.

a) Welche Zustandsgrößen in den beiden Phasen sind entlang der Koexistenzkurve gleich? (4 Punkte)

b) Bei Verschiebung entlang der Koexistenzkurve ändern sich die spezifischen freien Enthalpien $g_i(p_i, T_i)$ in gleicher Weise: $\mathrm{d}g_1 = \mathrm{d}g_2$. Leiten Sie daraus die Beziehung

$$\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}T} = \frac{s_2 - s_1}{v_2 - v_1}$$

her, wobei s_i und v_i die spezifische Entropie bzw. das spezifische Volumen in der Phase i bedeuten. (7 Punkte)

c) Aus dem Resultat der Teilaufgabe 2 lässt sich die Clausius-Clapeyron-Gleichung

$$\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}T} = \frac{q}{T(v_2 - v_1)}$$

herleiten. Geben Sie die physikalische Bedeutung von q an, und begründen Sie Ihre Antwort. (5 Punkte)

d) Im Folgenden soll das spezifische Volumen v_1 der flüssigen Phase vernachlässigt werden. In der Gasphase sei das System als ideales Gas beschreibbar. Zeigen Sie mit Hilfe der Clausius-Clapeyron-Gleichung, dass die Temperaturabhängigkeit des Dampfdrucks durch

$$p(T) = p(\infty) \exp\left(-\frac{A}{T}\right)$$

gegeben ist. Was ergibt sich für den Parameter A? (9 Punkte)

3.4 Adiabatische Expansion (F2004)

Gegeben sei ein Gas mit der Zustandsgleichung $p = p(V,T)$, welches adiabatisch von einem Volumen V_1 auf ein Volumen V_2 ohne Arbeitsverrichtung expandiert. Die Wärmekapazität C_V (bei konstantem Volumen) sei eine Konstante.

a) Welche thermodynamischen Größen sind bei dieser Expansion konstant? (Begründung!) (6 Punkte)

b) Leiten Sie die Maxwell-Relation (Integrabilitätsbedingung)

$$\left(\frac{\partial S}{\partial V}\right)_T = \left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_V$$

her. (5 Punkte)

c) Geben Sie einen (allgemeinen) Ausdruck für $(\partial T/\partial V)_U$, die mit der (differentiellen) Expansion verknüpfte (differentielle) Temperaturänderung, an. Was erhält man für die Expansion von einem Volumen V_1 auf ein Volumen V_2? (7 Punkte)

d) Was erhält man für $(\partial T/\partial V)_U$ im Fall des van der Waals-Gases mit der Zustandsgleichung

$$\left(p + \frac{a}{V^2}\right)(V - b) = nRT$$

und im Fall des idealen Gases? Kühlt also das jeweilige Gas ab, oder erwärmt es sich bei der Expansion, oder bleibt die Temperatur gleich? (7 Punkte)

3.5 Stirling-Prozess (H2004)

Für ein ideales Gas soll folgender Kreisprozess mit $T_1 > T_2$ und $V_1 > V_2$ untersucht werden:

$$(T_1, V_2) \xrightarrow{\text{isotherm}} (T_1, V_1) \xrightarrow{\text{isochor}} (T_2, V_1) \xrightarrow{\text{isotherm}} (T_2, V_2) \xrightarrow{\text{isochor}} (T_1, V_2)$$

a) Stellen Sie diesen Kreisprozess sowohl in einem (T, V)-Diagramm als auch in einem (p, V)-Diagramm dar. (5 Punkte)

b) In welchen Prozessschritten wird Wärme zugeführt, in welchen abgeführt? Berechnen Sie die vier Wärmemengen. (8 Punkte)

c) Welche Arbeit wird pro Zyklus geleistet? Bestimmen Sie den Wirkungsgrad, und vergleichen Sie mit dem Wirkungsgrad des Carnot-Prozesses. (8 Punkte)

d) Was würde sich für den Wirkungsgrad ergeben, wenn die bei dem einen isochoren Prozessschritt abgegebene Wärme zwischengespeichert und im anderen isochoren Prozessschritt wieder vollständig zugeführt würde? Vergleichen Sie wieder mit dem Wirkungsgrad des Carnot-Prozesses. Wie viele Wärmebäder werden hierbei benötigt? (4 Punkte)

3.6 Wirkungsgrad (H2004)

Zwei Festkörper $(\Delta V = 0)$ mit konstanter identischer Wärmekapazität C sollen anfangs die Temperaturen $T_1 = 450$ K und $T_2 = 200$ K haben. Zwischen den beiden Körpern soll eine zyklisch laufende Maschine eine mechanische Arbeit W leisten, indem sie Wärme vom heißen zum kalten Körper transportiert. Dabei gleichen sich die Temperaturen aus. Das Gesamtsystem soll seine Entropie nicht ändern, und die Entropie der Maschine bleibt nach jedem Zyklus konstant.

a) Berechnen Sie für die beiden Körper die innere Energie U und die Entropie S als Funktion der Temperatur T. (4 Punkte)

b) Berechnen Sie den anfänglichen idealen Wirkungsgrad $\eta = \delta W/\delta Q$, so lange man die Temperaturänderungen der beiden Körper vernachlässigen kann. $\delta Q \ll CT_1$ ist die Wärmemenge, die dem heißen Körper entnommen wird, und δW ist die von der Maschine geleistete Arbeit. (6 Punkte)

c) Die Maschine soll so lange laufen, bis die beiden Körper die gleiche Temperatur T_e erreicht haben. Wie groß ist die Entropie im Endzustand? Berechnen Sie T_e. (7 Punkte)

d) Wie groß ist der Wirkungsgrad $\eta = W/Q$ für den gesamten Prozess nach dem Erreichen der gemeinsamen Endtemperatur T_e? (8 Punkte)

3.7 Thermodynamik des Gummifadens (F2005)

Ein einfaches, phänomenologisches Modell des Gummifadens beruht auf dem folgenden Ansatz für die Entropie S als Funktion der inneren Energie U und der Länge L des Fadens,

$$S = S_0 + cL_0 \ln\left(\frac{U}{U_0}\right) - \frac{b}{2(L_1 - L_0)}(L - L_0)^2 \ . \tag{1}$$

Dabei sind L_0 die Ruhelänge des Gummifadens, L_1 die elastische Grenzlänge ($L_0 \leq L \leq L_1$), S_0, U_0, c und b positive Konstanten.

a) Wie lauten die thermische (U=$U(T, L)$) und die mechanische (σ=$\sigma(T, L)$) Zustandsgleichung?
Hinweis: Gehen Sie aus von

$$\mathrm{d}S = \frac{1}{T}\mathrm{d}U - \frac{\sigma}{T}\mathrm{d}L \tag{2}$$

(σ = Fadenspannung), und bestimmen Sie $U(T, L)$ bzw. $\sigma(T, L)$.

Zur Kontrolle: $U = \alpha T, \sigma = T(\beta L + \gamma)$ mit gewissen Konstanten α, β, γ. (8 Punkte)

b) Der Gummifaden werde *isotherm* ausgedehnt. Welche Arbeit ist erforderlich für eine infinitesimale Ausdehnung des Fadens um $\mathrm{d}L$? Wo bleibt die investierte Energie? (9 Punkte)

c) Der Gummifaden werde nun *adiabatisch* ausgedehnt um $\mathrm{d}L$. Diskutieren Sie wiederum den Energiesatz. Wie verändert sich die Temperatur des Fadens? (8 Punkte)

3.8 Kühlung durch Entmagnetisierung (F2005)

Ein magnetisches System befinde sich in einem Magnetfeld H und sei charakterisiert durch eine Magnetisierung

$$M = \gamma \frac{H}{T}$$

und eine Wärmekapazität (bei konstantem Feld H)

$$C_H = \gamma \frac{H_r^2 + H^2}{T^2} \; .$$

H_r und γ sind Konstanten.

Der erste Hauptsatz lautet

$$\mathrm{d}U = T\,\mathrm{d}S + H\,\mathrm{d}M$$

(enstprechend der Relation $\mathrm{d}U = T\,\mathrm{d}S - p\,\mathrm{d}V$ für ein kompressibles System).

a) Welches ist das thermodynamische Potential mit den natürlichen Variablen T und H? Beweisen Sie die Maxwell-Relation

$$\left(\frac{\partial S}{\partial H}\right)_T = \left(\frac{\partial M}{\partial T}\right)_H \; .$$

(5 Punkte)

b) Zeigen Sie, dass die Änderung der Wärmemenge im magnetischen System bei einem quasistatischen Prozess gegeben ist durch

$$\delta Q = C_H\,\mathrm{d}T + T\left(\frac{\partial M}{\partial T}\right)_H \mathrm{d}H \; . \tag{1}$$

(5 Punkte)

c) Falls kein Wärmeaustauch zwischen dem magnetischen System und der Umgebung stattfindet, lautet die Differentialgleichung für die Temperatur $T(H)$ des magnetischen Systems

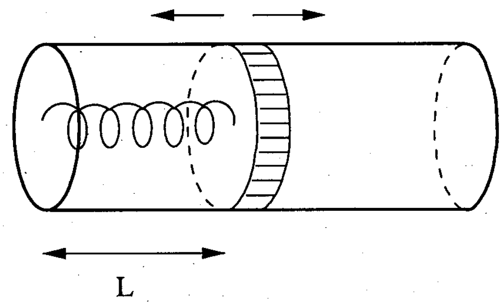
$$\left(\frac{\partial T}{\partial H}\right)_S = \frac{HT}{H_r^2 + H^2} \; .$$

Zeigen Sie dies. (5 Punkte)

d) Das magnetische System habe eine Anfangstemperatur T_0 und befinde sich in einem Feld $H = H_0$. Dieses Feld werde so schnell abgeschaltet, dass kein Wärmeaustausch zwischen dem magnetischen System und der Umgebung stattfindet, aber so langsam, dass der Prozess als quasistatisch behandelt werden kann. Wie groß ist die Temperatur T_1 des magnetischen Systems nach Abschalten des Feldes? Nimmt die Temperatur zu oder ab? (10 Punkte)

3.9 Ideales Gas (H2005)

Ein thermisch isolierter Zylinder (Querschnitt A) wird durch einen beweglichen Kolben geteilt, der mit einer Feder (Federkonstante k, Ruhelänge L_0) an der linken Seite befestigt ist.



