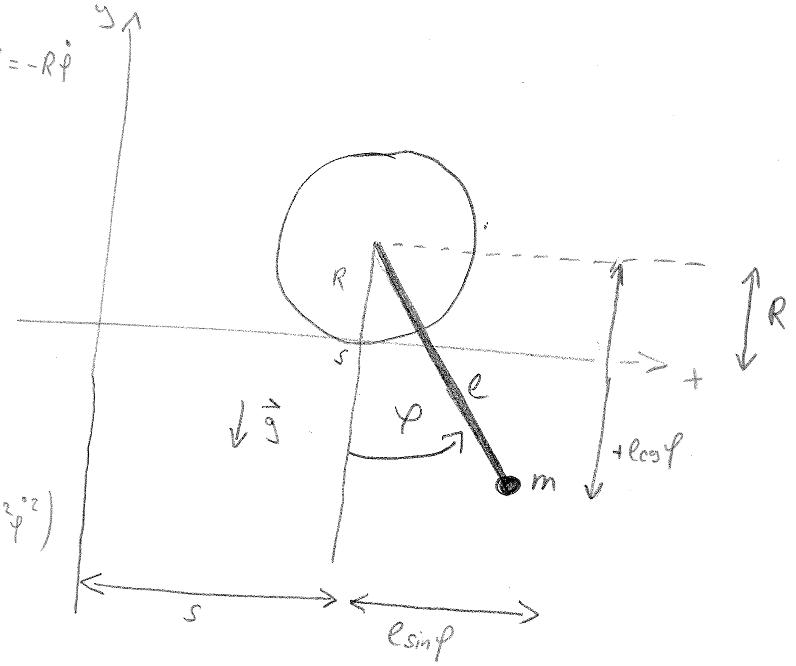
2014F / Rollpendel

a) Rollbedingung: $s = -R\varphi$, $\dot{s} = -R\dot{\varphi}$



Generalisierte Koordinaten:

$$x = s + \ell\sin\varphi, \quad \dot{x} = \dot{s} + \ell\dot{\varphi}\cos\varphi$$

$$y = -\ell\cos\varphi + R, \quad \dot{y} = -\ell\dot{\varphi}\sin\varphi$$

Kinetische Energie:

$$T = \frac{m}{2}\left[\dot{s}^2 + 2\ell\dot{s}\dot{\varphi}\cos\varphi + \ell^2\dot{\varphi}^2\cos^2\varphi + \ell^2\dot{\varphi}^2\sin^2\varphi\right] = \frac{m}{2}\left(\dot{s}^2 + 2\ell\dot{s}\dot{\varphi}\cos\varphi + \ell^2\dot{\varphi}^2\right)$$

$$= \frac{m}{2}\left(R^2\dot{\varphi}^2 - 2\ell R\dot{\varphi}^2\cos\varphi + \ell^2\dot{\varphi}^2\right)$$

$$= \frac{m}{2}\dot{\varphi}^2\left(R^2 - 2\ell R\cos\varphi + \ell^2\right)$$

Potentielle Energie:

$$V = +mgy = -mg\ell\cos\varphi + mgR$$

Lagrange-Funktion: $\mathcal{L} = T - V = \frac{m}{2}\dot{\varphi}^2\left(R^2 - 2R\ell\cos\varphi + \ell^2\right) + mg\ell\cos\varphi - mgR$ (*) siehe Seite 3

b) Euler-Lagrange:

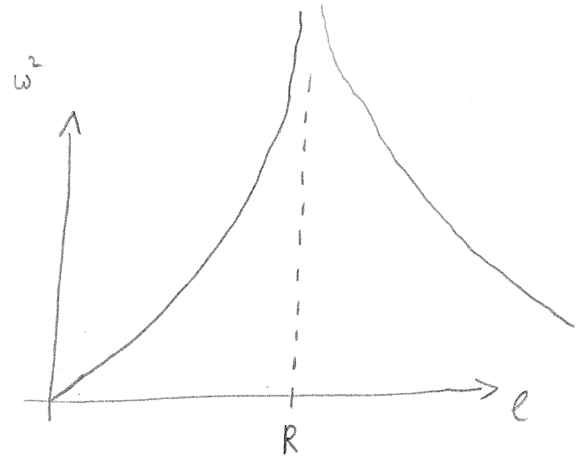
$$0 = \frac{d}{dt}\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{\varphi}} - \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\varphi} = \frac{d}{dt}\left[m\dot{\varphi}\left(R^2 - 2R\ell\cos\varphi + \ell^2\right)\right] - \left(-mg\ell\sin\varphi + mR\ell\dot{\varphi}^2\sin\varphi\right)$$

$$= m\ddot{\varphi}\left(R^2 - 2R\ell\cos\varphi + \ell^2\right) + 2mR\ell\dot{\varphi}^2\sin\varphi + mg\ell\sin\varphi - mR\ell\dot{\varphi}^2\sin\varphi$$

$$\ddot{\varphi} + \frac{R\ell\sin\varphi}{R^2 - 2R\ell\cos\varphi + \ell^2} + \frac{g\ell\sin\varphi}{R^2 - 2R\ell\cos\varphi + \ell^2} = 0$$

Kleine Schwingungen: $|\varphi| \ll 1 \Rightarrow \sin\varphi \approx \varphi$, $\cos\varphi \approx 1$
$|\dot{\varphi}| \ll 1$

$$\Rightarrow \ddot{\varphi} + \frac{g\ell}{R^2 - 2R\ell + \ell^2} = \ddot{\varphi} + \underbrace{\frac{g\ell}{(R-\ell)^2}}_{=\omega^2} = 0$$



