2012F Bestimmung des Potentials aus Erhaltungsgrößen

$$\vec{L} = \begin{pmatrix} L_x \\ L_y \\ L_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y\,p_z - z\,p_y \\ z\,p_x - x\,p_z \\ x\,p_y - y\,p_x \end{pmatrix}$$

a) $$\dot{L}_x = \frac{d}{dt}\left(y p_z - z p_y\right) = \dot{y} p_z + y \dot{p}_z - \dot{z} p_y - z \dot{p}_y = \frac{p_y}{m} p_z + y\dot{p}_z - \frac{p_z}{m} p_y - z\dot{p}_y$$

$$= y\dot{p}_z - z\dot{p}_y$$

Da $\vec{F} = \dot{\vec{p}} = -\vec{\nabla} V$ und speziell $\dot{p}_z = -\partial_z V$, $\dot{p}_y = -\partial_y V$ folgt:

$$\dot{L}_x = \left(z\partial_y - y\partial_z\right) V \overset{!}{=} 0$$

Wie sieht nun $V(\vec{r})$ aus? Das Potential ist lässt sich allgemein schreiben als $V = V(f(x,y,z))$. Einsetzen:

$$\dot{L}_x = 0 = \left(z\partial_y - y\partial_z\right) V(f(x,y,z)) = V' \left(z\frac{\partial f}{\partial y} - y\frac{\partial f}{\partial z}\right)$$

Damit die Gleichung erfüllt ist, muss der Term in Klammern verschwinden:

$$z\frac{\partial f}{\partial y} - y\frac{\partial f}{\partial z} = 0 \qquad \text{oder} \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = C y \quad \text{und} \quad \frac{\partial f}{\partial z} = C z \quad \text{mit } C = \text{const}$$

Daraus erhält man:

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial y} = C y &\Rightarrow f(x,y,z) = \frac{C}{2} y^2 + g(x,z) \\ \frac{\partial f}{\partial z} = C z &\Rightarrow f(x,y,z) = \frac{C}{2} z^2 + h(x,y) \end{aligned}\right\} \Rightarrow f(x,y,z) = \frac{C}{2}\left(z^2 + y^2\right) + i(\overset{x}{\cancel{z}})$$

i ist eine Funktion, die nur noch von z abhängt

(g und h sind beliebige Funktionen)

Somit hängt V also von y^2+z^2 und x ab:

$$V = V(x, y^2+z^2)$$

(Das Potential muss diese Form besitzen, weil das Potential Rotationssymmetrie um die x-Achse aufweist; L_x erhalten $\Leftrightarrow$ Rotationssymmetrie um x-Achse.)

b) Analog zu a) $\quad \dot{L}_y = 0 \Rightarrow V = V(x^2+z^2, y)$

$$\dot{L}_x = \dot{L}_y = 0 \Rightarrow V = V(x, y^2+z^2) = V(x^2+z^2, y)$$

$$\Rightarrow V = V(x^2+y^2+z^2) = V(|\vec{r}|) = V(r)$$

Das Potential ist nun auch rotationssymmetrisch um z-Achse: L_z ist erhalten

c) Runge-Lenz-Vektor $\quad \vec{A} = \vec{p} \times \vec{L} + C\frac{\vec{r}}{r}$, $\quad \dot{\vec{L}} = 0$, da $V = V(r)$, $\quad r\dot{r} = \vec{r}\cdot\dot{\vec{r}}$

$$\dot{\vec{A}} = \frac{d}{dt}\left(\vec{p}\times\vec{L} + C\frac{\vec{r}}{r}\right) = \dot{\vec{p}}\times\vec{L} + \vec{p}\times\underbrace{\dot{\vec{L}}}_{=\vec{0}} + C\,\frac{r\dot{\vec{r}} - \vec{r}\dot{r}}{r^2}$$