Der Kolben sei zunächst im Abstand $L = L_0$ fixiert. Links vom Kolben befinden sich N Mol eines idealen Gases mit der Temperatur T_0, die rechte Seite ist evakuiert. Nun wird die Arretierung des Kolbens entfernt.

Berechnen Sie Volumen und Temperatur des Gases, nachdem sich wieder ein Gleichgewicht eingestellt hat, wie folgt:

a) Bestimmen Sie die innere Energie U des Gases im Endzustand mit Hilfe der Energieerhaltung. (5 Punkte)

b) Maximieren Sie die Entropie

$$S = \text{const.} + cNR \ln U + NR \ln V$$

im Endzustand bezüglich der Auslenkung ΔL des Kolbens. (15 Punkte)

c) Bestimmen Sie hieraus V und T. (5 Punkte)

3.10 Idealisierter Otto-Kreisprozess (H2005)

Gegeben ein ideales Gas mit der Entropie

$$S(T,V) = S(T_0, V_0) + C_V \ln \frac{T}{T_0} + R \ln \frac{V}{V_0} \tag{1}$$

als Funktion der Temperatur T und des Volumens V mit konstanter Wärmekapazität C_V und konstanter Gaskonstanten $R = C_p - C_V$. Der idealisierte Otto-Kreisprozess ist in Abbildung 1 angegeben.

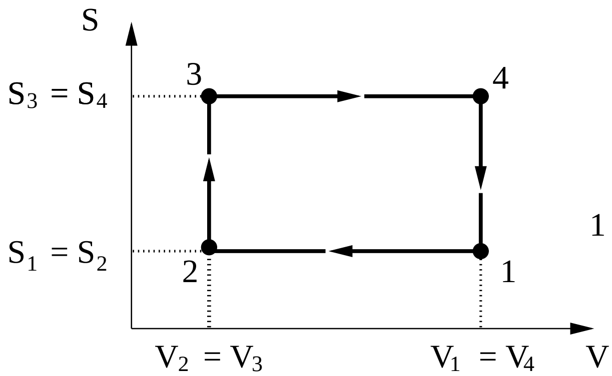


Abbildung 1: Der idealiserte Otto-Kreisprozess $1 \to 2 \to 3 \to 4 \to 1$

a) Zeigen Sie, dass die Adiabaten durch den Zusammenhang

$$TV^\gamma = X = \text{const.} \tag{2}$$

gegeben sind. Bestimmen Sie den Exponenten γ. (5 Punkte)

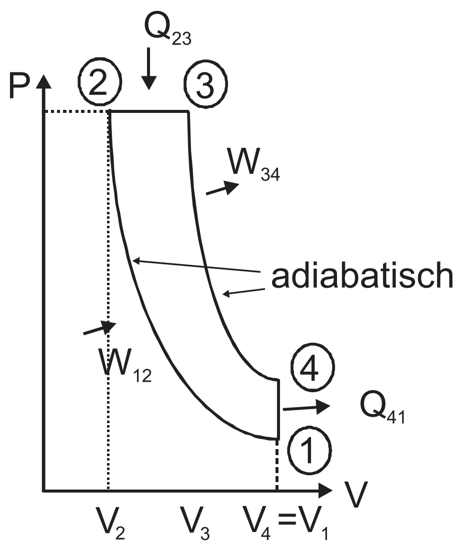
b) Geben Sie mit Hilfe der Gleichung (2) den Zusammenhang der Temperaturen und Volumina in den Zuständen 1 und 2 und analog in den Zuständen 3 und 4 an. (3 Punkte)

c) Bestimmen Sie die Wärmeenergien und Arbeiten auf den vier Wegstücken als Funktion der Volumina V_1 und V_2. (13 Punkte)

d) Bestimmen Sie den Wirkungsgrad als Funktion der Volumina. (4 Punkte)

3.11 Dieselmotor (F2006)

Nebenstehende Zeichnung zeigt das idealisierte (P, V)-Diagramm für den reversiblen Kreisprozess eines Dieselmotors. Es wird dabei angenommen, dass das Arbeitsmedium ein ideales Gas ist. Der gesamte Prozess besteht dann aus 4 reversiblen Prozessen, nämlich einer adiabatischen Kompression $(1 \rightarrow 2)$ des Gases, einer Expansion bei konstantem Druck $(2 \rightarrow 3)$, einer adiabatischen Expansion $(3 \rightarrow 4)$ und einer isochoren Kühlung $(4 \rightarrow 1)$. Der Druck, die innere Energie des Mediums und die Temperatur an den Endpunkten seien jeweils mit P_i, U_i, und T_i bezeichnet.



a) Geben Sie die Zustandsgleichung und die innere Energie U eines idealen Gases an. (3 Punkte)

b) Geben Sie an und begründen Sie, in welche Richtung sich in jedem Schritt die Temperatur T ändert. (6 Punkte)

c) Zeigen Sie, dass die Adiabaten durch folgenden Zusammenhang charakterisiert sind:

$$PV^{5/3} = \text{const} .$$

Hinweis: Leiten Sie unter Verwendung des 1. Hauptsatzes und der Zustandsgleichung für das ideale Gas zuerst den Zusammenhang zwischen T und V her. (10 Punkte)

d) Geben Sie für die isobare Expansion $2 \rightarrow 3$ die zugeführte Wärme und die vom System an der Umgebung geleistete Arbeit als Funktion der Temperaturen T_2 und T_3 an. (6 Punkte)

3.12 Carnot-Prozess mit Photonengas (F2006)

In dieser Aufgabe soll der Carnot-Prozess betrachtet werden, also ein Kreisprozess, der aus je zwei adiabatischen und zwei isothermen Abschnitten im Wechsel besteht. Statt des idealen Gases als üblichem Arbeitsmedium soll hier jedoch ein Photonengas betrachtet werden. Für das Photonengas gelten die thermische Zustandsgleichung $p = (\sigma/3)T^4$ und die kalorische Zustandsgleichung $U = 3pV$, wobei σ die Stefan-Boltzmann-Konstante ist.

a) Leiten Sie mit Hilfe des ersten Hauptsatzes der Thermodynamik die Beziehung

$$\left(\frac{\partial T}{\partial V}\right)_{\text{ad}} = -\frac{p + \left(\frac{\partial U}{\partial V}\right)_T}{\left(\frac{\partial U}{\partial T}\right)_V}$$

her, wobei der Index „ad“ eine adiabatische Zustandsänderung andeutet. (6 Punkte)

b) Zeigen Sie, dass eine adiabatische Zustandsänderung des Photonengases durch $TV^\gamma =$ const. gegeben ist, und bestimmen Sie den Exponenten γ. (8 Punkte)

c) In welchen zwei der vier Arbeitsschritte wird Wärme zwischen dem System und einem der beiden Wärmebäder ausgetauscht?
Berechnen Sie unter Verwendung der Tatsache, dass die Entropie eine Zustandsgröße darstellt, das Verhältnis der ausgetauschten Wärmemengen.
Drücken Sie den Wirkungsgrad durch diese Wärmemengen aus, und bestimmen Sie seine Abhängigkeit von den Temperaturen der beteiligten Wärmebäder.
Wie vergleicht sich dieses Ergebnis mit dem Wirkungsgrad, der sich für ein ideales Gas als Arbeitsmedium ergibt? (11 Punkte)

3.13 Drossel-Prozess (H2006)

Mit dem Drossel- oder Joule-Thompson-Prozess werden Gase verflüssigt. Ein Gasstrom mit einem Volumen V wird durch eine Drossel oder eine poröse Membran gepresst und ändert dabei seine Temperatur T, seine innere Energie U und seinen Druck p. Man kann zeigen, dass bei diesem Prozess die Enthalpie $H(S,p) = U + pV$ konstant bleibt.

a) Zeigen Sie für den Spezialfall des idealen Gases, dass die Temperatur bei diesem Prozess konstant bleibt. (5 Punkte)

b) Leiten Sie für den allgemeinen Fall die folgende Beziehung zwischen der Druckabhängigkeit der Entropie S und der Temperaturabhängigkeit des Volumens V her,

$$\left(\frac{\partial S}{\partial p}\right)_T = -\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_p .$$