Grenzfälle:

$\ell \gg R$: $\omega^2 = \frac{g\ell}{(R-\ell)^2} \approx \frac{g\ell}{\ell^2} = \frac{g}{\ell}$ => Frequenz des (linearisierten) Fadenpendels

$\ell = 0$ $\omega^2 = \frac{g\ell}{(R-\ell)^2} = 0$ => klassische Rollbewegung

$\ell = R$ $\omega^2 = \frac{g\ell}{(R-\ell)^2} \to \infty$ => harmonische Näherung bricht zusammen

genauer: $R^2 - 2R\ell\cos\varphi + \ell^2 \underset{R=\ell}{\overset{\cos\varphi\approx 1}{=}} (R-\ell)^2$ verschwindet für $\ell = R$

oder: effektive Masse verschwindet

c) $\varphi = \pi$: $T_\pi = 0$, $V_\pi = -mg\ell\cos\varphi + mgR = mg(\ell+R)$

$\varphi = 0$: $V_0 = -mg\ell\cos\varphi + mgR = mg(R-\ell)$ $T_0 = \frac{m}{2}\dot\varphi^2(R^2+\ell^2-2R\ell\cos\varphi)$

$= \frac{m}{2}\dot\varphi^2(R^2+\ell^2-2R\ell) = \frac{m}{2}\dot\varphi^2(R-\ell)^2$

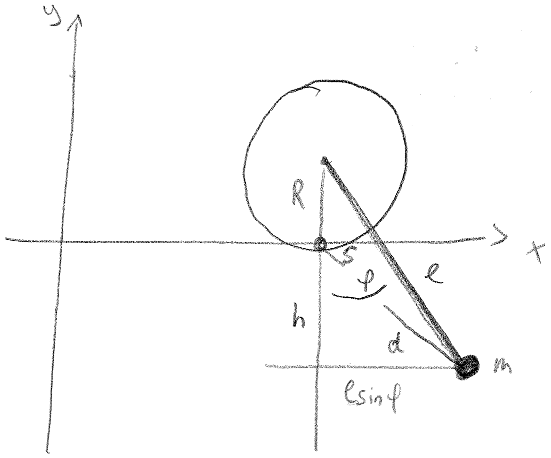
Energieerhaltung: $T_0 + V_0 = T_\pi + V_\pi$

$\frac{m}{2}\dot\varphi^2(R-\ell)^2 + mg(R-\ell) = mg(R+\ell)$

$\frac{m}{2}\dot\varphi^2(R-\ell)^2 = 2mg\ell$

$\dot\varphi^2 = \frac{4g\ell}{(R-\ell)^2}$ $\Rightarrow |\dot\varphi| = \frac{2\sqrt{g\ell}}{|R-\ell|} = 2\omega$

d)



$h = \ell\cos\varphi - R$

$d^2 = h^2 + (\ell\sin\varphi)^2 = \ell^2\cos^2\varphi - 2\ell R\cos\varphi + R^2 + \ell^2\sin^2\varphi$

$= R^2 + \ell^2 - 2\ell R\cos\varphi$

$d = \sqrt{R^2+\ell^2-2R\ell\cos\varphi}$

Trägheitsmoment: $\Theta = \int_V dV \rho(\vec r)\, \vec r_\perp^{\,2} = \int_{-\infty}^{\infty} dx \int_{-\infty}^{\infty} dy \int_{-\infty}^{\infty} dz\, m\delta(x-\ell\sin\varphi)\,\delta(y-\ell\cos\varphi+R)\,\delta(z-0)\, d^2$

$\vec r_\perp$: zur Rotationsachse $\vec\omega$ senkrechter Anteil von $\vec r$

$= m d^2$

Kinetische Energie der Rotation $T_{rot} = \frac{\Theta}{2}\dot\varphi^2 = \frac{m}{2}\dot\varphi^2 d^2 = \frac{m}{2}\dot\varphi^2(R^2+\ell^2-2\ell R\cos\varphi)$

kinetische Energie aus a) lässt sich als reine Rotationsenergie interpretieren

(*) Die Lagrange-~~Gleichung~~ Funktion $\mathcal{L}$ ist nicht eindeutig definiert.

Mehrere Lagrange-Funktionen führen zu den selben Bewegungsgleichungen.

Warum?

① Das Potential V ist nur definiert bis auf eine Konstante. Zwei Potentiale V_1 und V_2, die sich nur um eine Konstante unterscheiden $V_1 - V_2 = \text{const}$, beschreiben die gleiche Physik.

② Ein formales Argument: Betrachte $\mathcal{L}' = \mathcal{L} + c$ mit $c = \text{const}$

Euler-Lagrange: $$0 = \frac{d}{dt}\frac{\partial \mathcal{L}'}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial \mathcal{L}'}{\partial q_i} = \frac{d}{dt}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i}$$

bei den Ableitungen fällt die Konstante c weg

=> Zwei Lagrange-Funktionen, die sich nur um eine Konstante unterscheiden, beschreiben die gleiche Physik.

Oder: Die Lagrange-Funktion ist nur bis auf eine Konstante definiert.

(Noch allgemeiner: Die Lagrange-Funktionen

$\mathcal{L}$ und $\mathcal{L}' = a\mathcal{L} + c$, a und c const

beschreiben die gleiche Physik / liefern die selben Bewegungsgleichungen.)