$$= \dot{\vec{p}}\times\vec{L} - \frac{C}{r^3}\Big(\vec{r}\underbrace{r\dot{r}}_{=\vec{r}\cdot\dot{\vec{r}}} - \dot{\vec{r}}r^2\Big) = -\vec{\nabla}V\times(\vec{r}\times m\dot{\vec{r}}) - \frac{C}{r^3}\left(\vec{r}(\vec{r}\cdot\dot{\vec{r}}) - r^2\dot{\vec{r}}\right)$$

$$= -mV'\frac{\vec{r}}{r}\times(\vec{r}\times\dot{\vec{r}}) - \frac{C}{r^3}\left[\vec{r}(\vec{r}\cdot\dot{\vec{r}}) - r^2\dot{\vec{r}}\right]$$

$$= -\frac{m}{r}V'\Big[\vec{r}(\vec{r}\cdot\dot{\vec{r}}) - \dot{\vec{r}}\underbrace{(\vec{r}\cdot\vec{r})}_{=r^2}\Big] - \frac{C}{r^3}\left[\vec{r}(\vec{r}\cdot\dot{\vec{r}}) - r^2\dot{\vec{r}}\right] \overset{!}{=} 0$$

$$\left(-\frac{m}{r}V' - \frac{C}{r^3}\right)\left[\vec{r}(\vec{r}\cdot\dot{\vec{r}}) - \dot{\vec{r}}r^2\right] = 0$$

$$mr^2V' + C = 0$$

$$V'(r) = -\frac{C}{mr} \Rightarrow V(r) = \frac{C}{mr} + \text{const}$$

(Kepler-, Coulomb-Potential)

d) Newton: $m\ddot{\vec{x}} = \vec{F}$

Für ein Teilchen in 3 Dimensionen: DGl 2. Ordnung in 3 Komponenten,

also $\underset{\text{2. Ordnung}}{2} \cdot \underset{\text{Dimension}}{3} = 6$ Anfangsbedingungen ($\vec{x}(t_0)$ und $\vec{v}(t_0)$)

Es kann also nur maximal 6 <u>unabhängige</u> Erhaltungsgrößen geben.

Aus Aufgabe c):

Energie E 1

Drehimpuls $\vec{L}$ 3

Runge-Lenz $\vec{A}$ 3 erhalten

Σ 7

Die Erhaltungsgrößen Energie, Drehimpuls und RL-Vektor können also nicht unabhängig sein.

$$\vec{A}\cdot\vec{L} = \left(\vec{p}\times\vec{L} + C\frac{\vec{r}}{r}\right)\cdot\vec{L} = \underbrace{(\vec{p}\times\vec{L})\cdot\vec{L}}_{=\text{Spatprodukt}} + \frac{C}{r}\,\vec{r}\cdot\vec{L} = \underbrace{(\vec{L}\times\vec{L})}_{=0}\cdot\vec{p} + \frac{C}{r}\,\vec{r}\cdot\underbrace{(\vec{r}\times\vec{p})}_{=\text{Spatprodukt}}$$

$$= \frac{C}{r}\,\vec{p}\cdot\underbrace{(\vec{r}\times\vec{r})}_{=0} = 0$$ (Vektoren im Spatprodukt dürfen zyklisch vertauscht werden)

$$\vec{A}\cdot\vec{r} = \left(\vec{p}\times\vec{L} + C\frac{\vec{r}}{r}\right)\cdot\vec{r} = (\vec{p}\times\vec{L})\cdot\vec{r} + C\frac{r^2}{r} = \underbrace{(\vec{r}\times\vec{p})}_{=\vec{L}}\cdot\vec{L} + Cr = L^2 + Cr$$

Im Kepler-Potential gibt es also nur $\underset{\text{Energie}}{1} + \underset{\text{Drehimpuls}}{3} + \underset{\text{RL-Vektor}}{3} - \underset{\text{Beziehungen } \vec{A}\cdot\vec{L} \text{ und } \vec{A}\cdot\vec{r}}{2} = 5$ unabhängige Erhaltungsgrößen.