Betrachten Sie dazu die freie Enthalpie $G(T,p)$. (8 Punkte)

c) Aus der Wärmekapazität C_p und dem thermischen Ausdehnungskoeffizienten

$$\alpha = \frac{1}{V}\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_p$$

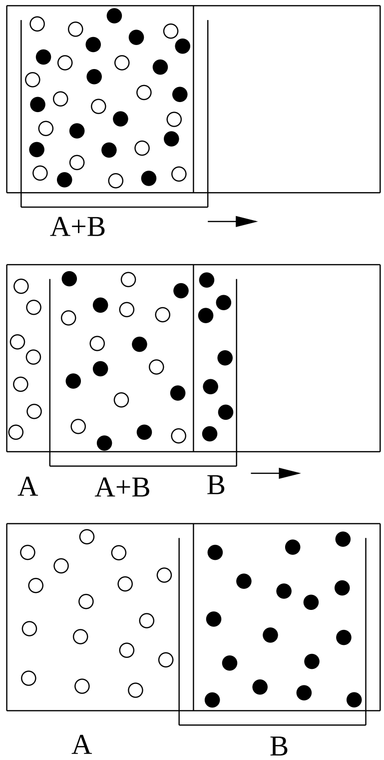
kann man berechnen, ob und wie stark sich die Temperatur des Gases beim Drossel-Prozess abkühlt. Zeigen Sie dazu mit Hilfe der vorigen Gleichung

$$\left(\frac{\partial T}{\partial p}\right)_H = \frac{V}{C_p}(T\alpha - 1).$$

(12 Punkte)

3.14 Mischungsentropie für ideale Gase (H2006)

Betrachten Sie das folgende Gedankenexperiment mit einem Gemisch zweier idealer Gase:
Ein Zylinder wird durch eine starre Wand halbiert, die nur für die Teilchensorte B durchlässig ist. Zwei bewegliche Wände mit festem Abstand schließen das halbe Zylindervolumen ein; die linke Wand ist durchlässig für Teilchensorte A, die rechte undurchlässig für alle Teilchen. Das gesamte System wird auf der Temperatur T gehalten. Am Anfang steht der bewegliche Teil ganz links und wird mit je 1 Mol von Teilchen der Sorten A und B gefüllt, der Rest des Zylinders wird evakuiert. Der bewegliche Teil wird dann quasi-statisch nach rechts bewegt, bis beide Gase entmischt sind (siehe Abbildungen).



a) Wie hängt die innere Energie eines idealen Gases von der Temperatur und der Teilchenzahl ab? Bestimmen Sie hieraus die Änderung ΔU in unserem Gedankenexperiment. (6 Punkte)

b) Wie lautet die Gleichgewichtsbedingung für Teilchentransport durch die beiden semipermeablen Wände? Das chemische Potential für jede Komponente lässt sich darstellen als

$$\mu_i = RT \ln \frac{P_i v_0}{RT} + f_i(T) \tag{1}$$

(v_0: Referenzvolumen, P_i: Partialdruck der i-ten Komponente, $f_i(T)$: Funktion der Temperatur, deren genaue Form hier unwichtig ist). Was bedeutet die Gleichgewichtsbedingung demnach für die Partialdrücke der beiden Gasen in den verschiedenen Teilvolumina? (6 Punkte)

c) Wie groß ist die mechanische Arbeit, die beim Entmischen gemäß dem Gedankenexperiment verrichtet wird? (6 Punkte)

d) Was folgt aus den Teilaufgaben a–c für die Änderung der Entropie des Gesamtsystems? Formulieren Sie abschließend den Zusammenhang zwischen der Entropie eines Gemisches zweier idealer Gase und der Entropie der einzelnen Gase in Form eines Satzes (Gibbs'sches Theorem). (7 Punkte)

3.15 Schwarzkörperstrahlung (F2007)

Betrachten Sie einen mit elektromagnetischer Strahlung gefüllten schwarzen Hohlkörper. In der klassischen Elektrodynamik kann gezeigt werden, dass der Druck P und die Dichte $u = U/V$ der inneren Energie des elektromagnetischen Feldes im Hohlkörper durch $u = 3P$ verknüpft sind.

a) Zeigen Sie, dass sich bei fester Temperatur T die Energiedichte $u(T)$ wie folgt schreiben lässt:

$$u(T) = \left(\frac{\partial U}{\partial V}\right)_T = T\left(\frac{\partial S}{\partial V}\right)_T - P\ . \tag{1}$$

(8 Punkte)

b) Mittels welcher Maxwell-Relation lässt sich die hierin vorkommende partielle Ableitung von S durch eine partielle Ableitung von P ausdrücken? (5 Punkte)

c) Nutzen Sie das Ergebnis von Teilaufgabe b), um aus Gl. (1) die Differentialgleichung

$$u = \frac{1}{3}\left[T\left(\frac{\partial u}{\partial T}\right) - u\right] \tag{2}$$

für $u(T)$ herzuleiten. (6 Punkte)

d) Lösen Sie Gleichung (2) durch Trennung der Variablen, und bestimmen Sie somit die Potenz n im Stefan-Boltzmann-Gesetz $u(T) \propto T^n$. (6 Punkte)

3.16 Deformation eines Flüssigkeitstropfens (F2007)

Die Oberfläche A eines Flüssigkeitstropfens soll reversibel durch Verformung (bei konstantem Volumen) vergrößert werden. Dazu muss die Arbeit $\sigma\,\mathrm{d}A$ aufgewendet werden, sodass die Änderung $\mathrm{d}U$ der inneren Energie U durch

$$\mathrm{d}U = T\,\mathrm{d}S + \sigma\,\mathrm{d}A$$

gegeben ist. Die Oberflächenspannung σ sei dabei durch

$$\sigma(T) = \eta\left(1 - \frac{T}{T_0}\right), \quad T < T_0$$

mit einer Konstanten $\eta > 0$ gegeben. Die Wärmekapazität C_A bei konstanter Oberfläche A sei unabhängig von der Temperatur.
Im Folgenden sollen Prozesse bei konstantem Volumen betrachtet werden.

a) Beweisen Sie die Relation

$$\left(\frac{\partial T}{\partial A}\right)_S = \frac{T}{C_A}\left(\frac{\partial \sigma}{\partial T}\right)_A$$

mit Hilfe einer Maxwell-Relation. (6 Punkte)

b) Zeigen Sie, dass

$$\frac{\mathrm{d}T}{T} = -\gamma\,\mathrm{d}A$$

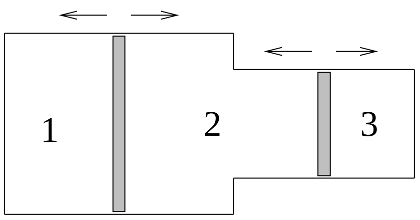
gilt, und berechnen Sie die Temperatur $T(A)$ als Funktion von A mit der Bedingung $T(A_0) = T_0$. (6 Punkte)

c) Geben Sie das Differential $\mathrm{d}F$ der freien Energie $F = F(T, A)$ an, und berechnen Sie F mit der Bedingung $F(T_0, A) = 0$. (8 Punkte)

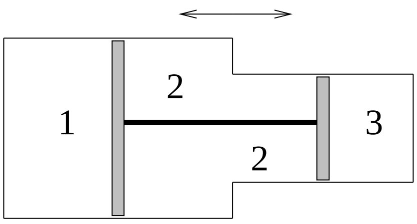
d) Bestimmen Sie die Änderung $\mathrm{d}S$ der Entropie bei Änderung der Oberfläche um $\mathrm{d}A$ in einem isothermen Prozess, d. h. bestimmen Sie $(\partial S/\partial A)_T$ mit Hilfe einer Maxwell-Relation. Nimmt die Entropie S bei Vergrößerung der Oberfläche zu oder ab? (5 Punkte)

3.17 Gleichgewichte (H2007)

Ein Gasbehälter besteht aus zwei aneinandergesetzten Zylindern mit unterschiedlichem Durchmesser und ist nach außen wärmeisoliert und teilchenundurchlässig. Im dicken und dünnen Teil befindet sich jeweils ein (zunächst) festgehaltener, ebenfalls wärmeisolierter und teilchenundurchlässiger Kolben als Trennwand. Die drei Kammern werden mit drei beliebigen Gasen mit Anfangswerten $U^{(i)}, V^{(i)}, N^{(i)}$, $i = 1, 2, 3$ (innere Energie, Volumen, Molzahl) gefüllt.



(I)



(II)

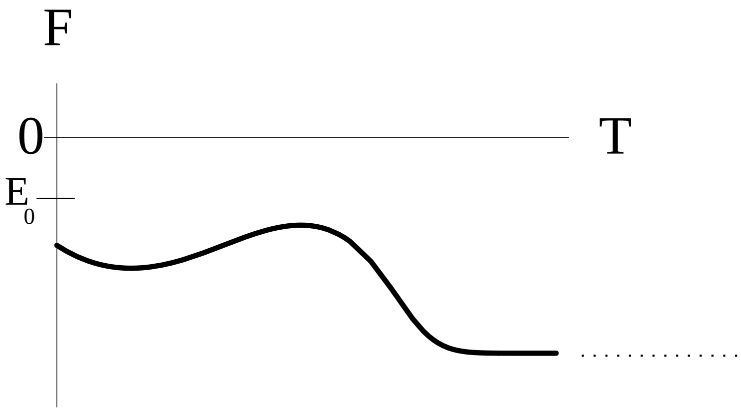
a) Die Kolben werden nun sowohl wärmedurchlässig als auch beweglich gemacht [siehe Abbildung(I)]; daraufhin stellt sich ein neues Gleichgewicht ein. Welche Größen sind dabei erhalten? Leiten Sie die Bedingungen für den neuen Gleichgewichtszustand aus einem Extremalprinzip und den Erhaltungsgrößen her. (11 Punkte)

b) Was lässt sich zusätzlich über die Teilvolumina $V^{(i)}$ aussagen, wenn es sich bei den Gasen um ideale Gase handelt? (7 Punkte)

c) Was ändert sich an Teilaufgabe a, wenn man die beiden Kolben mit einer Stange starr verbindet, so dass sie sich nur gemeinsam bewegen können [siehe Abbildung(II)]? Interpretieren Sie das Ergebnis physikalisch. (7 Punkte)

3.18 Freie Energie (H2007)

Die folgende Skizze soll angeblich die Freie Energie F eines Systems als Funktion seiner Temperatur T bei konstantem Volumen V zeigen. $E_0 = E(T = 0)$ sei die Grundzustandsenergie des Körpers.



Nennen und begründen Sie fünf Fehler dieser Skizze. (25 Punkte)

3.19 Trockenadiabate (F2008)

Erfahrungsgemäß nehmen Druck und Temperatur in der Atmosphäre mit zunehmender Höhe z ab. Diese Abnahme kann durch ein einfaches Modell beschrieben werden, bei dem sich ein ideales Gas im Schwerefeld adiabatisch abkühlt.

a) Betrachten Sie ein infinitesimales Höhenelement $\mathrm{d}z$ und leiten Sie aus dem Druckgleichgewicht im Schwerefeld (Erdbeschleunigung g, Massendichte der Luft ρ) mit Hilfe der idealen Gasgleichung für den Zusammenhang zwischen Druck p und Teilchendichte $n = \rho/m$ eine Gleichung für den Druckgradienten $\mathrm{d}p/\mathrm{d}z$ her. (6 Punkte)

b) Lösen Sie diese Differentialgleichung explizit unter der (unrealistischen) Annahme einer konstanten Temperatur T. Berechnen Sie explizit die Höhendifferenz Δz, auf der $p(z)$ bei $T = 300\,\mathrm{K}$ um einen Faktor $1/\mathrm{e}$ abnimmt ($m = 2.6 \times 10^{-26}$ kg ist die Masse von O_2 und $k_B = 1.38 \times 10^{-23}$ J/K). (6 Punkte)

c) Leiten Sie für eine reversible, adiabatische (also isentrope) Expansion eines idealen Gases mit f Freiheitsgraden eine Beziehung zwischen der relativen Druckänderung $\mathrm{d}p/p$ und der relativen Temperaturänderung $\mathrm{d}T/T$ her. (6 Punkte)

d) Bestimmen Sie aus der differentiellen Druckabahme $\mathrm{d}p$ mit der Höhe im Schwerefeld g aus Teilaufgabe (a) den Wert des trockenadiabatischen Temperaturgradienten $\mathrm{d}T/\mathrm{d}z$ bei der isentropen Expansion eines idealen Gases. Berechnen Sie $\mathrm{d}T/\mathrm{d}z$ explizit (in Einheiten Grad pro $100\,\mathrm{m}$ Höhendifferenz) für Sauerstoff als zweiatomiges Gas mit $f = 5$ Freiheitsgraden. (7 Punkte)

3.20 Adiabatische Entspannung mit Arbeitsverrichtung (F2008)

Gegeben sei ein mit einem Gas gefüllter und mit einem Kolben abgeschlossener, isolierter Zylinder. Das Gas habe eine konstante Wärmekapazität C_V. Der Kolben möge Arbeit verrichten können, etwa durch Kompression einer Spiralfeder, siehe die Abbildung.

Im Folgenden soll die Änderung der Temperatur des Gases bei *quasistatischer* Expansion untersucht werden.

a) Welche thermodynamischen Größen des Gases bleiben konstant beim Prozess der Expansion des Gases und simultaner Kompression der Feder? (3 Punkte)

b) Weisen Sie die Maxwell-Relation

$$\left(\frac{\partial S}{\partial V}\right)_T = \left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_V$$

nach. (6 Punkte)

c) Zeigen Sie, dass bei konstanter Entropie die Änderung der Temperatur des Gases mit der Änderung des Volumens durch

$$\left(\frac{\partial T}{\partial V}\right)_S = -\frac{(\partial p/\partial T)_V}{C_V/T} \tag{1}$$

gegeben ist. (7 Punkte)

d) Werten Sie Gleichung (1) für das van der Waals-Gas mit der Zustandsgleichung

$$p = \frac{nRT}{V - nb} - \frac{an^2}{V^2}$$

aus. (4 Punkte)

e) Das van der Waals-Gas habe die Anfangstemperatur T_1 und das Volumen V_1. Berechnen Sie die Temperatur T_2 für eine Expansion von V_1 nach V_2. (5 Punkte)

3.21 Polarisierung und Temperaturänderung (H2008)

Ein dielektrisches System befinde sich in einem elektrischen Feld E und sei charakterisiert durch eine Polarisation

$$P = \alpha \frac{T_c}{T - T_c} E$$

und eine Wärmekapazität (bei konstantem Feld E)

$$C_E = c \frac{T_c^2}{(T - T_c)^2} \,.$$

T_c, c und α sind positive Konstanten.

Der erste Hauptsatz lautet für dieses System

$$\mathrm{d}U = T\,\mathrm{d}S + E\,\mathrm{d}P$$

(enstprechend der Relation $\mathrm{d}U = T\,\mathrm{d}S - p\,\mathrm{d}V$ für ein kompressibles System).

a) Welches ist das thermodynamische Potential mit den natürlichen Variablen T und E? Beweisen Sie die Maxwell-Relation

$$\left(\frac{\partial S}{\partial E}\right)_T = \left(\frac{\partial P}{\partial T}\right)_E \,.$$

(5 Punkte)

b) Zeigen Sie, dass die Änderung der Wärmemenge im dielektrischen System bei einem quasistatischen Prozess gegeben ist durch

$$\delta Q = C_E\,\mathrm{d}T + T\left(\frac{\partial P}{\partial T}\right)_E \mathrm{d}E \,. \tag{1}$$

(5 Punkte)

c) Falls kein Wärmeaustauch zwischen dem dielektrischen System und der Umgebung stattfindet, lautet die Differentialgleichung für die Temperatur $T(E)$ des dielektrischen Systems

$$\left(\frac{\partial T}{\partial E}\right)_S = \frac{\alpha}{c}\,\frac{T}{T_c}\,E \,.$$

Zeigen Sie dies. (5 Punkte)

d) Das dielektrische System habe eine Anfangstemperatur T_0 und befinde sich in einem Feld $E = E_0$. Dieses Feld werde so schnell abgeschaltet, dass kein Wärmeaustausch zwischen dem dielektrischen System und der Umgebung stattfinden kann, aber so langsam, dass der Prozess als quasistatisch behandelt werden kann.
Bestimmen Sie die Temperatur T_1 des dielektrischen Systems nach Abschalten des Feldes. Nimmt die Temperatur zu oder ab? (10 Punkte)

3.22 Temperaturausgleich (H2008)

Zwei Körper gleicher Wärmekapazität C, aber mit verschiedenen Anfangstemperaturen T_1 und T_2, werden durch einen thermodynamischen Prozess auf die gemeinsame Endtemperatur T_e gebracht.

a) Bestimmen Sie die Temperaturabhängigkeit der inneren Energie $U(T)$ und der Entropie $S(T)$ eines beliebigen Körpers im thermischen Gleichgewicht, dessen Wärmekapazität C temperaturunabhängig sei. (5 Punkte)

b) Berechnen Sie die Entropieänderung des Gesamtsystems beim Temperaturausgleich als Funktion derTemperaturen T_1, T_2 und T_e, und geben Sie eine vom detaillierten Prozess unabhängige untere Schranke für die Endtemperatur T_e an. Unter welchen Bedingungen wird diese Schranke realisiert? (8 Punkte)

c) Berechnen Sie Endtemperatur T_e explizit für den Fall, dass während des Prozesses keine Arbeit verrichtet wird. Zeigen Sie allgemein, dass die entsprechende Temperatur die aus Teilaufgabe (b) bekannte Ungleichung erfüllt. (6 Punkte)

d) Geben Sie die maximale Arbeit an, die beim Temperaturausgleich der beiden Körper gewonnen werden kann. (6 Punkte)

4 Quantenmechamik

4.1 Eindimensionale Potentialbarriere (H2003)[13]

Teilchen der Masse m fallen von links auf eine Potentialbarriere, welche aus einer rechteckigen Stufe und einem repulsiven δ-Potential besteht,

$$V(x) = V_0\theta(x) + \frac{\hbar^2 g}{2m}\delta(x)\ , \qquad V_0, g > 0\ , \qquad \theta(x) = \begin{cases} 1 & x \geq 0 \\ 0 & x < 0\ . \end{cases}$$

a) Lösen Sie die stationäre Schrödinger-Gleichung zunächst in den Gebieten $x < 0$ und $x > 0$, ohne das δ-Potential zu berücksichtigen. Stellen Sie die allgemeine Lösung auf, die der Problemstellung entspricht (normieren Sie die Amplitude der einfallenden Welle im Gebiet $x < 0$ auf 1). Worin unterscheiden sich die Fälle $E > V_0$ und $E < V_0$? (9 Punkte)

b) Das δ-Potential bewirkt einen Sprung in der ersten Ableitung der Wellenfunktion, den man aus der Schrödinger-Gleichung wie folgt bestimmen kann,

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} \mathrm{d}x \left(-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\mathrm{d}^2\psi}{\mathrm{d}x^2} + \frac{\hbar^2 g}{2m}\delta(x)\psi(x)\right) = 0\ .$$

Die Wellenfunktion selbst ist dagegen stetig bei $x = 0$. Bestimmen Sie hieraus die unbekannten Koeffizienten aus Teilaufgabe a. (16 Punkte)

[13] Siehe auch Aufgaben 4.9, 4.21 und 4.22 für das δ-Potential und 4.19 für die Potentialstufe

4.2 Virialsatz (H2003)

Wir betrachten den eindimensionalen harmonischen Oszillator mit dem Hamilton-Operator

$$H = T + V = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2} m\omega^2 x^2 \; . \tag{1}$$

a) Beweisen Sie hierfür den Virialsatz

$$\langle T \rangle = \langle V \rangle \; , \tag{2}$$

wobei sich der Erwartungswert auf einen beliebigen Eigenzustand von H bezieht.

Hinweis: Berechnen Sie zunächst den Kommutator $[H, xp]$ explizit und dann $\langle [H, xp] \rangle$. Schreiben Sie alternativ den Kommutator aus in der Form $Hxp - xpH$, und nehmen Sie den Erwartungswert in einem Eigenzustand von H. (10 Punkte)

b) Drücken Sie mit Hilfe der Gleichungen (1) und (2) $\langle p^2 \rangle$ und $\langle x^2 \rangle$ durch den Energieeigenwert E aus. (4 Punkte)

c) Verwenden Sie schließlich die bisherigen Ergebnisse und die Heisenberg'sche Unschärferelation für Ort und Impuls, um eine untere Schranke für die Energieeigenwerte dieses Systems herzuleiten. Vergleichen Sie das Ergebnis mit der exakten Grundzustandsenergie des Oszillators. (11 Punkte)

4.3 Harmonischer Oszillator mit undurchdringlicher Wand (F2004)[14]

Ein quantenmechanisches Teilchen der Masse m bewege sich in einem eindimensionalen Potential der Form

$$V(x) = \begin{cases} \infty & x < 0 \\ \frac{1}{2}m\omega^2x^2 & x \geq 0\,. \end{cases} \tag{1}$$

a) Stellen Sie die stationäre Schrödinger-Gleichung in Ortsdarstellung auf. Welchen Randbedingungen müssen die Wellenfunktionen genügen? Begründen Sie diese Bedingungen.
(6 Punkte)

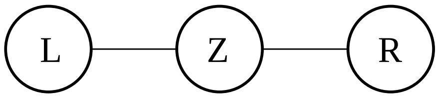
b) Skizzieren Sie die Wellenfunktionen der 4 niedrigsten Eigenzustände des gewöhnlichen, eindimensionalen harmonischen Oszillators ohne Wand. Welche diskrete Symmetrie hat dieses System, und wie schlägt sie sich in den Wellenfunktionen nieder? Was sind die Energieeigenwerte? (8 Punkte)

c) Bestimmen Sie mit Hilfe von a) und b) das vollständige Spektrum des Hamilton-Operators für den Oszillator mit Wand ohne detaillierte Rechnung. (5 Punkte)

d) Geben Sie die normierte Grundzustandswellenfunktion $\psi_0(x)$ und die Grundzustandsenergie für den Oszillator mit Wand an.
Hinweis: $\int_0^\infty \mathrm{d}x\, x^2 \mathrm{e}^{-\alpha x^2} = \frac{1}{4\alpha}\sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}$ (6 Punkte)

[14] Siehe auch Aufgabe 4.8, 4.10 für das Oszillator=PPotential

4.4 Lineares dreiatomiges Molekül (F2004)



Betrachten Sie ein Valenzelektron in einem linearen dreiatomigen Molekül, in dem die Atomrümpfe L und R sich jeweils im Abstand d von Z befinden (siehe Skizze). Im Folgenden bezeichne $|\psi_L\rangle$, $|\psi_Z\rangle$ und $|\psi_R\rangle$ ein orthonormales System aus Zustandsvektoren, die den Zuständen eines beim Atom L, Z bzw. R lokalisierten Elektrons entsprechen. Der Hamilton-Operator für das Valenzelektron im Molekül habe bezüglich der Basis $(|\psi_L\rangle, |\psi_Z\rangle, |\psi_R\rangle)$ die Matrixdarstellung

$$\hat{H} = \begin{pmatrix} b & -a & 0 \\ -a & b & -a \\ 0 & -a & b \end{pmatrix} \quad \text{mit} \quad a > 0\,.$$

a) Verifizieren Sie (durch Einsetzen), dass die Vektoren der Energieeigenzustände von $\hat{H}$ wie folgt lauten,

$$|\psi_0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}\,, \qquad |\psi_\pm\rangle = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ \mp\sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix}\,,$$

und bestimmen Sie die zugehörigen Eigenwerte E_0 und $E_\pm$. (6 Punkte)

b) Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeiten P_L, P_Z und P_R dafür, dass das Elektron im Grundzustand $|\psi_-\rangle$ beim Atom L, Z bzw. R lokalisiert ist. (3 Punkte)

c) Bestimmen Sie den Erwartungswert $\langle\hat{H}\rangle$ und die Varianz $\mathrm{var}(\hat{H}) \equiv \langle\hat{H}^2\rangle - \langle\hat{H}\rangle^2$ der Energieobservablen $\hat{H}$ im Zustand mit dem Vektor $|\psi_L\rangle$ (4 Punkte)

d) Zum Zeitpunkt $t = 0$ sei das Valenzelektron beim Atomrumpf Z lokalisiert, es habe also den Zustandsvektor $|\psi(0)\rangle = |\psi_Z\rangle$. Geben Sie $|\psi(t)\rangle$ für $t \neq 0$ an, sowie die Wahrscheinlichkeit $P_Z(t)$, dass sich das Elektron zum Zeitpunkt t weiterhin beim Atomrumpf Z befindet. (6 Punkte)

e) Es werde nun ein homogenes elektrisches Feld der Stärke $\mathcal{E}$ entlang der linearen Molekülachse $L - Z - R$ angelegt. Das Feld sei so schwach, dass feldinduzierte Änderungen der Konfigurationen der Atomrümpfe vernachlässigt werden können. Der Hamilton-Operator für das Valenz- elektron in dem Molekül und dem elektrischem Feld habe folglich die Form $\hat{H}' = \hat{H} - e\mathcal{E}\hat{X}$, wobei $\hat{X}$ den „Orts“-Operator bezeichnet, der bezüglich der Basis $(|\psi_L\rangle, |\psi_Z\rangle, |\psi_R\rangle)$ durch die Matrix

$$\hat{X} = \begin{pmatrix} -d & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & d \end{pmatrix}$$

gegeben ist. Finden Sie, in Störungstheorie erster Ordnung, die durch das angelegte Feld verursachten Änderungen ΔE_0 der Eigenenergie des Eigenzustandsvektors $|\psi_0\rangle$, und zeigen Sie, dass diese Energieänderung Null ist. Begründen Sie das Resultat qualitativ. (6 Punkte)

4.5 Eindimensionale Wellenfunktion (H2004)

Ein quantenmechanisches Teilchen mit der Masse m und der Energie E laufe gegen eine eindimensionale Potentialstufe, $V(x) = 0$ für $x < 0$ und $V(x) = V_0 > 0$ für $x > 0$. Das Teilchen wird in den beiden Bereichen durch jeweils eine Überlagerung von Wellenfunktionen der Form $\psi(x) = A\,\mathrm{e}^{ikx}$ beschrieben, wobei A und k komplexe Zahlen sind.

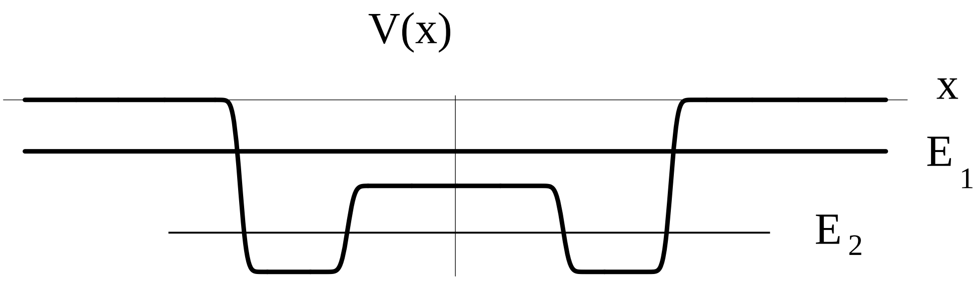
a) Berechnen Sie die Wellenzahlen k für die beiden Bereiche und skizzieren Sie die Aufenthaltswahrscheinlichkeit $|\psi(x)|^2$ für $x > 0$, und zwar für die Fälle

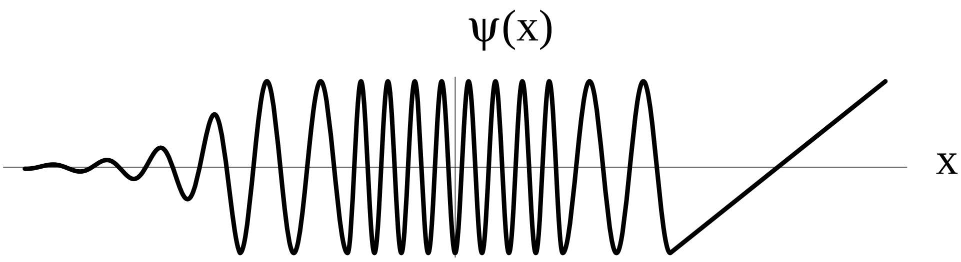
(a) $0 < V_0 < E$,

(b) $0 < E < V_0$.

(zusammen 7 Punkte)

b) Nun bewege sich das Teilchen im unten skizzierten eindimensionalen Potential $V(x)$. Seine reellwertige Wellenfunktion $\psi(x)$ sei ebenfalls unten skizziert. $\psi(x)$ soll eine Lösung der *stationären* Schrödinger-Gleichung zur Energie E_1 sein, deren Wert in der Skizze relativ zu $V(x)$ angegeben ist.





Die Skizze der Wellenfunktion $\psi(x)$ enthält einige Fehler.

(c) Nennen und begründen Sie mindestens vier solche Fehler. (je 3, max. 12 Punkte)

(d) Skizzieren Sie eine mögliche Wellenfunktion zur Energie E_2. (6 Punkte)

4.6 Zwei-Niveau-System (H2004)[15]

Betrachtet werde ein System mit einem zweifach entarteten Zustand, beschrieben durch den Hamilton-Operator H_0, der Eigenenergie E_0 und der Basis

$$|1\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad |2\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \; . \tag{1}$$

Durch eine Kopplung dieser beiden Zustände wird die Entartung aufgehoben; die Schrödinger-Gleichung des gekoppelten Systems ist

$$H|\psi(t)\rangle = \mathrm{i}\hbar\frac{\partial}{\partial t}|\psi(t)\rangle \quad \text{mit} \quad H = H_0 + H_1 \; .$$

Die Matrixelemente des Hamilton-Operators in der durch die Gleichungen (1) beschriebenen Basis seien

$$H_0 = \begin{pmatrix} E_0 & 0 \\ 0 & E_0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad H_1 = \begin{pmatrix} 0 & W \\ W & 0 \end{pmatrix}$$

mit W reell.

a) Bestimmen Sie die Eigenenergien $E_\pm$ und die (normierten) Eigenvektoren $|\psi_\pm\rangle$ der stationären Zustände von H. (5 Punkte)

b) Geben Sie die Zeitabhängigkeit von $|\psi_\pm(t)\rangle$ an. (5 Punkte)

c) Geben Sie die allgemeine zeitabhängige Lösung $|\psi(t)\rangle$ an. (5 Punkte)

d) Das System befinde sich zum Zeitpunkt $t = 0$ in dem durch $|1\rangle$ beschriebenen Zustand. Geben Sie die Wahrscheinlichkeitsamplitude und die Wahrscheinlichkeit dafür an, das System zu irgend einem Zeitpunkt t in dem durch $|2\rangle$ beschriebenen Zustand zu finden. (10 Punkte)

[15] Siehe auch Aufgabe 4.16 für das Zwei-Niveau-System

4.7 Der Einfluss der Kernausdehnung auf wasserstoffähnliche Zustände (F2005)

Betrachtet werde ein Atom mit raumfestem Kern (mit der Kernladung Ze) und einem Elektron (mit der Masse m_e und Ladung $-e$); die potentielle Energie ist

$$V_0 = -\frac{Ze^2}{4\pi\varepsilon_0 r} .$$

Ungestörtes Problem: Im *ungestörten* Fall eines *punktförmigen* Kerns wird der Grundzustand des Elektrons durch die Wellenfunktion

$$\psi_0(\vec{r}) = N e^{-r/\gamma_0} , \quad \gamma_0 = \frac{4\pi\varepsilon_0\hbar^2}{Zm_e e^2} = \frac{a_0}{Z} , \quad N = \frac{1}{\sqrt{\pi\gamma_0^3}} \tag{1}$$

mit der Normierungskonstanten N und dem Bohrschen Radius a_0 beschrieben.

a) Bestimmen Sie aus der Schrödinger-Gleichung die Grundzustandsenergie E_0.
Hinweise:

Radial-Anteil des Laplace-Operators: $\Delta_r = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{2}{r}\frac{\partial}{\partial r} = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r} r^2 \frac{\partial}{\partial r}$.

Ein nützliches Integral: $\int_0^\infty x^n \mathrm{e}^{-\mu x} \mathrm{d}x = \frac{n!}{\mu^{n+1}}$.

(6 Punkte)

Störungstheorie: Der Kern soll jetzt als homogen geladene Kugel mit dem Radius R angenommen werden. Im Fall des *ausgedehnten* Kerns ist die potentielle Energie

$$V(r) = \frac{Ze^2}{4\pi\varepsilon_0} \times \begin{cases} \frac{r^2}{2R^3} - \frac{3}{2R} & \text{für } r \le R \\ -\frac{1}{r} & \text{für } r \ge R . \end{cases}$$

b) Skizzieren Sie das Potential als Funktion des Abstandes vom Kernmittelpunkt.
(6 Punkte)

c) Die durch die Kernausdehnung verursachte Korrektur der Grundzustandsenergie ist in Störungstheorie erster Ordnung gegeben durch

$$\Delta E_0 = \langle \psi_0 | \left[V(r) - V_0(r) \right] | \psi_0 \rangle .$$

Zeigen Sie, dass man

$$\Delta E_0 = \frac{4}{5} Z^2 \left| E_0 \right| \left(\frac{R}{a_0} \right)^2$$

erhält.
Hinweis: Weil $R \ll \gamma_0$ gilt, kann (soll) bei der Berechnung des Integrals die Exponentialfunktion in der in Gleichung (1) angegebenen Wellenfunktion durch eine Konstante genähert werden. (13 Punkte)

4.8 Harmonischer Oszillator im elektrischen Feld (F2005)[16]

Der Hamilton-Operator des eindimensionalen Oszillator $\hat{H}_0 = \frac{\hat{p}^2}{2m} + \frac{m}{2}\omega^2\hat{x}^2$ mit Masse m und Kreisfrequenz ω kann durch Einführung der Stufenoperatoren

$$\hat{a} = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{\hat{x}}{x_0} + \mathrm{i}\frac{\hat{p}}{p_0}\right) \ , \ \hat{a}^\dagger = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{\hat{x}}{x_0} - \mathrm{i}\frac{\hat{p}}{p_0}\right)$$

mit $x_0 = \sqrt{\hbar/(m\omega)}$ und $p_0 = \sqrt{\hbar m\omega} = \frac{\hbar}{x_0}$ auf die Form

$$\hat{H}_0 = \hbar\omega\left(\hat{a}^\dagger\hat{a} + \tfrac{1}{2}\right)$$

transformiert werden, wobei die Stufenoperatoren die Vertauschungsrelation $[\hat{a}, \hat{a}^\dagger] = 1$ erfüllen. Es bezeichne $|n\rangle$ den normierten Eigenzustand [*sic!; recte*: Eigenzustandsvektor] von $\hat{H}_0$ zu dem Eigenwert $E_n = \hbar\omega\left(n + \frac{1}{2}\right)$, $n \in \{0, 1, 2, ...\}$.

a) Zeigen Sie, dass $\hat{a}|n\rangle = \sqrt{n}\,|n-1\rangle$ und $\hat{a}^\dagger|n\rangle = \sqrt{n+1}\,|n+1\rangle$ gilt.
Hinweis: Zeigen Sie zunächst, dass $\hat{a}|n\rangle$ und $\hat{a}^\dagger|n\rangle$ wieder Eigenvektoren von $\hat{H}_0$ sind, und berechnen Sie die zugehörigen Eigenwerte. (9 Punkte)

b) Drücken Sie die Operatoren $\hat{x}$, $\hat{p}$, $\hat{x}^2$ und $\hat{p}^2$ durch $\hat{a}$ und $\hat{a}^\dagger$ aus, und berechnen Sie die dazugehörigen Erwartungswerte im Grundzustand [mit dem Vektor] $|0\rangle$. (8 Punkte)

c) Zeigen Sie unter Benutzung der in Teilaufgabe b) erhaltenen Ergebnisse. dass das Produkt $\Delta x \Delta p$ der „Unschärfen” der Observablen Ort $\hat{x}$ und Impuls $\hat{p}$ im Grundzustand minimal ist im Sinne der Heisenberg-Unschärferelation. (4 Punkte)

Wird der harmonische Oszillator einem konstanten elektrischen Feld E ausgesetzt, so lautet der entsprechende Hamiltonoperator

$$\hat{H} = \hat{H}_0 - qE\hat{x} = \frac{\hat{p}^2}{2m} + \frac{m}{2}\omega^2\hat{x}^2 - qE\hat{x}.$$

d) In der Störungstheorie erster Ordnung ist die Energieverschiebung durch das elektrische Feld durch $\Delta E_n^{(1)} = \langle n|\hat{H}|n\rangle - \langle n|\hat{H}_0|n\rangle$ bestimmt. Zeigen Sie, dass die Energieverschiebung $\Delta E_n^{(1)}$ nicht vom elektrischen Feld abhängt. (4 Punkte)

[16]Siehe auch Aufgaben 4.3, 4.10 für das Oszillator=PPotential und 4.11, 4.20 für den Einfluss eines elektrischen Feldes

4.9 Eindimensionales, periodisches δ-Potential (H2005)[17]

Ein Teilchen der Masse m bewege sich entlang der x-Achse in einer periodischen Anordnung (Periode d) von anziehenden δ-Potentialen:

$$V(x) = \tilde{V} \sum_{\nu=-\infty}^{\infty} \delta(x - \nu d) \ .$$

Der Parameter $\tilde{V}$ beschreibt die Stärke und das Vorzeichen der δ-Potentiale.

a) Welches Vorzeichen von $\tilde{V}$ entspricht einem anziehenden Potential? Welche physikalische Dimension hat der Parameter $\tilde{V}$? (3 Punkte)

b) Leiten Sie aus der eindimensionalen Schrödinger-Gleichung die folgende Anschlussbedingung für die Ableitungen $\Psi'(x)$ der Wellenfunktion $\Psi(x)$ an der Stelle eines δ-Potentials der Stärke $\tilde{V}$ und Position a her:

$$\Psi'(a + 0^+) - \Psi'(a + 0^-) = \frac{2m}{\hbar^2} \tilde{V} \Psi(a) \ .$$

Das Symbol 0^+ bezeichnet hier eine infinitesimal kleine, positive Länge. (8 Punkte)

c) Die Grundzustandswellenfunktion des Teilchens ist nullstellenfrei, periodisch und kann reell gewählt werden. Begründen Sie kurz diese Aussagen. (4 Punkte)

d) Die Grundzustandswellenfunktion hat für $\tilde{V} < 0$ im offenen Intervall zwischen benachbarten δ-Potentialen die Form

$$\Psi(x) = A_0 \left[\exp(\lambda x) + \exp(-\lambda x) \right] \ .$$

Berechnen Sie die Grundzustandsenergie als Funktion von λ. (6 Punkte)

e) Skizzieren Sie die Abhängigkeit der Wellenfunktion des Grundzustandes von der Position x im Bereich $-d < x < +d$. (4 Punkte)

[17] Siehe auch Aufgaben 4.1, 4.21 und 4.22 für das δ-Potential

4.10 Dipolmatrixelemente (H2005)[18]

In dieser Aufgabe sollen Dipolmatrixelemente $x_{nm} = \langle n|x|m\rangle$ untersucht werden, wobei die Zustände [*sic!; recte*: Zustandsvektoren] $|n\rangle$ und $|m\rangle$ Eigenzustände [*sic!; recte*: Eigenvektoren] des Hamilton-Operators

$$H = \frac{p^2}{2M} + V(x)$$

eines Teilchens der Masse M in einem eindimensionalen Potential $V(x)$ sind.

a) Zunächst werde ein harmonischer Oszillator mit $V(x) = \frac{1}{2}M\omega^2 x^2$ betrachtet. Geben Sie die zugehörigen Energieeigenwerte E_n an, und berechnen Sie die Dipolmatrixelemente x_{nm}.
Hinweis: Die Darstellung des Ortsoperators in Erzeugungs- und Vernichtungsoperatoren $a^\dagger$ bzw. a lautet $x = \sqrt{\hbar/(2M\omega)}(a + a^\dagger)$. Die Wirkung auf die Energieeigenzustände [*sic!; recte*: Energieeigenvektoren] $|n\rangle$ des harmonischen Oszillators ergibt sich aus $a|n\rangle = \sqrt{n}\,|n-1\rangle$ und $a^\dagger|n\rangle = \sqrt{n+1}\,|n+1\rangle$. (7 Punkte)

b) Zeigen Sie, dass für jeden Eigenzustand [*sic!; recte*: Eigenvektor] $|n\rangle$ des harmonischen Oszillators die Beziehung

$$\frac{2M}{\hbar^2}\sum_{m=0}^{\infty}|x_{nm}|^2(E_m - E_n) = 1$$

gilt, wobei E_n die Eigenenergie des Zustands [mit dem Eigenvektor] $|n\rangle$ ist. (9 Punkte)

c) Es wird nun ein unendlich tiefer Potentialtopf der Breite a mit dem Potential

$$V(x) = \begin{cases} 0 & -a/2 \le x \le a/2 \\ \infty & \text{sonst} \end{cases}$$

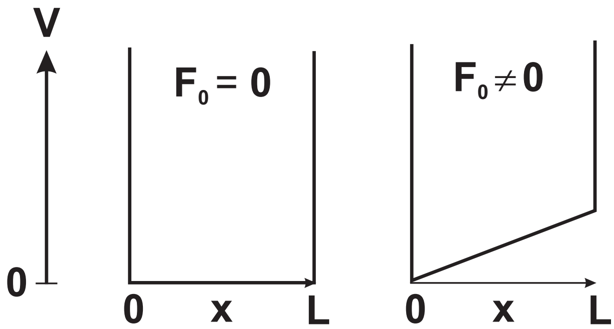
betrachtet. Skizzieren Sie die Eigenfunktionen. Zwischen welchen Zuständen kann es kein von null verschiedenes Matrixelement x_{nm} geben? (9 Punkte)

[18] Siehe auch Aufgaben 4.3, 4.11 für das Oszillator=PPotential und 4.17 für das Kasten-Potential

4.11 Kastenpotential im elektrischen Feld (F2006)[19]

Wir betrachten ein eindimensionales Kastenpotenzial mit unendlich hohen Barrieren bei $x = 0$ und bei $x = L$. Zusätzlich wirke ein schwaches elektrisches Feld F_0/L. Der Hamilton-Operator ist gegeben durch

$$\begin{aligned} H &= H_0 + H_1, \\ H_0 &= -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2} + V(x)\,, V(x) = \begin{cases} 0 & 0 < x < L \\ +\infty & \text{sonst} \end{cases}, \\ H_1 &= eF_0\frac{x}{L}. \end{aligned}$$



Wir betrachten zunächst den Fall ohne angelegtes elektrisches Feld (linke Figur).

a) Wie lauten die Randbedingungen für eine Wellenfunktion bei $x = 0$ und bei $x = L$? (2 Punkte)

b) Berechnen Sie die Energie und normierte Wellenfunktion des Grundzustands (E_0, ψ_0) und des ersten angeregten Zustands (E_1, ψ_1). Skizzieren Sie ψ_0 und ψ_1. Welche Parität haben die Zustände bzgl. der Mitte des Kastens? Zeigen Sie, dass gilt $(E_1 - E_0)/E_0 = 3$. (9 Punkte)

Nunmehr betrachten wir den Fall mit angelegtem Feld (rechte Figur).

c) Berechnen Sie nun mit Hilfe der Störungstheorie erster Ordnung die Energieverschiebung $\Delta E_0^{(1)}$ und $\Delta E_1^{(1)}$ der ersten beiden Zustände durch das elektrische Feld. Allgemein gilt nach dieser Theorie, dass die durch eine Störung H_1 induzierte Verschiebung eines stationären Zustands [*sic! recte*: Zustands mit der Funktion] ψ_n gegeben ist durch

$$\Delta E_n^{(1)} = \langle \psi_n | H_1 | \psi_n \rangle.$$

(8 Punkte)

d) Zeigen Sie, dass die Energieverschiebung $\Delta E_n^{(1)}$ für $n = 0, 1$ verschwindet, wenn man zu H_1 eine geeignete Konstante c hinzufügt (und entsprechend von H_0 wieder abzieht). Welche Parität muss $H_1 + c$ dazu bzgl. der Mitte des Kastens besitzen? (6 Punkte)

Hinweise:

$$\begin{aligned} \int_0^L dx \sin^2 ax &= \frac{L}{2} - \frac{\sin(2aL)}{4a} \\ \int_0^L dx\, x \sin^2(ax) &= \frac{1 + 2a^2L^2 - \cos(2aL) - 2aL\sin(2aL)}{8a^2} \end{aligned}$$

[19] Siehe auch Aufgaben 4.10, 4.17 für das Kasten-Potential und 4.3, 4.20 für den Einfluss eines elektrischen Feldes

4.12 Eindimensionale Wellenfunktion (F2006)

Ein punktförmiges Teilchen der Masse m befinde sich in einem eindimensionalen Kasten der Breite $2a$ im Intervall $-a < x < a$. Die Wände des Kastens seien undurchdringlich, das Wandpotential sei also unendlich hoch. Das Teilchen werde durch die Wellenfunktion $\psi(x) = A(x^2 - a^2)$ für $|x| < a$ beschrieben.

a) Berechnen Sie die Normierungskonstante A.
Zur Kontrolle: $A = \frac{1}{4}\sqrt{\frac{15}{a^5}}$. (5 Punkte)

b) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, das Teilchen im Intervall $0 < x < a/2$ zu finden? (5 Punkte)

c) Berechnen Sie die Fluktuationen Δp des Impules und Δx des Ortes des Teilchens in diesem Zustand, und überprüfen Sie dafür die Heisenberg'sche Unschärferelation. (10 Punkte)

d) Zeigen Sie, dass der Erwartungswert der Energie des Teilchens nur $(10 - \pi^2)/\pi^2 \simeq 1.32\%$ über der Grundzustandsenergie liegt. (5 Punkte)

4.13 Freies quantenmechanisches Teilchen und Ehrenfest-Theorem (H2006)

Das Ehrenfest-Theorem für Observable, die nicht explizit von der Zeit abhängen, lautet

$$\frac{\mathrm{d}\langle A\rangle}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{i}}{\hbar}\langle [H, A]\rangle. \tag{1}$$

(Spitze Klammern stehen für den Erwartungswert in einem quantenmechanischen Zustand.) Wir betrachten ein freies Teilchen der Masse m, das sich nur entlang der x-Achse bewegen kann.

a) Verwenden Sie Gleichung (1), um die Erwartungswerte von p und p^2 als Funktion von t zu bestimmen (die Anfangswerte zur Zeit $t = 0$ seien vorgegeben). Was folgt daraus für die Zeitabhängigkeit der Impulsunschärfe

$$\Delta p = \sqrt{\langle p^2\rangle - \langle p\rangle^2}\ ?$$

(5 Punkte)

b) Betrachten Sie nun die gemischte Fluktuationsgröße

$$\kappa = \langle (xp + px)\rangle - 2\langle x\rangle\langle p\rangle,$$

welche die Korrelation zwischen x und p beschreibt. Bestimmen Sie die Zeitabhängigkeit von κ für das freie Teilchen mit Hilfe von Gleichung (1).
Zur Kontrolle: $\kappa = \kappa_0 + \frac{2(\Delta p)_0^2}{m} t$. (10 Punkte)

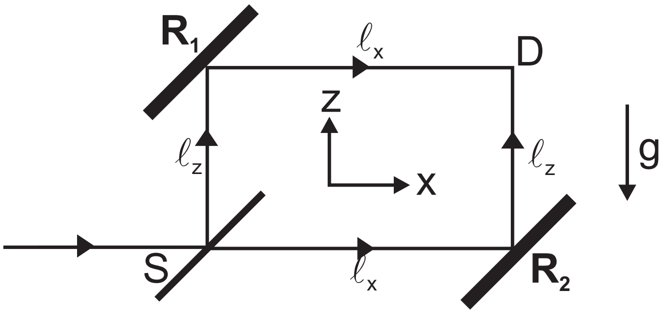
c) Berechnen Sie schließlich auch die Zeitabhängigkeit des Erwartungswertes von x^2. Drücken Sie die Ortsunschärfe

$$\Delta x = \sqrt{\langle x^2\rangle - \langle x\rangle^2}$$

zur Zeit t durch $\Delta x, \Delta p$ und κ zur Zeit $t = 0$ aus. Was erhält man für große Zeiten?
(10 Punkte)

4.14 Interferenz im Schwerefeld (H2006)

Ein kohärenter Teilchenstrahl aus (unabhängigen) Teilchen der Masse m und Energie E läuft durch einen Strahlteiler S bei $(x,z) = (0,0)$ und wird in 2 Teilstrahlen geteilt (siehe Figur).



i) Der erste Strahl führt von S senkrecht nach oben zu einem Reflektor R_1 an der Stelle $(x,z) = (0,\ell_z)$ und von dort horizontal weiter zu einem Detektor D an der Stelle $(x,z) = (\ell_x,\ell_z)$. Diesen Weg bezeichnen wir mit W_1.

ii) Der zweite Strahl führt von S horizontal zu einem Reflektor R_2 an der Stelle $(x,z) = (\ell_x, 0)$ und anschließend senkrecht nach oben zum selben Detektor D. Diesen Weg bezeichnen wir mit W_2.

Das Gravitationsfeld der Erde führt zu einer Phasenverschiebung zwischen den beiden Teilstrahlen am Detektor D, die sowohl von ℓ_x als auch von ℓ_z abhängt.

a) Berechnen Sie den Phasenunterschied $\Delta\varphi$ zwischen den beiden Strahlen an der Stelle D für $E > mg\ell_z$ unter der Annahme, dass die Wellenfunktion eines Teilchens gegeben ist durch (WKB-Näherung)

$$\psi(\vec{x}) = A \exp\left(\mathrm{i} \int^{\vec{x}} \frac{\vec{p}\,(\vec{r})}{\hbar} \cdot \mathrm{d}\vec{r}\right) \; .$$

Hieraus folgt der Phasenunterschied

$$\Delta\varphi = \frac{1}{\hbar} \int\limits_{\mathrm{W}_1} \vec{p}\,(\vec{r}) \cdot \mathrm{d}\vec{r} - \frac{1}{\hbar} \int\limits_{\mathrm{W}_2} \vec{p}\,(\vec{r}) \cdot \mathrm{d}\vec{r}\,,$$

wobei $\vec{p}(\vec{r})$ der klassisch berechnete Teilchenimpuls eines Teilchens der Masse m und Energie E im Schwerefeld ist.
Hilfe: Die Integrale entlang der vertikalen Wege brauchen nicht ausgewertet zu werden.
(12 Punkte)

b) Nehmen wir nun an, dass $E \gg mg\ell_z$ gilt. Zeigen Sie, dass dann der Phasenunterschied $\Delta\varphi$ proportional zur Fläche $A = \ell_x\ell_z$ ist, die von den beiden Strahlen eingeschlossen wird.
(5 Punkte)

c) Benützen Sie dieses Resultat, um den Abstand zwischen den Interferenz-Maxima zu berechnen, wenn wir ℓ_z konstant halten und ℓ_x variieren. (8 Punkte)

4.15 Wasserstoff-Atom im elektrischen Feld (F2007)

Bringt man ein Wasserstoff-Atom in ein homogenes elektrisches Feld, so werden die Energieniveaus verschoben. Im Folgenden soll dieser Effekt für den Grundzustand untersucht werden, wobei wir uns der Einfachheit halber auf die zwei Eigenfunktionen

$$\psi_a(r,\vartheta,\varphi) = \frac{1}{\sqrt{\pi a_0^3}} \exp(-r/a_0)$$

und

$$\psi_b(r,\vartheta,\varphi) = \frac{1}{\sqrt{32\pi a_0^5}} r\cos(\vartheta)\exp(-r/2a_0)$$

des Wasserstoff-Problems beschränken. a_0 bezeichnet hier den Bohr'schen Radius. Der Spin bleibt in dieser Aufgabe unberücksichtigt.

a) Durch welche Quantenzahlen kann man die stationären Zustände des Wasserstoff-Problems charakterisieren, und wie lauten die zugehörigen Eigenwertgleichungen? Geben Sie die zu den Zustandsfunktionen ψ_a und ψ_b gehörigen Werte dieser Quantenzahlen an, und begründen Sie Ihre Antwort ohne Rechnung. Was ergibt sich insbesondere für das Verhältnis der Eigenenergien E_a und E_b der Zustände mit den Funktionen ψ_a bzw. ψ_b? (9 Punkte)

b) Berechnen Sie die vier Dipolmatrixelemente $\langle\psi_a|z|\psi_a\rangle$, $\langle\psi_a|z|\psi_b\rangle$, $\langle\psi_b|z|\psi_a\rangle$ und $\langle\psi_b|z|\psi_b\rangle$. (9 Punkte)

Zur Kontrolle: $\langle\psi_a|z|\psi_b\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\frac{256}{243}a_0$.

Hinweis: $\int_0^\infty x^n \mathrm{e}^{-\alpha x}\mathrm{d}x = \frac{n!}{\alpha^{n+1}} \qquad (\alpha > 0)$.

c) Geben Sie die Matrixdarstellung des Hamilton-Operators

$$H = H_{\mathrm{H}} + \mathcal{E}z$$

in der Basis der beiden Zustandsftionen ψ_a und ψ_b an. Hierbei sei H_{H} der Hamilton-Operator des ungestörten Wasserstoff-Problems und $\mathcal{E}$ die Feldstärke des in z-Richtung gerichteten elektrischen Feldes. Es ist günstig, die Größe $d = \langle\psi_a|z|\psi_b\rangle\mathcal{E}$ einzuführen.
Bestimmen Sie die Energieeigenwerte von H in der vorgegebenen Zweizustandsbasis.
Für kleine Feldstärken, $\mathcal{E} \ll E_a/a_0$, wird die Energie des Zustands mit der Funktion ψ_a um

$$\Delta E_a = -\gamma\frac{d^2}{|E_a|}$$

abgesenkt. Welcher numerische Wert ergibt sich für den Koeffizienten γ?
Wie nennt man den hier berechneten Effekt? (7 Punkte)

4.16 Zwei-Niveau-System (F2007)[20]

Gegeben sei ein System mit einem zweifach entarteten Zustand mit der Energie $E_0 = \hbar\omega_0$. Die Eigenvektoren werden als

$$|\phi_1\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad |\phi_2\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

angesetzt. In dieser Basis wird der Hamilton-Operator des Systems also in der Form

$$H_0 = E_0 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \hbar\omega_0 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

dargestellt.

a) Geben Sie die Eigenvektoren $|\psi_i(t)\rangle$ mit der Anfangsbedingung $|\psi_i(0)\rangle = |\phi_i\rangle$ als Lösungen der zeitabhängigen Schrödinger-Gleichung als Funktion der Zeit t an. (3 Punkte)

Die beiden Zustände seien nun gekoppelt; der die Kopplung beschreibende Hamilton-Operator sei

$$H_1 = \begin{pmatrix} 0 & \Delta \\ \Delta & 0 \end{pmatrix} = \hbar\omega_1 \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} .$$

b) Bestimmen Sie die Eigenwerte $E_\pm$ und die normierten Eigenvektoren $|\phi_\pm\rangle$ von $H = H_0 + H_1$. (11 Punkte)

c) Zum Zeitpunkt $t = 0$ sei das System im Zustand mit dem Zustandsvektor $|\psi(0)\rangle = |\phi_1\rangle$. Geben Sie $|\psi(t)\rangle$ als Funktion der Zeit t an. (8 Punkte)

d) Geben Sie Wahrscheinlichkeit dafür an, das System zum Zeitpunkt $t \neq 0$ im Zustand mit $|\phi_2\rangle$ zu finden, wenn es zum Zeitpunkt $t = 0$ im Zustand mit $|\psi(0)\rangle = |\phi_1\rangle$ gewesen ist. (3 Punkte)

[20] Siehe auch Aufgabe 4.6 für das Zwei-Niveau-System